Mathematik II für Informatiker — Sommer 2016
Übungsblatt 9
Dozent: PD Dr. Markus Junker. Assistent: Dr. Juan Diego Caycedo.

1. S_3 **als lineare Gruppe.** Geben Sie einen injektiven Gruppenhomorphismus

$$S_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

an.
Hinweis: Fassen Sie S_3 als Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks auf.

2. **Das Zentrum der** GL_n**.** Sei K ein Körper und $\mathrm{GL}_n(K)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über K. Beweisen Sie:

$$Z(\mathrm{GL}_n(K)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in K^* \right\}.$$

Hinweis: Untersuchen Sie die Vertauschungsbedingung für die Vertauschung mit geeigneten Elementarmatrizen explizit. (Eine Elementarmatrix ist die Matrix zu einer elementaren Umformung.)

3. **Zyklische Gruppen.** Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element. Zeigen Sie

(a) $\langle g^k, g^l \rangle = \langle g^{\mathrm{ggT}(k,l)} \rangle$,
(b) $\langle g^k \rangle \cap \langle g^l \rangle = \langle g^{\mathrm{kgV}(k,l)} \rangle$.

Dabei bezeichnet $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ die von $\{x_1, \dots, x_n\}$ erzeugte Untergruppe von G.

Bitte wenden!

4. **Untergruppen.** Betrachte die (nicht kommutative) Gruppe D_4 der Symmetrien eines Quadrats (Rotationen und Spiegelungen, welche das Quadrat in sich überführen). Das Gruppengesetz ist durch die Hintereinanderausführung von Abbildungen gegeben. Sei σ die Rotation um 90 Grad (gegen den Uhrzeigersinn) und τ die Spiegelung an der x-Achse. Diese Elemente erzeugen D_4:

1	Identität
σ	Rotation um 90 Grad
σ^2	Rotation um 180 Grad
σ^3	Rotation um 270 Grad
τ	Spiegelung um die x-Achse
$\sigma\tau$	Spiegelung an der Hauptdiagonalen
$\sigma^2\tau$	Spiegelung an der y-Achse
$\sigma^3\tau$	Spiegelung an der Nebendiagonalen

Hier haben wir z.B. „ $\sigma\tau$ “ für die Hintereinanderausführung $\sigma \circ \tau$ geschrieben. Dies bedeutet, dass **zuerst** τ **und dann** σ ausgeführt wird.

Es gelten die Relationen $\sigma^4 = 1$, $\tau^2 = 1$ und $\tau\sigma\tau = \sigma^3$. Mit Hilfe dieser lassen sich alle Ausdrücke in σ und τ wieder auf eine der 8 Formen in der Tabelle bringen.

Bestimmen Sie alle 10 Untergruppen von D_4 und geben Sie die Ordnungen der Elemente an.

Abgabe bis Fr. 1.7.2016, 12:00 in die Kästen im EG des Instituts für Informatik, Geb. 51.