Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 24.10.2011
Prof. Dr. Martin Ziegler
Juan Diego Caycedo

Blatt 1

Abgabe bis Mittwoch 2.11. um 12 Uhr im Keller, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. Bringen Sie mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen das folgende lineare Gleichungssystem G_a, $a = (a_1, \ldots, a_4) \in \mathbb{R}^4$ für $a = (0,0,0,0)$ und für $a = (24, -17, 27, 21)$ auf Normalform, und ermitteln Sie in diesen beiden Fällen jeweils die Lösungsmenge.

$$G_a: \quad \begin{array}{rcrcrcrcl} 7x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & a_1 \\ -4x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & = & a_2 \\ 7x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & a_3 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & & & = & a_4 \end{array}$$

Aufgabe 2. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$G: \quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & \beta_1 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 11x_3 & = & \beta_2 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & 14x_3 & = & \beta_3 \end{array}$$

(a) Stelle die Spalte $\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Spalten $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ dar.
Hinweis: Löse das zu G gehörige homogene System.

(b) Stelle die Zeile $(2, 8, 14)$ als Linearkombination der Zeilen $(1, 2, 3)$ und $(3, 7, 11)$ dar.

Aufgabe 3. Betrachte das lineare Gleichungssystem G aus Aufgabe 2.

(a) Zeige: Falls G lösbar ist, gilt $\beta_3 = -10\beta_1 + 4\beta_2$.

(b) Zeige: Falls $\beta_3 = -10\beta_1 + 4\beta_2$ gilt, so ist G lösbar.

Aufgabe 4. Kann es ein lineares Gleichungssytem G in zwei Unbekannten geben, das aus $m \geq 1$ Gleichungen besteht und

$$\mathsf{L}(G) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \cdot \beta = 0\}$$

erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort genau.

Anwesenheitsaufgaben für die 2. Woche. (31.10 - 2.11).

Aufgabe 1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?

(1) Jedes lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung.
(2) Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung.
(3) Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens zwei Lösungen.
(4) Jedes homogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$, das mindestens zwei Lösungen hat, hat unendlich viele.
(5) Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem hat höchstens eine Lösung.

Aufgabe 2. Man überlege sich, daß das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ für $i, j = 1, 2$ genau dann eindeutig lösbar ist, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ gilt.

Aufgabe 3. Es sei G das folgende lineare Gleichungssystem

$$G: \qquad \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5. \end{array}$$

Gibt es ein lineares Gleichungssystem in zwei Unbekannten, das aus nur einer einzigen Gleichung besteht und die gleiche Lösungsmenge wie G besitzt? Führen Sie den Nachweis für Ihre Behauptung.

Aufgabe 4. Für welche $d \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem lösbar?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & d \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

[0] http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/