Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 10.1.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Juan Diego Caycedo

Blatt 10

Abgabe bis Mittwoch 18.1.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Sei $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, und sei ferner $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ mit $f_A = f$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien außerdem (b_1, b_2, b_3) bzw. (c_1, c_2) Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$. Wir sagen, daß die Abbildung f bezüglich der Basen (b_1, b_2, b_3) und (c_1, c_2) durch die Matrix $\bar{A} = (\bar{\alpha}_{ji})_{j,i=1}^{2,3}$ beschrieben wird, falls gilt

$$f(b_i) = \sum_{j=1}^{2} \bar{\alpha}_{ji} c_j,\ i \in \{1, 2, 3\}.$$

Geben Sie jeweils die beschreibende Matrix zu f an bezüglich der folgenden Basen

(a) (b_1, b_2, b_3) und (e_1, e_2).

(b) (e_1, e_2, e_3) und (c_1, c_2).

(c) (b_1, b_2, b_3) und (c_1, c_2).

Hierbei wird mit (e_1, e_2, e_3) bzw. (e_1, e_2) jeweils die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$ bezeichnet, und wir setzen ferner (Überlegen Sie sich auch, daß es sich hierbei tatsächlich — wie oben behauptet — jeweils um Basisvektoren handelt!)

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (8 Punkte)
Den nachfolgenden Betrachtungen sei die Matrix $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

zugrundegelegt.

(a) Überführen Sie die Matrix A durch sukzessive Anwendung der Zeilenoperationen $Z_{i,j}^1$ $(i \neq j)$ und Z_i^λ $(\lambda \neq 0)$ in die Einheitsmatrix $E \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. Geben Sie bei jedem Schritt an, welche Operation Sie gerade ausgeführt haben.

(b) Stellen Sie jetzt die Matrix A als Produkt von Elementarmatrizen $E_i^\lambda := E + (\lambda - 1)E^{i,i}$, $i \in \{1,2,3\}$, $\lambda \neq 0$ und $E_{i,j}^1 = E + E^{i,j}$, $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3\}$ dar.
Hinweis: Man überlege sich, daß gilt:

$$A \xrightarrow{Z_i^\lambda} \bar{A} \Leftrightarrow \bar{A} = E_i^\lambda \cdot A \text{ und } A \xrightarrow{Z_{i,j}^1} \bar{A} \Leftrightarrow \bar{A} = E_{j,i}^1 \cdot A.$$

(Diese Bemerkung und die in der anderen Hinweisen in dieser Aufgabe dürfen Sie frei anwenden.)

(c) Ermitteln Sie die zu A inverse Matrix A^{-1} auf der Grundlage von (a) und (b).
Hinweis: $F_k \cdots F_1 \cdot A = E \Rightarrow F_k \cdots F_1 \cdot E = A^{-1}$.

(d) Begründen Sie, warum man ebenso gut mit Spaltenoperationen ($S_{i,j}^1$ und S_i^λ) wie mit Zeilenoperationen argumentieren kann. Geben Sie konkret für das obige Beispiel an, wie man A durch Anwenden von Spaltenoperationen in die Einheitsmatrix E überführt.
Hinweis: Man überlege sich, daß gilt:

$$A \xrightarrow{S_i^\lambda} \bar{A} \Leftrightarrow \bar{A} = A \cdot E_i^\lambda \text{ und } A \xrightarrow{S_{i,j}^1} \bar{A} \Leftrightarrow \bar{A} = A \cdot E_{i,j}^1.$$

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Entscheiden Sie, ob man im sogenannten Fünfzehner–Spiel durch wiederholtes Verschieben der numerierten Quadrate unter Benutzung des jeweils freien Feldes von der Stellung (A) ausgehend schließlich in die Stellung (B) gelangen kann. Hierbei sind

(A):

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

,

(B):

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

.

Hinweis: Ordnen Sie der Stellung (A) die Permutation

$$\pi_A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & * \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 12 & 11 & 10 & 9 & 13 & 14 & 15 & * \end{pmatrix}$$

der Menge $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,*\}$ zu und entsprechend (B)

$$\pi_B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & * \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 12 & 11 & 10 & 9 & 13 & 15 & 14 & * \end{pmatrix}.$$

Welchen Permutationen entsprechen diejenigen Verschiebefolgen, an deren Ende wieder das Feld unten rechts frei ist?

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/`