Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 17.1.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Juan Diego Caycedo

**Blatt 11**

*Abgabe bis Mittwoch 25.1.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.*

**Aufgabe 1. (4 Punkte)**
Seien $V_1, \dots, V_m$ und $W$ Vektorräume über dem Körper $K$. Für $i \in \{1, \dots, m\}$ werde mit $\mathcal{B}_i$ eine Basis von $V_i$ bezeichnet. Zeigen sie, daß eine multilineare Abbildung

$$\Phi : V_1 \times \cdots \times V_m \to W$$

schon eindeutig bestimmt ist durch die Werte auf den jeweiligen Basen, d.h. durch die Werte

$$\Phi(b_1, \dots, b_m) \text{ mit } b_i \in \mathcal{B}_i,\ i \in \{1, \dots, m\}.$$

**Aufgabe 2. (4 Punkte)**
Die Spur einer quadratischen Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$\operatorname{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}.$$

(a) Sei $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie

$$\operatorname{Spur}(A) = \operatorname{Spur}(D^{-1} \cdot A \cdot D).$$

(b) Sei jetzt $V$ ein $n$-dimensionaler reeller Vektorraum und $f \in \mathrm{L}(V, V)$. Sei $(b_1, \dots, b_n)$ eine beliebige Basis von $V$ gegeben, die wir mit $\mathcal{B}$ bezeichnen, und außerdem werde $f$ bezüglich dieser Basis $\mathcal{B}$ durch die Matrix $A_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ beschrieben. Zeigen Sie, daß man, ohne zu Mehrdeutigkeiten (durch die Beliebigkeit bei der Wahl von $\mathcal{B}$) zu gelangen, die Spur von $f$ durch

$$\operatorname{Spur}(f) := \operatorname{Spur}(A_{\mathcal{B}})$$

definieren kann.

**Aufgabe 3. (4 Punkte)**
Seien $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$, $V$ ein reeller Vektorraum der Dimension $n$, $D : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ eine von der Nullform verschiedene, alternierende $k$-Form auf $V$ und $\varphi \in \mathrm{L}(V, V)$. Wir definieren jetzt zusätzlich eine Abbildung $\bar{D} : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ durch

$$\bar{D}(c_1, \dots, c_k) := \sum_{j=1}^{k} D(c_1, \dots, c_{j-1}, \varphi(c_j), c_{j+1}, \dots, c_k)$$

$(c_1, \dots, c_k \in V)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\bar{D}$ eine alternierende $k$-Form auf $V$ ist.

(b) Ist $k = n$, so ist $\bar{D}$ eine alternierende $n$-Form auf $V$ (Determinantenform) und es gibt eine (nur von $\varphi$ abhängende) Konstante $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\bar{D} = \gamma \cdot D$. Zeigen Sie, dass der Faktor $\gamma$ gleich Spur($\varphi$) ist (wobei Spur($\varphi$) wie in Aufgabe 2 definiert wird).

**Aufgabe 4. (4 Punkte)**

(a) Es seien ein Körper $K$ und Matrizen $A \in \mathcal{M}_{k,k}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{l,l}(K)$ sowie $C \in \mathcal{M}_{k,l}(K)$ für $k, l \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Mit $O \in \mathcal{M}_{l,k}(K)$ werde die Nullmatrix bezeichnet. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B).$$

(b) Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $K$ und $U$ ein $m$-dimensionaler Untervektorraum mit $n, m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{L}(V, V)$ mit der Eigenschaft $f(U) \subset U$. Mit $f|U$ werde die Restriktion (Einschränkung des Definitionsbereichs) von $f$ auf $U$ bezeichnet. Eine Abbildung $\bar{f} : V/U \to V/U$ werde erklärt durch

$$\bar{f}(v + U) := f(v) + U. \tag{1}$$

Zeigen Sie, daß (1) eine korrekte Definition darstellt und daß $\bar{f} \in \mathrm{L}(V/U, V/U)$ gilt. Beweisen Sie außerdem

$$\det(f) = \det(f|U) \cdot \det(\bar{f}).$$

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/`