Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 24.1.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Juan Diego Caycedo

Blatt 12

Abgabe bis Mittwoch 1.2.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Berechnen Sie die inverse Matrix $A^{-1} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ zu

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

indem Sie mit Hilfe der Adjunkten $\operatorname{adj}(A)$ den Ausdruck $\det(A)^{-1} \cdot \operatorname{adj}(A)$ berechnen.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichung:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i),$$

wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ gegeben sind.
Hinweis: Führen Sie einen Beweis nach dem Prinzip der vollständigen Induktion, indem Sie die „Schiebungsinvarianz“ der Determinante ausnutzen.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Zu $n \in \mathbb{N}$ und einem Körper K werde die Menge

$$\mathrm{SL}_n(K) := \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(K) \mid \det(A) = 1\}$$

erklärt.

1. Zeigen Sie, daß $(\mathrm{SL}_n(K), \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}_n(K), \cdot)$ darstellt, wenn „$\cdot$“ die Matrizenmultiplikation bezeichnet.

2. Zeigen Sie, daß die Gruppe $\mathrm{SL}_n(K)$ erzeugt wird von den Matrizen $E^{\lambda}_{i,j}$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda \in K$, das heißt, daß jedes Element $A \in \mathrm{SL}_n(K)$ als Produkt von solchen Matrizen $E^{\lambda}_{i,j}$ dargestellt werden kann.
Hinweis: Man kann zum Beispiel mit Zeilenoperationen argumentieren.

[0] http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/