Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 31.1.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Juan Diego Caycedo

Blatt 13

Abgabe bis Mittwoch 8.2.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (4 Punkte)

(a) Die Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ besitze die reellen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (nicht notwendig paarweise verschieden) mit zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Sei $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine reguläre Matrix. Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $T^{-1}AT$?

(b) Sei wiederum $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, daß A und $A^\top$ dieselben Eigenwerte besitzen. Besitzen A und $A^\top$ auch dieselben Eigenvektoren?

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $\varphi \in \mathrm{L}(V, V)$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus. Zeigen Sie, daß jeder Untervektorraum U von V einen bezüglich φ invarianten Komplementärraum W besitzt, d.h. $U \cap W = \{o\}$, $U + W = V$ und $\varphi(W) \subset W$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

(a) Seien $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, daß AB und BA dieselben Eigenwerte besitzen.
Hinweis: Gegeben einen Eigenwert λ von AB, um zu zeigen, daß λ auch einer Eigenwert von BA ist, betrachten Sie getrennt die zwei Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda \neq 0$.

(b) Besitzen sowohl $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ als auch $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ jeweils n-verschiedene reelle Eigenwerte, und gilt zudem noch $AB = BA$, dann gibt es eine Basis, die aus lauter Eigenvektoren sowohl zu A als auch zu B besteht. Mit anderen Worten, A und B sind dann simultan diagonalisierbar.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Für die folgende reelle Matrix A, bestimmen Sie die Eigenwerte und die Dimensionen der zugehörigen Eigenräume.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/`