Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 31.10.2011
Prof. Dr. Martin Ziegler
Juan Diego Caycedo

Blatt 2

Abgabe bis Mittwoch 9.11. um 12 Uhr im Keller, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1.

(a) Auf dem $\mathbb{R}^2$ sei eine Addition $+$ wie im Abschnitt 1.2 von Skript definiert und eine Multiplikation $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ auf folgende Weise gegeben: Sind $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$, so erkläre man

$$\lambda * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda k x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix},$$

wobei

$$k := \begin{cases} -1, & \text{falls } x_1 x_2 < 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Welche der Eigenschaften von Lemma 1.2.1 im Skript sind jetzt erfüllt?

(b) Untersuchen Sie dieselbe Frage wie in (a), falls die skalare Multiplikation festgelegt wird durch

$$\lambda * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2. Wie liegen die Geraden g und h jeweils zueinander? (Fragen Sie sich die folgende Fragen: haben sie gemeinsame Punkte? Sind die beide in eine Ebene enhalten?)

(a) $g = (1,2,-1) + \mathbb{R}(1,1,1), \quad h = (1,3,-1) + \mathbb{R}(1,2,1).$

(b) $g = (1,2,-1) + \mathbb{R}(1,1,1), \quad h = (0,1,-2) + \mathbb{R}(-2,-2,-2).$

(c) $g = (1,2,-1) + \mathbb{R}(1,1,1), \quad h = (3,2,1) + \mathbb{R}(3,3,3).$

(d) $g = (1,2,-1) + \mathbb{R}(1,1,1), \quad h = (1,2,3) + \mathbb{R}(-1,1,2).$

Weil, wegen des Feirertags am 1.11., in der 2. Woche nur eine Vorlesung stattfinden wurde, lassen wir die Aufgaben 3 und 4 für Blatt 3.

Aufgabe 3. (Abgabe in Blatt 3.) Weisen Sie nach, daß eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ genau dann eine affine Ebene darstellt, wenn es $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$ gibt, so daß

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b\}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 4. (Abgabe in Blatt 3.)

(a) Sei $n \geq 3$. Zeigen Sie, daß durch

$$E = \left\{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \mid \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^n$ eine affine Ebene im $\mathbb{R}^n$ gegeben ist, falls $a_2 - a_1$ und $a_3 - a_1$ linear unabhängig sind.

Machen Sie sich klar außerdem, daß zu drei vorgegebenen Punkten im $\mathbb{R}^n$ stets eine affine Ebene existiert, die diese drei Punkte enthält.

(b) Überlegen Sie sich, daß jede affine Ebene E des $\mathbb{R}^n$ in dieser Form dargestellt werden kann.

Aufgabe 5. (Freiwillig, keine Punkte werden gerechnet). Es sei g eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ durch den Nullpunkt $o \in \mathbb{R}^2$, die die Ebene in zwei Hälften teilt. Mit $P_1, \ldots, P_n$, $n \in \mathbb{N}$ werden die Endpunkte von in o abgetragenen Einheitsvektoren $p_1, \ldots, p_n$, $|p_i| = 1$ bezeichnet, wobei die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ alle in derselben Hälfte bez. g liegen mögen. Man zeige, daß im Fall eines ungeraden $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$|p_1 + \cdots + p_n| \geq 1$$

erfüllt ist.

[0] http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/