Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 15.11.2011

Prof. Dr. Martin Ziegler

Juan Diego Caycedo

Blatt 4

Abgabe bis Mittwoch 23.11. um 12 Uhr im Keller, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (3+1 Punkte)

(a) Gegeben sei die Menge von Polynomen

$$M_2 := \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Zeige, daß M_2 mit der üblichen Addition und der üblichen Multplikation mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ die Axiome aus Lemma 1.2.1 erfüllt.

(b) Gilt das gleiche für die folgende Mengen? (Hier müssen Sie nicht Ihre Antwort begründen.)

$$M_n := \{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, und

$$M := \{a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0 \mid k \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 2. (2+2+2 Punkte)

(a) Im $\mathbb{R}^3$ sei eine affine Ebene E durch $E = a + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ gegeben. Ein Vektor $c \in \mathbb{R}^3$ heiße orthogonal zu E ($c \perp E$), falls $cv = 0$ und $cw = 0$ gilt. Zeigen Sie, daß diese Definition nicht von der speziellen Darstellung des Richtungsraumes von E abhängt.

(b) Zeigen Sie, daß für Punkte $p \in E$, $q \notin E$ folgendes gilt:

$$q - p \perp E \iff \|q - p\| = \min\{\|q - x\| \mid x \in E\}.$$

(c) Zeigen Sie weiter, daß es zu einer vorgegebenen Ebene E und einem gegebenen Punkt $q \notin E$ genau einen Punkt $p_0 \in E$ mit $q - p_0 \perp E$ (bzw. mit $\|q - p_0\| = \min\{\|q - x\| \mid x \in E\}$) gibt.

Aufgabe 3. (2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$. Das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ sei eindeutig lösbar.

Daraus folgt, dass für jedes $b \in \mathbb{R}^2$, ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ auch eindeutig lösbar. Also wird durch

$$b \to \xi_b,$$

wobei $\xi_b \in \mathbb{R}^2$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist, jedem Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ eindeutig ein Vektor $\xi_b \in \mathbb{R}^2$ zugeordnet.

(a) Zeigen Sie, daß diese Zuordnung eine lineare Abbildung ist.

(b) Stellen Sie die zugehörige Matrix B auf.

(c) Berechnen Sie AB und BA.

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/`