Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 22.11.2011
Prof. Dr. Martin Ziegler
Juan Diego Caycedo

Blatt 5

Abgabe bis Mittwoch 30.11. um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Drehmatrix $D_\alpha \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, die durch

$$D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

erklärt ist.
Zeigen Sie, daß für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, die Gleichungen

$$D_\alpha D_\beta = D_{\alpha+\beta} = D_\beta D_\alpha$$

für das Matrizenprodukt erfüllt sind.
Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme für die Winkelfunktionen.

Aufgabe 2. (8 Punkte)
Zu einer gegebenen Matrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ werde die transponierte Matrix $A^T := (\tilde{\alpha}_{kl})_{k,l=1}^{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ erklärt, indem $\tilde{\alpha}_{kl} := \alpha_{lk}$ definiert wird. Außerdem bezeichnen wir mit $\langle x, y\rangle$ das Standardskalarprodukt von Vektoren x und y aus $\mathbb{R}^n$. Man merke, daß dann für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Beziehung $\langle x, y\rangle = x^T y$ gilt, wobei am rechten Seite um das Matrizenprodukt sich handelt.

(a) Zeigen Sie, daß für alle $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$, die Gleichung $(BA)^T = A^T B^T$ gilt.

(b) Zeigen Sie, daß beliebige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ und eine beliebige Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ der Gleichung

$$\langle Aa, b\rangle = \langle a, A^T b\rangle$$

genügen.

(c) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 1, Zeigen Sie für $\omega \in \mathbb{R}$:

$$(D_\omega)^T = D_{-\omega}.$$

(d) Zeigen Sie schließlich, daß für $a, b \in \mathbb{R}^2$ und $\omega \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle a, b\rangle = \langle D_\omega a, D_\omega b\rangle.$$

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Finden Sie jeweils Beispiele für Matrizen $A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, die die folgende Bedingungen erfüllen.

(a) $AB \neq BA$.

(b) $AB = O$, $A, B \neq O$. ($O \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ sei die Nullmatrix)

(c) $AB = B$, $A \neq E$, $B \neq O$. ($E \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ sei die Einheitsmatrix.)

Aufgabe 4. (nicht abzugeben)
Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ beziehungsweise $j \in \{1, \ldots, n\}$ werden nachfolgend lineare Abbildungen $\iota_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ bzw. $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eindeutig festgelegt durch die Forderungen

$$\iota_i(1) := e_i \in \mathbb{R}^m,$$

bzw. für $e_l \in \mathbb{R}^n$, $l \in \{1, \ldots, n\}$

$$\pi_j(e_l) := \delta_{jl} := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

(Mit $e_1, \ldots, e_m$ bzw. $e_1, \ldots, e_n$ werde jeweils die Standardbasis des $\mathbb{R}^m$ bzw. des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.)
Zeigen Sie, daß für eine Matrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ die zugeordnete lineare Abbildung $f_A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die Beziehung

$$f_A = \sum_{\substack{i \in \{1,\ldots,m\} \\ j \in \{1,\ldots,n\}}} \alpha_{ij} (\iota_i \circ \pi_j)$$

erfüllt.
Hinweis: Sie brauchen dies nur auf der Standardbasis nachzuweisen. Warum?

Aufgabe 5. (nicht abzugeben)
Rechnen Sie nach, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ erfüllt ist, wenn $T \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ konkret gegeben ist durch

$$T := \frac{1}{125} \begin{pmatrix} 45 & -108 & 44 \\ 60 & -19 & -108 \\ 100 & 60 & 45 \end{pmatrix} .$$

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/`