Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 29.11.2011

Prof. Dr. Martin Ziegler

Juan Diego Caycedo

Blatt 6

Abgabe bis Mittwoch 7.12. um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (3+1 Punkte)
Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, und X sei eine nicht-leere Menge. Mit $\mathcal{F} := \{f \mid f : X \to G\}$ werde die Menge aller Abbildungen von X nach G bezeichnet. Ferner werde zu $f, g \in \mathcal{F}$ eine Abbildung $f * g \in \mathcal{F}$ erklärt durch $(f * g)(x) := f(x) \circ g(x)$ für $x \in X$.

Zeigen Sie, daß dann $(\mathcal{F}, *)$ eine Gruppe darstellt und daß diese Gruppe kommutativ ist, falls $(G, \circ)$ kommutativ ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

Hinweis: Berechnen Sie einmal das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. (2+2 Punkte)

(a) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, und $Z(G) \subset G$ werde definiert durch

$$Z(G) := \{a \in G \mid \forall b \in G : \; a \circ b = b \circ a\}.$$

Zeigen Sie, daß $(Z(G), \circ)$ eine kommutative Gruppe darstellt. ($Z(G)$ heißt der Zentralisator von G.)

(b) Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe mit der Eigenschaft, daß für alle $a \in G$ gilt $a \circ a = e$ (e sei das neutrale Element der Gruppe), so ist $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe.

Aufgabe 4. (1+1+2+2 Punkte)
Es sei X eine Menge. Eine Relation ρ auf X ist eine Teilmenge von $X \times X$. Wir schreiben $x \sim y$ für $(x, y) \in \rho$. Eine Relation heißt *reflexiv*, falls $x \sim x$ für alle $x \in X$; *symmetrisch*, falls $(x \sim y \Leftrightarrow y \sim x)$ für alle $x, y \in X$; *transitiv*, falls $(x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z)$ für alle $x, y, z \in X$. Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt *Äquivalenzrelation*.

Für $m \in \mathbb{N}$ werde auf $\mathbb{Z}$ die folgende Relation definiert:

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b = km \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Zu $a \in \mathbb{Z}$ erklären wir die Menge $\bar{a} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \sim a\}$. Weiterhin sei $\mathbb{Z}_m := \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Auf $\mathbb{Z}_m$ erklären wir die Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ gemäß

$$\bar{a} \oplus \bar{b} := \overline{a+b}, \;\; \bar{a} \odot \bar{b} := \overline{a \cdot b}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Die Operationen $\oplus$ und $\odot$ sind wohl definiert, d.h. die Definitionen von $\bar{a} \oplus \bar{b}$ und $\bar{a} \odot \bar{b}$ hängen nicht von der Auswahl der Repräsentanten a und b ab.

(c) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe. (Aus wievielen Elementen besteht diese Gruppe?)

(d) $(\mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{0}\}, \odot)$ genau dann eine kommutative Gruppe ist, wenn m eine Primzahl ist.

Hinweis: Sie könnten das folgende Lemma beweisen und verwenden: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, G' eine Menge mit einer zweistelligen Operation $\circ$ und $f : G \to G'$ eine Abbildung mit $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$. Dann ist $(f(G), \circ)$ eine Gruppe.
Sie dürfen "elementare" Teilbarkeitsaussagen in $\mathbb{Z}$ ohne Beweis verwenden, d.h. etwa: Eine Primzahl teilt ein Produkt genau dann, wenn sie einen der Faktoren teilt.

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/`