Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 6.12.2011
Prof. Dr. Martin Ziegler
Juan Diego Caycedo

Blatt 7

Abgabe bis Mittwoch 14.12. um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei V ein Vektorraum, $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in V$ und

$$U := \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_j a_j = 0 \right\}.$$

Weisen Sie nach, daß U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist. Wann ist $U = \{0\}$?

Aufgabe 2. (4 Punkte)
In dieser Aufgabe sei V jeweils ein Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, daß ein minimales Erzeugendensystem $B \subset V$ eine Basis von V darstellt. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

(b) Sei $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset V$ ein Erzeugendensystem von V und

$$I := \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid b_i \notin \langle b_1, \ldots, b_{i-1} \rangle\}.$$

Zeigen Sie, daß $\{b_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V darstellt. Gilt eine entsprechende Aussage auch dann noch, wenn ein Erzeugendensystem $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset V$ vorgegeben ist?

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \,\middle|\, \sum_{i \in \mathbb{N}} f(i) = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$$

zusammen mit den auf $\mathcal{F}$ eingeschränkten Verknüpfungen von $R^{(\mathbb{N})}$ einen Untervektorraum von $R^{(\mathbb{N})}$ bildet. Bestimmen Sie eine Basis dieses Untervektorraumes.

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Es sei V ein Vektorraum mit $\dim V = n$.

(a) Zeigen Sie, daß es eine Kette $\{o\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ von Untervektorräumen von V gibt mit $\dim V_i = i$, $i \in \{0, \ldots, n\}$. Läßt sich diese Kette noch verfeinern, d.h. gibt es ein $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ und einen Untervektorraum W von V mit $V_i \subsetneq W \subsetneq V_{i+1}$?

(b) Sei nun $\{o\} = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \ldots \subsetneq W_m = V$ eine beliebige Kette von Untervektorräumen von V, die sich nicht weiter verfeinern läßt. Zeigen Sie, daß dann $m = n$ und $\dim W_i = i$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$ gilt.

(c) Wie unter (a) sei $\{o\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ gewählt, und ferner setzen wir $E_i := \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$, $E_0 := \{o\}$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Geben Sie einen Vektorraumisomorphismus $f : V \to \mathbb{R}^n$ an, der $f(V_i) = E_i$ erfüllt.

(d) Beschreiben Sie die folgende Menge $\mathcal{OD}$ von Matrizen auf einfache Weise

$$\mathcal{OD} := \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \{0, \ldots, n\} : \quad f_A(E_i) \subset E_i\}.$$

Nicht abzugeben

Aufgabe 5.
Es sei V ein Vektorraum und $S \subset T \subset V$. Begründen Sie folgenden Aussagen:

(a) Ist S eine Menge linear abhängiger Vektoren, so auch T.

(b) Ist S eine Menge linear abhängiger Vektoren, so gibt es eine endliche Teilmenge S_0 linear abhängiger Vektoren von S.

Aufgabe 6.
Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$.

(a) Beschreiben Sie alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$, so daß die Menge von Vektoren $\{x, e_2, \ldots, e_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ darstellt.

(b) Bestimmen Sie nun alle Vektoren $y \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ auch $\{e_1, \ldots, e_{i-1}, y, e_{i+1}, \ldots, e_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ darstellt.

[0] http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/