Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 13.12.2011
Prof. Dr. Martin Ziegler
Juan Diego Caycedo

Blatt 8

Abgabe bis Mittwoch 21.12. um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

(a) Zeigen Sie: Falls U ein Unterraum von V ist und $U \neq V$, dann gilt $\dim U < \dim V$.

(b) Seien U und U' Unterräume von V. Zeigen Sie: U und U' sind genau dann unabhängig, wenn folgendes gilt: für alle $u \in U$ und $u' \in U'$, wenn $u + u' = 0$ dann $u = u' = 0$.
(Zur Erinnerung: U und U' heißen *unabhängig*, falls $U \cap U' = \{0\}$.)

(c) Seien U, U', U'' Unterräume von V so daß U' und U'' zwei Komplementen von U sind. Zeigen Sie, daß für jedes $u' \in U'$, es genau ein $u'' \in U''$ gibt mit $u' - u'' \in U$. Zeigen Sie weiter, daß die Abbildung $f : U' \to U''$ definiert durch $f(u') = u'' \iff u' - u'' \in U$ ein Isomorphismus ist.
(Man nennt f *der kanonische Isomorphismus* von U' nach U'' bzgl. U.)

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Es seien U_1, U_2 die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \langle (1,0,0,0), (2,1,0,0), (-1,1,2,1) \rangle, \\ U_2 &:= \langle (1,0,4,0), (1,1,2,1), (1,2,0,2) \rangle. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$, ergänzen Sie diese zu einer Basis von U_1 bzw. zu einer Basis von U_2, und bestätigen Sie dann anhand dieses Beispiels die Dimensionsformel von Satz 2.4.9.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Es sei $U = \langle (1,0,2,1), (2,1,3,-1) \rangle$, $U' = \langle (1,0,0,2), (2,0,1,0) \rangle$ und $U'' = \langle (-1,0,1,1), (0,2,1,3) \rangle$.

(a) Zeigen Sie, daß U' und U'' zwei Komplemente von U in $\mathbb{R}^4$ sind.

(b) Weiter sei $f : U' \to U''$, definiert durch $f(u') = u'' \iff u' - u'' \in U$ (sehe Aufgabe 1). Bestimmen Sie die f bzgl. der Basen $B' = ((1,0,0,2), (2,0,1,0))$ von U' und $B'' = ((-1,0,1,1), (0,2,1,3))$ von U'' zugeordnete Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $L(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 3\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3$. Weiterhin sei $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : L(x) = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\mathbb{R}^3/E \xrightarrow{\bar{L}} \mathbb{R}$ mit $a + E \mapsto L(a)$ eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung aus (a) ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 5. (nicht abzugeben)
Es sei

$$E = \{(1,0,1,0), (-3,0,-3,0), (-3,8,13,6), (9,-4,2,-3), (1,4,8,3)\}$$

und U der von E erzeugte Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie alle Teilmengen von E, die Basen von U sind.

[0] http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/