Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra 1** (WS 11/12) 17.12.2011
Prof. Dr. Martin Ziegler
Juan Diego Caycedo

Blatt 9

Abgabe bis Mittwoch 11.1.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Seien V und W Vektorräume und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann injektiv, wenn es eine lineare Abbildung $g : W \to V$ gibt, so daß $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

(b) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine lineare Abbildung $g : W \to V$ gibt, so daß $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Es sei $n \geq 1$ und φ ein Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ji} e_j \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

und geeignete $\alpha_{ji} \in \mathbb{R}$, wenn $(e_1, \ldots, e_n)$ wie üblich die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. (Die Summe über die leere Indexmenge werde als der Nullvektor gedeutet.) Zeigen Sie:

$$\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n} = 0.$$

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und φ ein Endomorphismus von V. Die Abbildung φ erfülle $\varphi \circ \varphi = \varphi$ auf V. Zeigen Sie, daß dann gilt:

(a) $\varphi|_{\mathrm{Bild}(\varphi)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Bild}(\varphi)}$.

(b) $V = \mathrm{Bild}(\varphi) + \mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) \cap \mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$.

Gilt (a) für beliebige Endomorphismen? Ergibt sich umgekehrt aus (b), daß φ die Bedingung $\varphi \circ \varphi = \varphi$ erfüllt?

Aufgabe 4. (4 Punkte)

(a) Es sei $(A, \circ)$ eine assoziative $\mathbb{R}$-Algebra mit Einselement $\mathbf{1}$ der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: A ist isomorph zu einer Unteralgebra von $M_n(\mathbb{R})$.
Hinweis: Fixieren Sie eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ und ordnen Sie jedem $a \in A$ die Matrix der linearen Abbildung $x \mapsto ax$ zu.

(b) Es sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, daß die Abbildung $\phi : \mathbb{C} \to M$, die definiert wird gemäß

$$\phi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, ein Isomorphismus von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ auf $(\mathrm{M}, +, \cdot)$ ist, d.h. eine bijektive Abbildung mit

(i) $\phi((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)) = \phi(a_1 + b_1 i) + \phi(a_2 + b_2 i)$,

(ii) $\phi((a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)) = \phi(a_1 + b_1 i)\phi(a_2 + b_2 i)$

für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.
(Welchen komplexen Zahlen werden von ϕ eine Drehmatrix zugeordnet?)

Nicht abzugeben

Aufgabe 5.
Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ werde festgelegt durch die Forderungen

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f(e_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ sei. Bestimmen Sie $\dim \mathrm{Kern}(f)$, $\dim \mathrm{Bild}(f)$, und ermitteln Sie $f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}\right)$ sowie $f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ als Nebenklassen bezüglich $\mathrm{Kern}(f)$. Bilden diese beiden Elemente von $V/\mathrm{Kern}(f)$ eine Basis des Vektorraumes $V/\mathrm{Kern}(f)$? Geben Sie ferner eine Basis a_1, a_2, a_3 des $\mathbb{R}^3$ an mit $a_1 \in \mathrm{Kern}(f)$.

Aufgabe 6.
Weisen Sie nach, daß der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zusammen mit dem üblichen Vektorprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto x \times y$ eine (nicht-assoziative) Algebra darstellt, in der für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt

(i) $a \times b = -b \times a$ (Anti-Kommutativität).

(ii) $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = o$ (Jakobi-Identität).

[Eine Algebra, in der (i) und (ii) erfüllt sind, nennt man eine Lie-Algebra.]

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ws11_la1/`