Probeklausur zur Vorlesung: Lineare Algebra 1

WS 2011-2012

Geben Sie am Ende Der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts ab. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Viel Erfolg!

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Geburtsort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte maximal	6	6	8	6	5	4	5	40
Punkte erreicht								

Aufgabe 1. *(6 Punkte)*
Bringen Sie mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen das folgende lineare Gleichungssystem G_a, $a = (a_1, \ldots, a_4) \in \mathbb{R}^4$ für $a = (1, 0, 2, 3)$ und für $a = (2, 1, 1, 0)$ auf Normalform, und ermitteln Sie in diesen beiden Fällen jeweils die Lösungsmenge.

$$G_a : \quad \begin{array}{rcrcrcrcl} 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & a_1 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & a_2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & = & a_3 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & & & = & a_4 \end{array}$$

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie A als Produkt von Elementarmatrizen dar.

b) Bestimmen Sie die zu B inverse Matrix B^{-1}.

c) Bestimmen Sie $\mathrm{Spur}(AB)$ und $\det(AB)$.

Aufgabe 3. *(8 Punkte)*
Es seien die Vektoren des $\mathbb{R}^2$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, daß $B = (a, b)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Geben Sie alle anderen Teilmengen von $\{a, b, c\}$ an, die Basen des $\mathbb{R}^2$ sind.

c) Stellen Sie den Vektor $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B dar.

d) Die linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

und

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2.$$

Welche Matrix wird φ bezüglich B als Basis des Urbildraums (und (1) als Basis des Bildraums) zugeordnet?

Aufgabe 4. *(6 Punkte)*
Es seien die Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Dimension des von a, b und c aufgespannten Unterraums U des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie eine Basis von U an.

b) Berechnen Sie den von den Geraden $g = \mathbb{R}a$ und $h = \mathbb{R}b$ eingeschlossenen Winkel.

c) Berechnen Sie den Abstand der Punkte $(0, -2, 1)$ und $(1, -1, 3)$.

Aufgabe 5. *(5 Punkte)*

a) Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bewirke eine Drehung um $\frac{\pi}{3}$ im Uhrzeigersinn. Geben Sie die φ (bezüglich der Standardbasis) zugeordnete Matrix an.

b) Es sei $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i) \in \mathbb{C}$ und $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $\psi(z) = \alpha \cdot z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weiter sei $\overline{\psi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\overline{\psi}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \iff c + di = \psi(a + bi).$$

Begründen Sie, daß $\overline{\psi}$ eine lineare Abbildung ist. Welche Matrix wird $\overline{\psi}$ bezüglich der Standardbasis zugeordnet? Was bewirkt die Abbildung $\overline{\psi}$?

Aufgabe 6. *(4 Punkte)*
Gegeben seien zwei Permutationen:

$$\pi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \pi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\operatorname{sign}(\pi_1)$ und $\operatorname{sign}(\pi_2)$.

Aufgabe 7. *(5 Punkte)*
Gegeben sei die Matrix $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ durch

$$M = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Weisen Sie nach, daß die zugehörige lineare Abbildung $f_M \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ diagonalisierbar ist. Geben Sie ferner eine reguläre Matrix $S \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ an, so daß $S^{-1}MS$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie $S^{-1}MS$.