Blatt 1

Wir arbeiten in **BG**. $A, B, X, Y \ldots$ stehen für Klassen, $a, b, x, y, \ldots$ für Mengen. Wir definieren:

$$\begin{aligned} F \text{ ist } n\text{-stellige Operation } :\leftrightarrow\ & \forall x_1 \ldots x_n \exists^{=1} y\, ((x_1, \ldots, x_n), y) \in F \\ & \wedge \forall x \in F\, \exists x_1 \ldots x_n y\, x = ((x_1, \ldots, x_n), y). \end{aligned}$$

Offenbar ist eine 1-stellige Operation das gleiche als ein Funktional.

1. a) Es gibt eine 1-stellige Operation D mit

$$\forall x\, (x \text{ ist Relation } \rightarrow \mathrm{D}(x) = \{u \mid \exists v\, (u, v) \in x\}).$$

Es gibt eine 1-stellige Operation Wb mit

$$\forall x\, (x \text{ ist Relation } \rightarrow \mathrm{Wb}(x) = \{v \mid \exists u\, (u, v) \in x\}).$$

b) Es gibt eine 2-stellige Operation $\restriction$ mit

$$\big(F \text{ ist Funktional } \wedge x \subseteq \mathrm{D}(f)\big) \rightarrow \big((f \restriction x) \text{ ist Funktional } \wedge \mathrm{D}(f \restriction x) = x \wedge \forall u \in x\, f(u) = (f \restriction x)(u).\big)$$

2. Für eine Funktion f mit $\mathrm{D}(f) = I$ sei

$$(f(\iota))_{\iota \in I}$$

eine andere Schreibweise für f ("Familienschreibweise").

Zeige, daß es eine 1-stellige Operation X gibt mit (wir schreiben $\mathsf{X}x$ für $\mathsf{X}(x)$):

f ist Funktional $\rightarrow \mathsf{X}f = \{g \mid g \text{ ist Funktional } \wedge \mathrm{D}(g) = \mathrm{D}(f) \wedge \forall u \in \mathrm{D}(g) g(u) \in f(u)\}$.

Man nennt $\mathsf{X}f$ das *direkte Produkt* von f. Wenn $f = \mathrm{id}_a$, nennt man $\mathsf{X}f$ das *direkte Produkt* von a.

Falls $\mathrm{D}(f)$ aus zwei Elementen x und y besteht, gebe man eine Bijektion von $f(x) \times f(y)$ auf $\mathsf{X}f$ an.

3. Sei $\mathfrak{P}_\omega(\mathbb{N})$ die Menge aller endlichen Mengen von natrlichen Zahlen und $x \mapsto \lceil x \rceil$ eine Bijektion zwischen $\mathfrak{P}_\omega(\mathbb{N})$ und $\mathbb{N}$, der Menge der natrlichen Zahlen. Zum Beispiel sei $\lceil\rceil$ gegeben durch

$$\lceil \{n_1, \ldots n_k\} \rceil = \sum_i 2^{n_i}.$$

Die echten Klassen des Modells $\mathfrak{M}$ seien die unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und die Mengen von $\mathfrak{M}$ die Elemente von $\mathbb{N}$. Die Elementbeziehung E sei zwischen Mengen und echten Klassen die natrliche und zwischen Mengen und Mengen definiert durch

$$x E \lceil \{n_1, \ldots n_k\} \rceil \iff x \in \{n_1, \ldots n_k\}.$$

Dann ist $\mathfrak{M}$ ein Modell aller bisherigen Axiome mit mglicher Ausnahme des Fundierungsaxioms. Das Fundierungsaxiom gilt, wenn $n_i < \lceil \{n_1, \ldots n_k\} \rceil$.

4. Zeige, daß folgende Aussagen zum Auswahlaxiom äquivalent sind:

   (i) Jede Äquivalenzrelation, die eine Menge ist, hat ein Repräsentantensystem.

   (ii) Auf jeder Potenzmenge gibt es eine Auswahlfunktion.

   (iii) Das direkte Produkt einer Menge von nichtleeren Mengen ist nichtleer.