Blatt 10

Aufgabe 1. Sei κ eine meßbare Kardinalzahl und sei $\mathbb{U}$ ein normaler Ultrafilter auf κ. Man zeige:

1. Jede Menge in $\mathbb{U}$ ist stationär. [*Hinweis:* Wende Aufgabe 1 von Blatt 9 an.]
2. Sei $\lambda < \kappa$ eine reguläre Kardinalzahl und $E_\lambda = \{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\}$. Die Menge E_λ ist dann nicht in $\mathbb{U}$. [*Hinweis:* Man nehme an, $E_\lambda \in \mathbb{U}$. Für jedes $\alpha \in E_\lambda$, sei $\{x_{\alpha\xi} : \xi < \lambda\}$ eine aufsteigende Folge mit Supremum α. Für jedes $\xi < \lambda$, existieren y_ξ und $A_\xi \in \mathbb{U}$ so dass $x_{\alpha\xi} = y_\xi$ für alle $\alpha \in A_\xi$. Sei $A = \bigcap_{\xi<\lambda} A_\xi$. Dann ist A in $\mathbb{U}$, aber A enthält nur ein Element, nämlich $\sup\{y_\xi : \xi < \lambda\}$; ein Widerspruch.]
3. Die Menge aller regulären Kardinalzahlen $< \kappa$ ist in $\mathbb{U}$. [*Hinweis:* Wenn nicht, dann ist die Menge $S = \{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) < \alpha\}$ in $\mathbb{U}$, und, weil cf regressiv ist, existiert dann ein $\lambda < \kappa$ so dass $\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\} \in \mathbb{U}$, ein Widerspruch.]
4. κ ist Mahlo. (Also, nach Satz 13.6, jede meßbare Kardinalzahl ist Mahlo.) [*Hinweis:* Aus Teilen 1 und 3, ist die Menge aller regulären Kardinalzahlen $< \kappa$ stationär in κ. Um zu zeigen, dass dies genügt, zeige, dass die Menge aller starke Limeskardinalzahlen $< \kappa$ bilden ein club.]

Aufgabe 2. Zeige in ZC, daß das Ersetzungsaxiom genau dann gilt, wenn je endlich viele Formeln von beliebig großen Mengen reflektiert werden (das heißt, daß jede Menge in einer Menge enthalten ist, die diese Formeln reflektiert).

Aufgabe 3. Beweise Lemma 14.5 vom Skript.

Aufgabe 4. Man zeige: wenn das in der Übung 1.1 vom Skript (Aufgabe 3 von Blatt 1) definierte Modell fundiert ist, ist es isomorph zu V_ω.