Blatt 11

Aufgabe 1. Man zeige: für jedes $\alpha \in \mathrm{On}$,

1. $\mathrm{L}_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$,
2. der Rang von L_α ist α.

Aufgabe 2. Sei E die Menge aller geraden naturlichen Zahlen. Man zeige, $E \in \mathrm{L}_{\omega+1}$.

Aufgabe 3. Sei F ein Funktional, das durch eine Formel ohne Parameter gegeben wird und das eine *elemetare Abbildung* von V nach V definiert, d.h. für alle Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ (ohne Parameter) und alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{V}$,

$$\phi(a_1, \ldots, a_n) \iff \phi(F(a_1), \ldots, F(a_n)).$$

Zeige, dass F die Identität sein muss.

Aufgabe 4. Eine Menge der Form

$$\{a \in \mathrm{V}_{\alpha_0} \mid \mathrm{V}_{\alpha_0} \models \phi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\},$$

mit einer Formel ϕ und Ordinalzahlparametern α_i aus V_{α_0} heißt *ordinaldefinierbar*. OD sei die Klasse der ordinaldefinierbaren Mengen,

$$\mathrm{HOD} = \{a \mid \mathrm{th}(a) \subset \mathrm{OD}\}$$

die Klasse der *erblich* (hereditär) ordinaldefinierbaren Mengen. Man zeige

1. Eine *Menge* der Form $\{a \mid \phi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$ ist ordinaldefinierbar.
2. HOD ist ein Modell von ZF.