Übungen zur Vorlesung **Mengenlehre** (WS 2013/14) 29.10.2013

Blatt 2

Aufgabe 1.

1. Jede Wohlordnung $\bar{u}$ läßt sich um ein Element verlängern: Wähle ein Element a, das nicht zu u gehört (z.B. u). $\bar{v} =< v, s >$, wobei $v = u \cup \{a\}$ und $s = r \cup (u \times \{a\})$, ist dann wieder eine Wohlordnung. u ist ein Anfangsstück von v.

2. Sei $(\bar{u}_i \mid i \in I)$, $\bar{u}_i =< u_i, r_i >$, eine Familie von Wohlordnungen, die Anfangsstücke voneinander sind, d.h. daß für alle i, j aus I $\bar{u}_i$ ein Anfangsstück von $\bar{u}_j$ oder $\bar{u}_j$ ein Anfangsstück von $\bar{u}_i$ ist. Dann ist die Vereinigung der u_i mit der Vereinigung der r_i eine wohlgeordnete Klasse. Die $\bar{u}_i$ sind Anfangsstücke dieser Wohlordnung.

Aufgabe 2. Sei

$$\mathrm{Seq}_\omega(x) := \bigcup \{{}^i x : i \in \omega\}$$

und

$$\mathfrak{P}_\omega(x) := \bigcup \big\{ \{u \in \mathfrak{P}(x) : |u| = i\} \ : \ i \in \omega \big\} = \{u \in \mathfrak{P}(x) : |u| \in \omega\}.$$

x heißt *(wohl-)ordenbar*, wenn es ein r gibt, so daß (x, r) eine (Wohl-)Ordnung ist.

1. Sind x, y (wohl-)ordenbar, dann ist $x \times y$ (wohl-)ordenbar.

2. Ist x (wohl-)ordenbar, dann ist $\mathrm{Seq}_\omega(x)$ (wohl-)ordenbar.
   Ist x (wohl-)ordenbar, dann ist $\mathfrak{P}_\omega(x)$ (wohl-)ordenbar.

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum und A eine Teilmenge von V. Weiterhin sei $<$ eine Wohlordnung auf A mit der Eigenschaft, dass für alle $y \in A$ gilt

$$y \notin \langle A_y \rangle.$$

Hierbei bezeichne A_y die Menge der Vorgänger von y in A und $\langle A_y \rangle$ den von A_y erzeugten Unterraum. Man zeige: A ist linear unabhängig.

Aufgabe 4.

1. Seien $\mathcal{A} = (A, <^A)$ und $\mathcal{B} = (B, <^B)$ Wohlordnungen. Man zeige, dass nicht zugleich $\mathcal{A}$ zu einem echten Anfangsstück von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}$ zu einem echten Anfangsstück von $\mathcal{A}$ isomorph sein können.

2. Finden Sie ein Beispiel von zwei *lineare* Ordnungen, die nicht zu einander isomorph sind und so dass jede zu einem Anfangsstück der andere isomorph ist.