Übungen zur Vorlesung **Mengenlehre** (WS 2013/14) 4.11.2013

Blatt 3

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Zu jeder Ordinalzahl gibt es eine größere Limeszahl, die Supremum von kleineren Limeszahlen ist.

Aufgabe 2.

1. Zeigen Sie: x transitiv $\Leftrightarrow \mathfrak{P}(x)$ transitiv
2. Gilt: x transitiv $\Rightarrow \in\restriction x$ transitive Relation?
3. Gilt: $\in\restriction x$ transitive Relation $\Rightarrow x$ transitiv?

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

1. Zu jedem x gibt es ein y mit $x \subseteq y$ und y transitiv.
2. Durch $(x) := \bigcap\{y \mid y \supseteq x \wedge y \text{ transitiv}\}$ wird eine Operation definiert, die x auf die kleinste transitive Obermenge von x, die sogenannte *transitive Hülle* von x, abbildet.

Aufgabe 4. F sei eine *normale Operation*, d.h. eine 1-stellige Operation, die Ordinalzahlen auf Ordinalzahlen abbildet und für die gilt:

i. F ist *echt monoton*, d.h. $\alpha < \beta \Rightarrow F(\alpha) < F(\beta)$.

ii. F ist *stetig*, d.h. Limeszahl $\delta \Rightarrow F(\delta) = \bigcup\{F(\beta) \mid \beta < \delta\}$.

Zeige:

1. $\forall\alpha\exists\beta \geq \alpha : F(\beta) = \beta \quad$ (β heißt ein *Fixpunkt* von F.)
2. Es gibt eine normale Operation, deren Bilder auf den Ordinalzahlen gerade die Fixpunkte von F sind.