Blatt 4

Aufgabe 1. Finden Sie das kleinste $\xi \in \mathrm{On}$ so dass

1. $\omega + \xi = \xi$.
2. $\omega \cdot \xi = \xi$, $\xi \neq 0$.
3. $\omega^{\xi} = \xi$.

Aufgabe 2. Gegeben $\gamma \in \mathrm{On}$, sei

$$N_\gamma := |\{\beta \in \mathrm{On} \ : \ \exists \alpha \ \alpha + \beta = \gamma\}|.$$

Zeigen Sie, dass N_γ endlich ist.

Hinweis: Sei

$$\gamma = \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{\beta_i} \cdot k_i,$$

wobei $\beta_0 < \cdots < \beta_{n-1}$ und $0 < k_i < \omega$ für jedes i, die Cantorsche Normalform von γ. Zeigen Sie: $N_\gamma = \sum_{i=0}^{n-1} k_i + 1$.

Aufgabe 3 (Rekursionssatz für fundierte Klassen)**.** Sei R eine *fundierte Relation* auf U. Das heißt

1. R ist vorgängerklein: Für alle $a \in U$ ist $U_{(a)} = \{b \in U \mid bRa\}$ eine Menge.
2. Jede nicht–leere Teilklasse A von U enthält ein R–minimales Element a. D.h. ein a mit $A \cap U_{(a)} = \emptyset$.

Man zeige: Dann gibt es für jedes auf Vdefinierte Funktional G genau ein Funktional $F : U \longrightarrow V$ mit $F(a) = G(F \restriction U_{(a)})$ für alle $a \in U$.

Hinweis: Zeige durch "Induktion", daß es für alle $a \in U$ eine eindeutig bestimmte Funktion $f : u \to V$ gibt mit folgenden Eigenschaften: 1. u is die kleinste Teilmenge von U, die a enthält und vorgängerabgeschlossen ist, 2. f erfüllt die Rekursionsgleichung.

Aufgabe 4. Sei R eine zweistellige Relation R auf der Klasse A. Man zeige: R ist genau dann fundiert, wenn es ein Funktional $r : A \longrightarrow \mathrm{On}$ mit

$$aRb \Longrightarrow r(a) < r(b)$$

gibt. Wenn R fundiert ist, kann man r außerdem so wählen, daß $r(b) = \sup\{r(a) + 1 \mid aRb\}$. r ist dadurch eindeutig bestimmt und heißt der *Fundierungsrang.* $\in$ ist fundiert auf V. Der entsprechende Fundierungsrang von x heißt der *Rang* $\mathrm{rang}(x)$ von x.