Blatt 5

Aufgabe 1. Zeige, daß sich das transitive Hülle Funktional $\mathrm{th} : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ rekursiv durch

$$\mathrm{th}(x) = x \cup \bigcup_{y \in x} \mathrm{th}(y)$$

definieren läßt. (Eine solche Definition ist natürlich nur sinnvoll, wenn das Fundierungsaxiom gilt.)

Aufgabe 2. Das Fundierungsaxiom sei hier nicht vorausgesetzt. Man zeige:

1. Für eine Menge a sind äquivalent
   (a) Es gibt keine unendliche $\in$–Kette, die bei a beginnt.
   (b) $\mathrm{th}(a)$ ist fundiert. D.h. jede nicht–leere Teilmenge von $\mathrm{th}(a)$ hat ein $\in$–minimales Element.
2. Die Klasse aller Mengen, deren transitive Hülle fundiert ist, ist ein Modell von ZFC *inklusive* Fundierung.

Aufgabe 3. Man zeige: der Rang von x ist das kleinste α mit $x \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$.

Aufgabe 4. Hier setzen wir das Fundierungsaxiom nicht voraus. Man zeige:

1. Die Elemente von $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathrm{V}_\alpha$ sind genau die Mengen, deren transitive Hülle fundiert ist.
2. Satz 5.7 (d.h. $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathrm{V}_\alpha$) impliziert das Fundierungsaxiom.