Blatt 6

Aufgabe 1. Man zeige: $|\alpha^\beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, wenn $\alpha > 1$, $\beta > 0$ und nicht beide Ordinalzahlen endlich sind.

Aufgabe 2. Man zeige: aus GCH folgt für unendliche κ

$$\kappa^\mu = \begin{cases} \kappa, & \text{wenn} \quad 0 < \mu < \mathrm{cf}\,(\kappa) \\ \kappa^+, & \text{wenn} \quad \mathrm{cf}\,(\kappa) \leq \mu \leq \kappa \\ \mu^+, & \text{wenn} \quad \kappa \leq \mu \end{cases}$$

Aufgabe 3. Sei V ein d-dimensionaler K-Vektorraum. Zeige, daß wenn d unendlich ist, die Dimension des Dualraum V^* ist $|K|^d$.

Aufgabe 4. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl mit überabzählbarer Kofinalität.

Für eine Teilmenge A von κ definiere $A^{(\alpha)}$ durch Rekursion über α: $A^{(0)} = A$, $A^{(\alpha+1)} = \left(A^{(\alpha)}\right)'$ und $A^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha<\lambda} A^{(\alpha)}$ für Limeszahlen λ.

(Zur Erinnerung, die Menge B' der *Häufungspunkte* einer Teilmenge B von κ ist definiert durch $B' := \{\alpha < \kappa \mid \alpha = \sup(\alpha \cap B)\}$.)

Zeige, daß $\kappa^{(\alpha)} = \{\omega^\alpha \beta \mid \beta < \kappa\}$ für alle $\alpha < \kappa$. (In ω^α verwenden wir Ordinalzahlexponentation.)