Übungen zur Vorlesung **Mengenlehre** (WS 2013/14) 2.12.2013

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei κ regulär und überabzählbar. Zeigen Sie im Detail die Unbeschränktheit des Diagonaldurchschnitts einer Familie $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von clubs in κ.

Aufgabe 2. Für Teilmengen A, B von κ sei $A \equiv B$, wenn $A \cap C = B \cap C$ für einen club C.

Zeigen Sie:

1. $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(\kappa)$.
2. In den Relationen $A \cap B \equiv E$, $A \cup B \equiv E$ und $\kappa \setminus A \equiv B$ kann man A, B, E durch äquivalente Mengen ersetzen. Also wird $\mathfrak{P}(\kappa)/\equiv$ dadurch zu einer Booleschen Algebra.
3. Der Diagonaldurchschnitt D einer Familie (A_α) ist bis auf $\equiv$ charakterisiert durch
    (a) $(D/\equiv) \subset (A_\alpha/\equiv)$ für alle α
    (b) Aus $(E/\equiv) \subset (A_\alpha/\equiv)$ für alle α folgt $(E/\equiv) \subset (D/\equiv)$.
4. Der Diagonaldurchschnitt hängt also bis auf $\equiv$ nur von der Menge $\{A_\alpha/\equiv \mid \alpha < \kappa\}$ ab, er ist das Infimum der $A_\alpha/\equiv$ in der Booleschen Algebra $\mathfrak{P}(\kappa)/\equiv$.

Aufgabe 3. Sei λ eine reguläre, überabzählbare Kardinalzahl. $\alpha \mapsto \kappa_\alpha$ sei eine Normalfunktion von λ nach Card mit Supremum κ. Wir nehmen an, daß $\lambda < \kappa = 2^{\overset{\kappa}{\smile}}$. Weiter seien für alle α aus einer stationären Teilmenge S_0 von λ Mengen A_α von höchstens der Mächtigkeit κ_α^{++} gegeben. Man zeige: dann hat jede fast disjunkte Teilmenge von $\prod_{\alpha\in S_0} A_\alpha$ höchstens die Mächtigkeit κ^{++}.

Aufgabe 4. Sei κ eine singuläre Kardinalzahl von überabzählbarer Kofinalität. Man zeige: wenn $2^\mu = \mu^{++}$ für eine stationäre Menge von Kardinalzahlen μ unterhalb von κ, dann ist auch $2^\kappa \leq \kappa^{++}$.