4. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Donnerstag, den 22.11.2012 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Zeigen Sie

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right).$$

(b) Wenn eine Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Eigenschaften

(i) $F(ax+by) = aF(x) + bF(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$

(ii) $\|F(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

hat, dann gilt auch

$$\langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 2:
Beweisen Sie, dass in den komplexen Zahlen das Assoziativgesetz für die Addition und Multiplikation, das Kommutativgesetz für die Multiplikation und das Distributivgesetz gelten. Das heißt, es gilt

(a) $((a,b) + (c,d)) + (e,f) = (a,b) + ((c,d) + (e,f))$,

(b) $((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f) = (a,b) \cdot ((c,d) \cdot (e,f))$,

(c) $(a,b) \cdot (c,d) = (c,d) \cdot (a,b)$,

(d) $((a,b) + (c,d)) \cdot (e,f) = (a,b) \cdot (e,f) + (c,d) \cdot (e,f)$.

Aufgabe 3: Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: die Gleichung $(a + b\,i)^2 = c + d\,i$ ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = c, \\ \quad 2ab & = d. \end{cases} \tag{1}$$

(b) Gegeben seien c und d. Finden Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, die das Gleichungssystem (1) lösen. Wieviele Lösungen gibt es?

Acthung: Bei der Lösung des Gleichungssystem (1) *sind mehrmals Quadratwurzeln zu ziehen. Achten Sie dabei genau auf die Vorzeichen.*

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie
$$1 + z + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

(b) Zeigen Sie: Für $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ mit $\theta \in (0, 2\pi)$ folgt aus (a), dass
$$1 + z + \ldots + z^n = \frac{(z^{n+1} - 1)(\bar{z} - 1)}{2 - 2\cos(\theta)}.$$

(c) Leiten Sie aus (b) Formeln her für
$$\sin(\theta) + \ldots + \sin(n\theta)$$
und
$$1 + \cos(\theta) + \ldots + \cos(n\theta).$$