# 6. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Abgabe: Donnerstag, den 06.12.2012 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.*

**Aufgabe 1:** Sei $(G, \star)$ eine Gruppe, und sei $e$ ihr neutrales Element. Zeigen Sie:

(a) $e^{-1} = e$,

(b) $(g^{-1})^{-1} = g$ für alle $g \in G$,

(c) $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ für alle $g, h \in G$.

**Aufgabe 2:** Sei $u \in \mathbb{R}^3$ mit $u \neq (0,0,0)$, und sei $q \in \mathbb{H} \setminus \{\pm 1\}$ mit $|q| = 1$. Sei $F_{u,q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F_{u,q}(w) = u + qw\bar{q}$.

(a) Finden Sie alle Paare $(\theta, v)$ mit $\theta \in [0, 2\pi)$ und $v \in \mathbb{R}^3$, $\|v\| = 1$, so dass $q = (\cos(\theta), \sin(\theta)v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

(b) Sei jetzt $q = (\cos(\theta), \sin(\theta)v)$ wie in (a). Wir schreiben $u = \langle u, v \rangle v + (u - \langle u, v \rangle v)$. Es seien $R_{u,q}$ und $T_{u,q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$R_{u,q}(w) = (u - \langle u, v \rangle v) + qw\bar{q} \quad \text{und} \quad T_{u,q}(w) = w + \langle u, v \rangle v.$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$F_{u,q} = T_{u,q} \circ R_{u,q} = R_{u,q} \circ T_{u,q}.$$

(c) Bestimmen Sie einen Punkt $w_0 \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$\left\{\, w \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; R_{u,q}(w) = w \,\right\} = \left\{\, w_0 + tv \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \,\right\}.$$

(d) Interpretieren Sie die Abbildung $F_{u,q}$ geometrisch anhand von (b) und (c).

**Aufgabe 3:** Seien die Menge

$$A = \{1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad B = \{1, \dots, m\}.$$

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine injektive Abbildung $F : A \to B$ genau dann wenn $n \leq m$.

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine surjektive Abbildung $F : A \to B$ genau dann wenn $n \geq m$.

(c) Sei $M$ eine endliche Menge. Zeigen Sie: Eine Abbildung $F : M \to M$ ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.

(d) Sei $M$ eine unendliche Menge. Ist die Aussage in (c) noch wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 4:** Sei $M$ eine endliche Menge mit $\#M \geq 3$, und sei $(\mathrm{Aut}(M), \circ)$ die Gruppe der Automorphismen von $M$ aus Beispiel 2.5 der Vorlesung. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(M)$ nicht kommutativ ist. Betrachten Sie zunächst den Fall $\#M = 3$.