7. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Donnerstag, den 13.12.2012 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Seien $r, s \in \mathbb{Z}$ so dass $rm + sn = 1$.

(a) Zeigen Sie: die Abbildung $f : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ mit

$$f([x],[y]) = [yrm + xsn]$$

ist eine Bijektion.

(b) Finden Sie die Inverse f^{-1}.

(c) Zeigen Sie: $((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), +)$ ist eine Gruppe, wobei

$$([x_1],[y_1]) + ([x_2],[y_2]) \overset{\text{def}}{=} ([x_1 + x_2],[y_1 + y_2]) \ .$$

(d) Ist die Abbildung f additiv (L1), das heißt, gilt

$$f(([x_1],[y_1]) + ([x_2],[y_2])) = f([x_1],[y_1]) + f([x_2],[y_2])$$

für alle $([x_1],[y_1]), ([x_2],[y_2]) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: Es sei $(A, +)$ eine Abelsche Gruppe. Zeigen Sie: es gibt genau eine skalare Multiplikation $. : A \times \mathbb{Z} \to A$, so dass $(A, +, .)$ die Axiome (M2) und (M4) erfüllt.

Aufgabe 3: Seien $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $v. \langle u, v \rangle + w. \langle u, w \rangle = u$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\{v, w\}$ bildet eine Basis des $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4: Betrachten Sie $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul. Zeigen Sie:

(a) Jede endliche Teilmenge $E \subset \mathbb{Q}$ mit $\#E \geq 2$ ist linear abhänging.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $E = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Q}$. Dann existiert $b \in \mathbb{Q} \setminus \langle E \rangle$, somit ist $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt.