8. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Abgabe: Donnerstag, den 20.12.2012 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sei M ein $\mathbb{Z}$-Modul. Bestimmen Sie jeweils alle $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen

(a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

(b) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$

(c) $\mathbb{Z} \to M$.

Aufgabe 2:

(a) Zeigen Sie: Die Multiplikation rationaler Zahlen induziert keine Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(b) Sei R ein Ring. Welche zusätzliche Bedingung muss ein Unterring $U \subset R$ erfüllen, so dass

$$\cdot : R/U \times R/U \to R/U$$

wohldefiniert ist?

Aufgabe 3: Sei R ein Ring mit Eins, und sei M ein unitärer Rechts-R-Modul. Sei $E \subset M$ eine Teilmenge. Zeigen Sie:

(a) $\langle E \rangle \subset M$ ist ein Untermodul.

(b) $\langle E \rangle$ ist der kleinste Untermodul $U \subset M$ mit $E \subset U$.

Aufgabe 4: Es sei V ein R-Modul. Seien $U, W \subset V$ zwei Untermoduln.

(a) Zeigen Sie: der Durchschnitt $U \cap W$ ist immer ein Untermodul.

(b) Zeigen Sie: die Vereinigung $U \cup W$ ist nicht unbedingt ein Untermodul.

(c) Unter welchen Bedingungen ist die Vereinigung $U \cup W$ ein Untermodul?