9. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Abgabe: Donnerstag, den 10.01.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG. Sie können für Ihre Lösung bis zu 32 Punkte bekommen, das Soll erhöht sich jedoch nur um 16/3. Somit können Sie bis zu 16 Bonuspunkte erhalten.

Aufgabe 1: Seien M und N Rechts-R-Moduln, $F : M \to N$ linear. Zeigen Sie:

(a) Wenn $U \subset M$ Untermodul ist, ist $F(U) = \{F(u) \mid u \in U\}$ Untermodul.

(b) Wenn $V \subset N$ Untermodul ist, ist $F^{-1}(V) = \{m \in M \mid F(m) \in V\}$ Untermodul.

Aufgabe 2: Es seien M und N Rechts-R-Moduln, $F : M \to N$ linear. Es seien $m_1, \dots, m_k \in M$ und $n_1 = F(m_1), \dots, n_k = F(m_k) \in N$.

(a) Zeigen Sie: Wenn $n_1, \dots, n_k$ linear unabhängig sind, dann sind auch $m_1, \dots, m_k$ linear unabhängig.

(b) Zeigen Sie: Wenn $m_1, \dots, m_k$ das Modul M erzeugen, dann erzeugen $n_1, \dots, n_k$ das Bild im F.

(c) Gilt in (a) beziehungsweise (b) auch „genau dann, wenn“? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3:

(a) Es sei $M = \mathbb{R}^2$. Es seien

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

Unterräume des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Unterräume

$$W \cap (U + V) \quad \text{und} \quad W \cap U + W \cap V \,.$$

(b) Unter welche Bedingung an die Unterräume A, B, C eines Vektorrams gilt

$$C \cap (A + B) = C \cap A + C \cap B \;?$$

Aufgabe 4:
Es sei M ein Rechts-R-Modul und $U, V \subset M$ Untermoduln, so dass $M = U \oplus V$. Seien $A \subset U$ und $B \subset V$ Teilmengen. Zeigen Sie: $A \cup B$ ist Basis von M genau dann, wenn A Basis von U und B Basis von V ist.

Aufgabe 5: Lesen Sie den Rest von Abschnitt 2.4 im Skript und bearbeiten Sie dann eine der beiden folgenden Teilaufgaben:

(a) Zeigen Sie Prop. 2.62 (2). Warum ist die Aussage für eine unendliche Menge I nicht mehr richtig, wenn man $\coprod_{i\in I} M_i$ durch $\prod_{i\in I} M_i$ ersetzt?

(b) Zeigen Sie Prop. 2.62(3). Warum ist die Aussage für eine unendliche Menge I nicht mehr richtig, wenn man $\prod_{i\in I} M_i$ durch $\coprod_{i\in I} M_i$ ersetzt?

Aufgabe 6: Es sei $M = U \oplus V$. Außerdem sei L ein Modul und $f\colon U \to L$, $g\colon V \to L$ seien linear, so dass zu jedem Modul N und linearen Abbildungen $F\colon U \to N$, $G\colon V \to N$ jeweils genau eine lineare Abbildung $H\colon L \to N$ mit $F = H \circ f$ und $G = H \circ g$ existiert. Zeigen Sie mit Hilfe von Proposition 2.60(2):

(a) Es gibt genau eine Abbildung $\Phi\colon M \to L$ mit $f = \Phi \circ \iota_U$ und $g = \Phi \circ \iota_V$.

(b) Es gibt genau eine Abbildung $\Psi\colon L \to M$ mit $\iota_U = \Psi \circ f$ und $\iota_V = \Psi \circ g$.

(c) Es gilt $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$.

(d) Es gilt $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_L$.

(*Hinweis:* Benutzen Sie für (c) die Eindeutigkeitsaussage in Prop. 2.60(2).)

Aufgabe 7: Bitte bilden Sie alle möglichen Matrixprodukte aus den folgenden drei Matrizen und rechnen Sie sie aus.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 100 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 98 & 1 \\ -5 & 7 \\ 12 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8: Betrachten Sie die folgenden komplexen Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $I \cdot I = J \cdot J = K \cdot K = I \cdot J \cdot K = -E$.