10. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Donnerstag, den 17.01.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es seien $A \in M_{l,m}(R)$ und $B \in M_{m,n}(R)$ Matrizen. Zeigen Sie:

(a) Wenn R kommutativ ist, gilt $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

(b) Wenn $R = \mathbb{C}$ oder $R = \mathbb{H}$, gilt $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.

Aufgabe 2: Es seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$ und $\langle v, w \rangle = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = (v, w, v \times w)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

(b) Stellen Sie die Drehung um die Achse durch 0 in Richtung v um den Winkel 2φ aus Satz 1.74 als Matrix dar bezüglich der Basis aus (a).

(c) Stellen Sie dieselbe Abbildung als Matrix dar bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3).

Aufgabe 3: Zeigen Sie

(a) zu jede Zeile $\alpha \in {}^n\mathbb{R} = (\mathbb{R}^n)^*$ gibt es genau eine Spalte $a \in \mathbb{R}^n$, so dass $\langle a, v \rangle = \alpha(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

(b) zu jede linearen Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt es genau eine lineare Abbildung $B\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, so dass $\langle w, A(v) \rangle = \langle B(w), v \rangle$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in R^m$.

(c) Die Abbildung B in (b) wird durch die Matrix $B = A^t$ dargestellt.

Aufgabe 4: Es sei $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Zeigen Sie, dass B eine Orthonormalbasis ist.

(b) Bestimmen Sie den Vektor $v \in \mathbb{R}^4$, der bezüglich B die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat.

(c) Welche Koordinaten hat der Vektor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich B?