# 11. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Abgabe: Donnerstag, den 24.01.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.*

**Aufgabe 1:** Es sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie mit den Methoden aus Abschnitt 3.1:

(a) Sei $r > n$ und $v_1, \dots, v_r \in V$. Dann ist das Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ linear abhängig;

(b) Sei $s < n$ und $w_1, \dots, w_s \in V$. Dann ist das Tupel $(w_1, \dots, w_s)$ kein Erzeugendensystem.

**Aufgabe 2:** Es sei $V$ ein $\Bbbk$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Folgen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

(a) Das Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis;

(b) Das Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ ist maximal linear unabhängig, d.h $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig und $(v_1, \dots, v_n, w)$ ist linear abhängig für alle $w \in V$;

(c) Das Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein Erzeugendensystem und und für kein $i \in \{1, \dots n\}$ ist $(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem.

**Aufgabe 3:** Es sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U, W \subset V$ seien Unterräume. Dann gilt

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

**Aufgabe 4:** Es sei $V$ ein Rechtsvektorraum, $V^*$ der duale Linksvektorraum, und $^*(V^*)$ dessen dualer Rechtsvektorraum. Sei $F\colon V \to {}^*(V^*)$ die Abbildung definiert durch

$$F(v) \in {}^*(V^*) = {}_{\Bbbk}\operatorname{Hom}(V^*, \Bbbk) \qquad \text{mit} \qquad F(v)(\alpha) = \alpha(v) \in \Bbbk$$

Zeigen Sie:

(a) $F$ ist linear;

(b) Wenn $V$ endlichdimensional ist, dann ist $F$ ein Isomorphismus;

(c) Wenn $V$ unendlichdimensional ist, dann ist $F$ injektiv.

*Hinweis:* Benutzen Sie den Basisergänzungssatz aus Bemerkung 3.6.