12. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Donnerstag, den 31.01.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es seien V, W Vektorräume über $\Bbbk$ mit $\dim V = \dim W$. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $F\colon V \to W$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) F ist Isomorphismus,

(b) F ist injektiv,

(c) es existiert $G\colon W \to V$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_V$,

(d) F ist surjektiv,

(e) es existiert $H : W \to V$ mit $F \circ H = \mathrm{id}_W$.

Aufgabe 2: Es seien $A = a + U$ und $B = b + W$ affine Unterräume eines $\Bbbk$-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $A \cap B$ entweder die leere Menge oder ein zu $U \cap W$ paralleler affiner Unterraum ist.

Aufgabe 3: Es seinen Ebenen $E, F \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, x\rangle = -1 \,\} \quad \text{und} \quad F = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, x\rangle = 2 \,\},$$

wobei $v = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ und $w = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass sich E und F in einer Gerade schneiden, und bestimmen Sie p, $u \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$E \cap F = \{\, p + ut \mid t \in \mathbb{R}^3 \,\}.$$

Aufgabe 4: Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimment Sie jeweils die gesamten Lösungsmengen der Gleichungssysteme

$$A \cdot x = b \quad \text{und} \quad A \cdot x = c$$

mit dem Gauß-Verfahren.

(b) Geben Sie Basen von $\ker(A)$ und $\mathrm{im}(A)$ an.