13. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra I" im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Donnerstag, den 07.02.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: wenn man B als Matrix mit den Spalten $v_1, \dots, v_n$ auffasst, dann bilden die Zeilen von B^{-1} gerade die zu B duale Basis des Dualraums ${}^n\Bbbk = (\Bbbk)^n$ (siehe Proposition 2.79).

(b) Bestimmen Sie die duale Basis zur Basis (v_1, v_2, v_3) des $\mathbb{R}^3$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Es sei B die obige Basis der $\mathbb{R}^3$ und $C = (w_1, w_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von F bezüglich der Basen B und C.

Aufgabe 3: Es sei $\Bbbk = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Bilden die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} [1] \\ [3] \\ [0] \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} [0] \\ [1] \\ [3] \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} [3] \\ [0] \\ [1] \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\Bbbk^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: Es seien $i, j, k \in \mathbb{H}$ wie in Bemerkung 1.73. Bestimmen Sie das Inverse B der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1+j \\ 1-j & 1-i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H})$$

mit dem Gauß-Verfahren; beachten Sie, dass bei allen Zeilenumformungen immer von links mit Skalaren aus $\mathbb{H}$ multipliziert wird. Rechnen Sie in $\mathbb{H}$ wie 1.70 und 1.71. Machen Sie hinterher die Probe für $B \cdot A$ oder für $A \cdot B$.