14. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Abgabe: Donnerstag, den 14.02.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es sei R ein kommutativen Ring mit Eins und $\mathrm{GL}(n,R)$ die allgemeine lineare Gruppe aus Folgerung 2.71. Überprüfen Sie:

(a) $\mathrm{GL}(n,R) = \{A \in M_n(R) \mid \det(A) \neq 0\}$;

(b) Die Determinante ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\det : \mathrm{GL}(n,R) \to R^\times$$

wobei $R^\times \stackrel{\text{def}}{=} \{r \in R \mid \text{es existiert } s \in R \text{ mit } rs = 1\}$;

(c) Es sei

$$\mathrm{SL}(n,R) = \{A \in \mathrm{GL}(n,R) \mid \det A = 1\},$$

dann ist $\mathrm{SL}(n,R) \subset \mathrm{GL}(n,R)$ eine Untergruppe, das heißt, es gilt $E_n \in \mathrm{SL}(n,R)$ und für alle $A, B \in \mathrm{SL}(n,R)$ gilt auch $A \cdot B \in \mathrm{SL}(n,R)$ und $A^{-1} \in \mathrm{SL}(n,R)$.

Aufgabe 2: Wir definieren

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \ A^t \cdot A = E_n\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{O}(n)$ ist eine Gruppe;

(b) Für alle $A \in \mathrm{O}(n)$ ist $\det A \in \{1, -1\}$;

(c) Die Menge

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$$

bildet eine Untergruppe von $\mathrm{O}(n)$.

(d) Beschreiben Sie alle Elementen von $\mathrm{O}(2)$. Welche liegen in $\mathrm{SO}(2)$?

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}), \qquad \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \qquad \begin{pmatrix} [1] & [0] & [2] & [3] \\ [2] & [1] & [1] & [4] \\ [3] & [1] & [4] & [1] \\ [4] & [2] & [4] & [3] \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}).$$

Wählen Sie jeweils ein geeignetes Verfahren aus.

Aufgabe 4: Beweisen Sie: um die Determinante einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ auszurechnen, benötigt

(a) die Leibniz-Formel maximal $(n-1) \cdot n!$ Multiplikationen;

(b) die Laplace-Entwicklung maximal $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{i!} < (e-1) \cdot n! - 1$ Multiplikationen ($e = 2,718\ldots$ ist die Eulerzahl);

(c) das Gauß-Verfahren (für die nicht-strenge Zeilenstufenform) maximal $\frac{n(n-1)}{2}$ Divisionen und $(n-1) + \frac{2n^3-3n^2+n}{6}$ Multiplikationen.

Dabei wurden Multiplikationen mit $0, 1$ und -1 nicht mitgezählt.
Berechnen Sie diese Zahlen jeweils für $n = 2, 3, 4$.

Zusatz: Wie kann man das Gauß-Verfahren so abändern, dass es auch für kleine n das schnellste Verfahren bleibt?

Zusatz: Wenn man bei der Laplace-Entwicklung alle auftretenden Unterdeterminanten zwischenspeichert, kommt man mit $n \cdot (2^{n-1} - 1)$ Multiplikationen aus – wieso?