Probeklausur zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Anleitung: Versuchen Sie, innerhalb von 180 min ohne Hilfsmittel so viele Aufgabe wie möglich zu lösen.

Achtung: Die Aufgabe bei der Klausur können ganz anderes sein als bei dieser Probeklausur.

Aufgabe 1: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Für $C = (c_{ij})_{i,j} \in M_n(R)$ ist die *Spur* definiert durch

$$\operatorname{tr} C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}.$$

Zeigen Sie

(a) Für $A \in M_{k,l}(R)$ und $B \in M_{l,k}(R)$ gilt

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A).$$

(b) Sei $R = \mathbb{C}$ und $A \in M_{k,l}(\mathbb{C})$ und $A^* = (\bar{a}_{ji})_{j,i} = \bar{A}^t$. Dann gilt

$$\operatorname{tr}(A^* \cdot A) \geq 0.$$

Aufgabe 2: Ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

invertierbar in $M_3(R)$ für $R = \mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Q}$, $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, und $R = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$? (Dabei interpretieren Sie $1, 2, 3 \in \mathbb{Z}$ jeweils als $[1], [2], [3] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für $p = 3, 5$.) Begründen Sie jeweils Ihre Antwort und bestimmen Sie, wenn möglich, die Inverse.

Aufgabe 3: Es sei $F : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ die Abbildung mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Q}).$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{im} F$;

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker F$;

(c) Ergänzen Sie die Basen aus (a), (b) zu Basen $B = (b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{Q}^3$ und $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ von $\mathbb{Q}^4$.

(d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von F bezüglich B und C.

Aufgabe 4: Es sei M ein Rechtsmodul über ein Ring R und $P \in \operatorname{End}_R(M)$ gegeben, so dass $P \circ P = P$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{id} - P : M \to M$ mit $(\mathrm{id} - P)(m) = m - P(m)$ ist linear;

(b) $(\mathrm{id} - P) \circ (\mathrm{id} - P) = \mathrm{id} - P$.

Es sei jetzt $U = \ker P$ und $V = \ker(\mathrm{id} - P)$. Zeigen Sie:

(c) $\operatorname{im} P = V$ und $\operatorname{im}(\mathrm{id} - P) = U$;

(d) $U \oplus V = M$.

Aufgabe 5: Es sei $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(v) = u \times v$.

(a) Bestimmen Sie $\ker F$ und $\operatorname{im} F$;

(b) Es sei $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $\langle u, w \rangle = 0$. Zeigen Sie, dass

$$B = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{w}{\|w\|}, \frac{u \times w}{\|u\| \cdot \|w\|} \right)$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

(c) Geben Sie die Matrix von F bezüglich der Basen B, B an.