Seminar: Funktionentheorie

Prof. Dr. Sebastian Goette
Assistent: Dr. Anda Degeratu

SS 2015

Inhalt:
Dieses Seminar ist dem Beweis des Riemannschen Uniformisierungssatzes gewidmet.

Uniformisierungssatz. Jede einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche ist konform äquivalent zu genau einer der folgenden Riemann'schen Flächen,

1. der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$,
2. der Zahlebene $\mathbb{C}$,
3. der Zahlkugel $\bar{\mathbb{C}}$.

Vorträge:

1. **20.04.2015:**
   Topologische Grundbegriffe; Der Begriff der Riemann'sche Fläche; Beispiele: (1) die komplexe Ebene $\mathbb{C}$, (2) die Riemann'sche Zahlkugel $^2 = \bar{\mathbb{C}}$, (3) der Torus.
   [Fre14]: I.1 und I.2
2. **27.04.2015:**
   (a) Harmonische Funktionen
   [FB93]: Seiten 48-49, Definition + Satz 5.10 + Satz 5.11
   Beispiel: Die Funktion $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $u(z) = \log |z|$ ist harmonisch. Sie ist jedoch nicht (in ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) Realteil einer holomorphen Funktion.
   (b) Die Poisson'sche Integralformel
   [Fre14]: II.1
   Beweisen Sie: Übungsaufgabe 2
3. **04.05.2015:**
   (a) Stabilitäteigenschaftern harmonischer Funktionen bei Grenzübergang
   [Fre14]: II.2

(b) Das Randwertproblem für Kreisscheiben
[Fre14]: II.3
Beweisen Sie: Übungsaufgabe 2 und 6.

4. **11.05.2015:**
Harmonische Funktionen auf Riemann'schen Fläche; Die Formulierung des Randwertproblems und die Eindeutigkeit der Lösung.
[Fre14]: II.4
Beweisen Sie: Übungsaufgabe 2.

5. **18.05.2015:**
Die Lösung des Randwertproblems für $U \cup V$ mit Hilfe des alternierenden Verfahrens; das Randwertproblem für Kreisringe.
[Fre14]: II.5
Beweisen Sie: Übungsaufgabe 1 und 4.

6. **1.06.2015:**
Das Außenraumproblem; Die normierte Lösung des Außenraumproblems.
[Fre14]: II.6
Beweisen Sie: Übungsaufgabe 1 und 3.

7. **8.06.2015:**
Konstruktion von harmonischen Funktionen mit vorgegebener Singularität; der berandete Fall
[Fre14]: II.7
Beweisen Sie: Übungsaufgabe 1.

8. **15.06.2015:**
   (a) Konstruktion von harmonischen Funktionen mit logarithmischer Singularität; die Green'sche Funktion; hyberbolische Riemann'sche Fläche
   [Fre14]: II.8
   Beweisen Sie: Jedes beschränkte Gebiet der Ebene ist hyperbolisch. (Übungsaufgabe 3.)
   (b) Konstruktion von harmonischen Funktionen mit vorgegebener Singularität; der positiv berandete Fall
   [Fre14]: II.9
   Beweisen Sie: Jede kompakte Rieamann'sche Fläche ist nullberandet. (Übungsaufgabe 1.)

9. **22.06.2015:**
Ein Lemma von Nevanlina; Satz 10.2, Folgerung zur Satz 10.2 (Eine kompakte Riemann'sche Fläche ist nicht hyperbolisch.) und Satz 10.4
[Fre14]: II.10.

10. **29.06.2015:**
   (a) Konstruktion von harmonischen Funktionen mit vorgegebener Singularität; der nullberandete Fall.
   [Fre14]: II.11

(b) Die wichtigsten Spezialfälle der Existenzsätze.
[Fre14]: II.12

11. **6.07.2015:**
Der Uniformisierungssatz
[Fre14]: III.1

12. **13.07.2015:**
Grobe Klassifikation Riemann'scher Fläche
[Fre14]: III.2
Beweisen Sie: Übungsaufgabe 1

13. **20.07.2015:**
Der Satz von Picard
[Fre14]: III.3

References

[FB93] E. Freitag and R. Busam, *Funktionentheorie*, Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Fre14] E. Freitag, *Funktionentheorie 2. Riemann'sche Flächen, mehrere komplexe Variable, Abel'sche Funktionen, höhere Modulformen.*, 2nd revised ed., Heidelberg: Springer Spektrum, 2014 (German).