

# Algebraische Topologie — WS 14/15

Sebastian Goette



# Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
Kapitel 1. Kapitel 1 — Grundbegriffe	3
1.a. Metrische Räume	3
1.b. Topologische Räume	5
1.c. Trennungseigenschaften	8
1.d. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften	10
1.e. Konstruktionen topologischer Räume	13
1.f. Kompaktheit	18
1.g. Zusammenhang	23
1.h. Quotienten und Verklebung	24
1.i. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten	27
1.j. Übungen zu Kapitel 1	36
Kapitel 2. Fundamentalgruppe und Überlagerungen	43
2.a. Homotopien und Homotopieäquivalenz	43
2.b. Die Fundamentalgruppe	46
2.c. Die Fundamentalgruppe der $S^1$	50
2.d. Der Satz von Seifert-van Kampen	54
2.e. Die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes	62
2.f. Überlagerungen	66
2.g. Die universelle Überlagerung	71
2.h. Übungen zu Kapitel 2	74
Kapitel 3. Homotopiegruppen	79
3.a. Höhere Homotopiegruppen	79
3.b. Die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares	84
3.c. Faserungen	88
3.d. Der Ausschneidungssatz	93
3.e. Der Satz von Brouwer und Hopf	97
3.f. Kofaserungen und Quotienten	102
3.g. Der Freudenthalsche Einhängungssatz	108
3.h. Stabile Homotopiegruppen	110
3.i. Gerahmter Bordismus	115
3.j. Die erste stabile Homotopiegruppe der Sphären	123
3.k. Übungen zu Kapitel 3	127
Kapitel 4. Elementare Homotopietheorie	133
4.a. Eine angenehme Kategorie topologischer Räume	133
4.b. Das Exponentialgesetz	136
4.c. CW-Komplexe und der Satz von Whitehead	142

4.d. Faser- und Kofaser-Sequenzen	151
4.e. Übungen zu Kapitel 4	156
Kapitel 5. Homologie	161
5.a. Abelsche Kategorien	161
5.b. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome	164
5.c. Zelluläre Homologie	170
5.d. Homologiefunktoren und Spektren	179
5.e. Das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum	184
5.f. Die abgeleiteten Funktoren Tor und Ext	190
5.g. Das Moore-Spektrum und ein universelles Koeffizienten-Theorem	199
5.h. Produkträume und die Künneth-Formel	203
5.i. Übungen zu Kapitel 5	209
Kapitel 6. Kohomologie	215
6.a. Axiome für Kohomologiefunktoren	215
6.b. Zelluläre Kohomologie und ein universelles Koeffiziententheorem	217
6.c. Produkte	223
6.d. Spektren und Kohomologiefunktoren	228
6.e. Vektorbündel	230
6.f. Topologische $K$ -Theorie	236
6.g. Bordismus	242
6.h. Übungen zu Kapitel 6	243
Kapitel 7. Ringspektren und Multiplikative Kohomologiefunktoren	247
7.a. Die stabile CW-Kategorie	247
7.b. Eigenschaften der stabilen Homotopiekategorie	251
7.c. Das reduzierte Produkt von Spektren	252
7.d. Ringspektren und Produkte	261
7.e. Allgemeine singuläre Homologie und Kohomologie	266
7.f. Übungen zu Kapitel 7	268
Kapitel 8. Dualität	271
8.a. Spanier-Whitehead-Dualität	271
8.b. Orientierungen und Thom-Isomorphismen	276
8.c. Poincaré-Lefschetz-Dualität	279
8.d. Übungen zu Kapitel 8	284
Literatur	285
Stichwortverzeichnis	287

## Einführung

Bevor wir mit dem eigentlichen Stoff der Vorlesung beginnen, möchte ich Ihnen ein paar Beispiele geben, zum einen Aussagen, die sich in der Sprache der Topologie formulieren lassen, zum anderen Aussagen aus anderen Gebieten der Mathematik, die sich aber topologisch beweisen lassen. Nicht alle diese Beispiele werden in der Vorlesung tatsächlich auftreten, weil sie zum Teil etwas mehr Hintergrundwissen brauchen — sei es topologisch, sei es aus einem anderen Gebiet der Mathematik — als wir in dieser Vorlesung lernen können.

0.1. BEISPIEL. Sei

$$B^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1 \}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe, und sei

$$D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1 \}$$

ihr Abschluss.

Der *Brouwersche Fixpunktsatz* besagt:

0.2. SATZ (Brouwer). *Jede stetige Abbildung  $f: D^n \rightarrow D^n$  der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.*

Das heißt, es existiert  $x_0 \in B^n$  mit

$$f(x_0) = x_0 .$$

Hierbei bedeutet stetig das gleiche wie in der Analysis.

Vergleichen Sie diesen Satz mit dem Fixpunktsatz von Banach:

0.3. SATZ (Banach). *Sei  $X$  ein vollständiger normierter Vektorraum, und sei  $F: X \rightarrow X$  eine Abbildung zu der ein  $\lambda < 1$  existiert, so dass*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \tag{*}$$

*für alle  $x, y \in X$ . Dann hat  $F$  einen eindeutigen Fixpunkt.*

Wir vergleichen die Sätze von Banach und Brouwer.

- (1) Der Satz von Banach ist insofern allgemeiner, als das er für mehr Räume funktioniert, denn der Satz von Brouwer gilt nur für gewisse Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Er ist schärfer, denn er liefert einen *eindeutigen* Fixpunkt. Außerdem liefert der Beweis ein Verfahren zur approximativen Bestimmung des Fixpunkts.
- (2) Der Satz von Brouwer ist insofern allgemeiner, als er mehr Abbildungen zulässt. Wir könnten nämlich den Satz von Brouwer auch für Abbildungen  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  formulieren, so dass  $F(B^n) \subset B^n$ . Aus dem Banachschen Satz folgt ja unter anderem, dass der Einheitskreis um den Fixpunkt in sich abgebildet wird. Auf der anderen Seite kann eine Abbildung den Einheitskreis in sich abbilden, ohne dass sie die Lipschitz-Bedingung (\*) erfüllt. Der Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes sagt uns allerdings nicht, wie wir den Fixpunkt auffinden können.

Die Sätze sind also verschieden. Der Banachsche Fixpunktsatz ist ein „metrischer“ Satz, während der Brouwersche Fixpunktsatz ein „topologischer“ Satz ist.

0.4. BEISPIEL. Unter der  $n$ -dimensionale Einheitssphäre verstehen wir die Menge

$$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1 \} .$$

Ein Einheitsvektorfeld auf der  $S^n$  ist eine stetige Abbildung  $V: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass

$$|V(x)| = 1 \quad \text{und} \quad V(x) \perp x .$$

0.5. SATZ (vom Igel). *Sei  $n$  gerade, dann existiert kein stetiges Einheitsvektorfeld auf  $S^n$ .*

Mit anderen Worten: ein gerade-dimensionaler Igel ohne Glatzpunkt lässt sich nicht kämmen (Igel lassen sich sowieso nicht kämmen — sie stellen ihre Stacheln auf, wenn man's versucht).

Auf der anderen Seite existiert solch ein Vektorfeld immer, wenn  $n$  ungerade ist. In diesem Fall identifizieren wir  $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$  und setzen einfach  $V(x) = ix$ .

0.6. BEISPIEL. Das folgende Beispiel ist mit dem zweiten verwandt, auch wenn man das nicht auf den ersten Blick erkennen kann. Sei  $A$  eine Algebra über  $\mathbb{R}$ , d.h.,  $A$  ist ein reeller Vektorraum, und es existiert eine  $\mathbb{R}$ -bilineare Multiplikationsabbildung  $*$ :  $A \times A \rightarrow A$ . Diese muss weder assoziativ noch kommutativ sein.

Wir nennen  $A$  eine *Divisionsalgebra*, wenn zu jedem  $a \in A \setminus 0$  ein  $a' \in A$  existiert, so dass

$$a' * (a * b) = (b * a) * a' = b$$

für alle  $b \in A$  gilt.

0.7. SATZ (Kervaire, Milnor). *Die einzigen endlich-dimensionalen Divisionsalgebren über  $\mathbb{R}$  sind  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  (die Quaternionen) und  $\mathbb{C}a$  (die Oktaven).*

Diesen Satz werden wir in der Vorlesung sicherlich nicht beweisen. Genau wie beim Fundamentalsatz der Algebra handelt es sich hier um einen rein algebraischen Satz, der sich aber nur mit analytischen / topologischen Methoden beweisen lässt. Die Liste der algebraischen Resultate, die mit topologischen Methoden bewiesen werden, wird immer länger.

## Kapitel 1 — Grundbegriffe

Wir lernen in diesem Kapitel den Begriff des topologischen Raumes und der stetigen Abbildungen kennen. Außerdem definieren wir noch zahlreiche Eigenschaften von topologischen Räumen und Abbildungen, und beweisen ein paar kleine Sätze, die wir in späteren Kapiteln benötigen werden. Einiges sollte aus Analysis bekannt sein — zumindest im metrischen Fall.

### 1.a. Metrische Räume

Wir erinnern uns kurz an die Definition von metrischen Räumen und stetigen Abbildungen im Sinne der Analysis. Wenn wir von einer Definition „im Sinne der Analysis“ sprechen, meinen damit eine Definition, die mit „für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ...“ beginnt.

1.1. DEFINITION. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(X, d)$  aus einer Menge  $X$  und einer Abbildung  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ , die

- (1) *positiv* ist, das heißt,  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ ,
- (2) *symmetrisch* ist, das heißt,  $d(x, y) = d(y, x)$ , und
- (3) die *Dreiecksungleichung*  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  erfüllt,

jeweils für alle  $x, y, z \in X$ .

1.2. BEISPIEL. Es folgen einige einfache Beispiele von Metriken.

- (1)  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ , jeweils mit  $d(x, y) = |y - x|$ .
- (2) Jeder normierte Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  ist metrisch mit  $d(x, y) = \|y - x\|$ .
- (3) Jede Menge  $M$  trägt eine Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \text{ und} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (4) Jede Teilmenge  $Y$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  ist wieder ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik  $d|_Y = d|_{Y \times Y}$ .

Weitere Beispiele folgen in den Übungen 1.95 und 1.97.

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $\varepsilon > 0$  und  $x \in X$ . Der  $\varepsilon$ -Ball um  $x$  ist die Menge

$$B_\varepsilon(x) = \{x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon\}.$$

1.3. DEFINITION. Seien  $(X, d), (Y, d')$  metrische Räume. Eine Abbildung  $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  heißt *stetig am Punkt*  $x \in X$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x)).$$

$F$  heißt *stetig*, wenn  $F$  an allen Punkten  $x \in X$  stetig ist.

Das ist genau die Definition, die Sie aus Analysis kennen. Wir erinnern uns an eine weitere Definition. Im folgenden bezeichne  $\mathcal{P}X$  die Potenzmenge von  $X$ . Da wir es in der Topologie häufig mit Mengen von Mengen — wie der Potenzmenge — zu tun haben, verwenden wir für solche Mengen kaligraphische Buchstaben, um sie zum Beispiel von Punktmenge zu unterscheiden.

1.4. DEFINITION. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt *offen in  $X$* , wenn zu jedem  $x \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass  $B_\varepsilon(x) \subset U$ . Die Gesamtheit aller offenen Mengen  $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{P}X$  heißt die *metrische Topologie*. Sei  $x \in X$ , dann heißt eine beliebige Teilmenge  $V \subset X$  eine *Umgebung von  $x$* , wenn es eine offene Menge  $U$  gibt mit  $x \in U \subset V$ .

1.5. BEMERKUNG. Die Offenheit einer Menge  $U$  hängt ab vom umgebenden Raum  $X$  und der gewählten Metrik  $d$ . So ist etwa die Menge  $[-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$  offen in  $\mathbb{Q}$ , aber nicht in  $\mathbb{R}$ .

1.6. BEMERKUNG. Zu Definition 1.4 äquivalent ist die folgende Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen in metrischen Räumen. Eine Teilmenge  $A \subset X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge  $(a_i)_i$  in  $A$ , die in  $(X, d)$  im Sinne der Analysis konvergiert, der Grenzwert  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$  in  $A$  liegt. Eine Teilmenge  $U \subset X$  ist offen, wenn  $X \setminus U$  abgeschlossen ist.

Zur Erinnerung: zwei Normen  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  auf einem Vektorraum  $V$  heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten  $0 < c, C < \infty$  gibt, so dass

$$c \|v\| \leq \|v\|' \leq C \|v\|$$

für alle  $v$ . Sei  $V \cong \mathbb{R}^n$  endlich dimensional, dann sind alle Normen äquivalent. Auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen gibt es hingegen viele paarweise inäquivalente Normen, und entsprechend viele verschiedene Topologien.

1.7. BEMERKUNG. Zwei Normen auf einem  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum induzieren genau dann die gleiche Topologie, wenn sie äquivalent sind.

BEGRÜNDUNG. Seien  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  äquivalent. Aus

$$d(x, y) = \|y - x\| \leq \frac{1}{c} \|y - x\|' = \frac{1}{c} d'(x, y)$$

folgt  $B'_{c\varepsilon}(x) \subset B_\varepsilon(x)$ , wobei  $B'_{c\varepsilon}(x)$  einen Ball bezüglich  $d'$  bezeichne. Somit enthält jeder metrische Ball bezüglich  $d'$  einen metrischen Ball bezüglich  $d$ . Die umgekehrte Behauptung zeigt man genauso. Hieraus folgt die Gleichheit der Topologien.

Wir nehmen jetzt an, dass  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  die gleiche Topologie induzieren. Bälle  $B_r(x) \subset V$  sind offen, denn für jeden Punkt  $y \in B_r(x)$  folgt  $B_{r-\|x-y\|}(y) \subset B_r(x)$  aus der Dreiecksungleichung. Insbesondere ist  $B_1(0) \subset V$  offen. Da  $\|\cdot\|'$  die gleiche Topologie induziert, existiert  $r > 0$ , so dass der  $\|\cdot\|'$ -Ball  $B'_r(0)$  vom Radius  $r$  um 0 in  $B_1(0)$  enthalten ist. Aus  $\|x\|' < r$  folgt also  $\|x\| < 1$ , und mit  $c = \frac{1}{r}$  erhalten wir daraus

$$c \|v\| \leq \|v\|'$$

für alle  $v \in V$ . Die andere Ungleichung folgt entsprechend.  $\square$

Wir wollen jetzt zeigen, wie man Stetigkeit auch definieren kann, wenn man nicht die Metrik kennt, sondern nur ihre offenen Mengen.

1.8. SATZ. Seien  $(X, d)$  und  $(Y, d')$  metrische Räume. Eine Abbildung  $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  ist genau dann stetig, wenn die Urbilder aller offener Teilmengen von  $Y$  in  $X$  wiederum offen sind.

Zusammen mit Bemerkung 1.7 folgt, dass die Stetigkeit einer Abbildung  $F: (V, d) \rightarrow (W, d')$  zwischen zwei normierten Vektorräumen nur von den Äquivalenzklassen der Normen  $d$  und  $d'$  abhängt. Dieses Faktum ist aus Analysis bekannt.

BEWEIS. Wir nehmen an, dass  $F$  stetig ist im Sinne von Definition 1.3. Sei  $V \subset Y$  offen, und sei  $x \in F^{-1}(V) \subset X$  beliebig. Da  $V$  offen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(F(x)) \subset V$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $F$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass  $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x)) \subset V$  gilt, insbesondere folgt  $B_\delta(x) \subset F^{-1}(V)$ . Da  $x$  beliebig war, ist also  $F^{-1}(V)$  offen in  $X$ .



Wir nehmen jetzt an, dass Urbilder offener Mengen offen sind. Seien jetzt  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Da der Ball  $B_\varepsilon(F(x))$  in  $Y$  offen ist, ist auch  $U = F^{-1}(B_\varepsilon(F(x)))$  offen in  $X$ , und natürlich liegt  $x$  in  $U$ . Also existiert ein  $\delta > 0$ , so dass  $B_\delta(x) \subset U$  gilt. Es folgt  $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x))$ . Da  $x$  und  $\varepsilon$  beliebig waren, ist  $F$  also stetig im Sinne von Definition 1.3.  $\square$

### 1.b. Topologische Räume

Wir erinnern uns an die Definition topologischer Räume und stetiger Abbildungen aus der Analysis.

1.9. BEMERKUNG. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, und sei  $\mathcal{O}_d$  die von  $d$  definierte Topologie auf  $X$ .

- (1) Die leere Menge  $\emptyset$  und  $X$  selbst sind nach Definition 1.4 offen, gehören also zu  $\mathcal{O}$ .
- (2) seien  $U_1, \dots, U_k$  offen, und sei  $x \in U_1 \cap \dots \cap U_k$ . Da die  $U_i$  offen sind, existieren  $\varepsilon_i > 0$ , so dass  $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ . Sei  $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ , dann ist  $\varepsilon > 0$ , und es gilt  $B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_k$ . Da  $x$  beliebig war, ist  $U_1 \cap \dots \cap U_k$  also wieder offen.
- (3) Sei  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_d$  eine beliebig grosse Ansammlung offener Mengen. Sei

$$x \in \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

dann existiert also ein  $U \in \mathcal{U}$ , so dass  $x \in U$ . Da  $U$  offen ist, existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(x) \subset U \subset \bigcup \mathcal{U}$ . Da  $x$  beliebig war, ist  $\bigcup \mathcal{U}$  also wieder offen.

Wir benutzen diese drei Beobachtungen über  $\mathcal{O}_d$ , um den allgemeinen Begriff einer Topologie zu definieren.

1.10. DEFINITION. Sei  $X$  eine Menge. Eine *Topologie* auf  $X$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{O}$  der Potenzmenge  $\mathcal{P}X$  mit folgenden Eigenschaften.

- (1) Die leere Menge  $\emptyset$  und  $X$  selbst liegen in  $\mathcal{O}$ .
- (2) Seien  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}$ , dann liegt auch  $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$ .
- (3) Sei  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ , dann liegt auch  $\bigcup \mathcal{U}$  in  $\mathcal{O}$ .

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  aus einer Menge  $X$  und einer Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ .

1.11. BEISPIEL. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann definiert  $\mathcal{O}_d$  nach Bemerkung 1.9 eine Topologie auf  $X$ . Umgekehrt heißt eine Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$  *metrisierbar*, wenn es eine Metrik  $d$  auf  $X$  gibt, so dass  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ . Die meisten topologischen Räume, denen wir später begegnen, werden metrisierbar sein. Dennoch gibt es interessante und wichtige topologische Räume, die nicht metrisierbar sind.

1.12. BEISPIEL. Sei  $X$  eine beliebige Menge. Wir definieren zwei "triviale" Topologien auf  $X$ .

- (1) Sei  $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$ , dann ist jede Teilmenge von  $X$  offen bezüglich  $\mathcal{O}_\delta$ . Wir nennen  $\mathcal{O}_\delta$  die *diskrete Topologie* auf  $X$ . Die diskrete Topologie wird von der Metrik aus Beispiel 1.2 (3) induziert.
- (2) Das andere Extrem ist  $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}X$ . Diese Topologie heißt *Klumpentopologie* (*indiskrete Topologie*). Diese Topologie ist nur metrisierbar, wenn  $X$  höchstens einen Punkt enthält, wie wir später sehen werden.

Die Topologie ist die Menge aller offenen Teilmengen. Wir definieren entsprechend die Begriffe „Umgebung“ und „abgeschlossene Menge“ wie gehabt.

1.13. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt *offen* bezüglich  $\mathcal{O}$ , falls  $U \in \mathcal{O}$ . Sei  $x \in X$  und  $V \subset X$  mit  $x \in V$ , dann heißt  $V$  eine *Umgebung* von  $x$

bezüglich  $\mathcal{O}$ , falls es eine offene Menge  $U \in \mathcal{O}$  gibt, so dass  $x \in U \subset V$  gilt. Sei  $A \subset X$ , dann heißt  $A$  *abgeschlossen* bezüglich  $\mathcal{O}$ , falls das Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

1.14. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum, und sei  $Y \subset X$  eine beliebige Teilmenge. Das *Innere*  $\overset{\circ}{Y}$  von  $Y$  ist die größte offene Teilmenge von  $X$ , die ganz in  $Y$  enthalten ist. Der *Abschluss*  $\overline{Y}$  von  $Y$  ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die  $Y$  enthält. Der *Rand* von  $Y$  ist die Menge  $\partial Y = \overline{Y} \setminus \overset{\circ}{Y}$ .

1.15. BEMERKUNG. Sei  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum, und sei  $Y \subset X$  eine beliebige Teilmenge. Es gilt

$$\overset{\circ}{Y} = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subset Y}} U \quad \text{und} \quad \overline{Y} = \bigcap_{\substack{X \setminus A \in \mathcal{O} \\ A \supset Y}} A.$$

Die erste Menge ist offen nach Definition 1.10 (3). Für die zweite zeigt man analog, dass das Komplement abgeschlossen ist. Ausserdem ist

$$\overline{X \setminus Y} = X \setminus \overset{\circ}{Y}, \quad (X \setminus Y)^\circ = X \setminus \overline{Y}, \quad \text{und} \quad \partial(X \setminus Y) = \partial Y.$$

1.16. BEISPIEL. Das Innere und der Abschluss einer Menge hängen vom umgebenden Raum und seiner Topologie ab. Sei  $V = [-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$ , dann gilt

$$\begin{array}{lll} \text{in } \mathbb{Q} : & \overset{\circ}{V} = V, & \overline{V} = V, & \partial V = \emptyset, \\ \text{und in } \mathbb{R} : & \overset{\circ}{V} = \emptyset, & \overline{V} = [-\pi, \pi], & \partial V = [-\pi, \pi]. \end{array}$$

Falls es klar ist, von welcher Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$  wir reden, lassen wir den Zusatz „bezüglich  $\mathcal{O}$ “ in der Regel weg. Wir haben in Satz 1.8 ein „topologisches“ Kriterium für die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen kennengelernt. Wir erheben dieses Kriterium zur Definition.

1.17. DEFINITION. Eine Abbildung  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  zwischen topologischen Räumen heißt *stetig genau* dann, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, wenn also  $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$  für alle  $U \in \mathcal{O}_Y$ . Es bezeichne  $C(X, Y)$  die Menge aller stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ .

Wenn eine stetige Abbildung  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  bijektiv ist und  $F^{-1}: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  ebenfalls stetig ist, heißt  $F$  ein *Homöomorphismus*.

- 1.18. BEISPIEL. (1) Nach Satz 1.8 sind Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann im topologischen Sinne stetig, wenn sie im metrischen Sinne stetig sind.  
(2) Seien  $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume, und sei  $y_0$  ein Punkt in  $Y$ . Die konstante Abbildung  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  mit  $F(x) = y_0$  für alle  $x \in X$  ist immer stetig, denn für jede offene Menge  $U \subset Y$  gilt

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \notin U, \text{ und} \\ X \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \in U. \end{cases}$$

1.19. BEMERKUNG. Seien  $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y), (Z, \mathcal{O}_Z)$  topologische Räume, und sei  $y_0 \in Y$ .

- (1) Die Identität  $\text{id}_X: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  auf  $X$  mit  $\text{id}_X(x) = x$  für alle  $x \in X$  ist immer stetig, denn für alle  $U \in \mathcal{O}_X$  gilt

$$F^{-1}(U) = U \in \mathcal{O}_X.$$

- (2) Seien  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  und  $G: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$  stetige Abbildungen, dann ist auch  $G \circ F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$  stetig. Sei nämlich  $U \subset Z$  offen in  $Z$ , dann ist  $G^{-1}(U)$  offen in  $Y$ , und somit ist  $F^{-1}(G^{-1}(U))$  offen in  $X$ . Da also  $(G \circ F)^{-1}(U) = F^{-1}(G^{-1}(U)) \in \mathcal{O}_X$  für alle  $U \in \mathcal{O}_Z$ , ist  $G \circ F$  stetig.

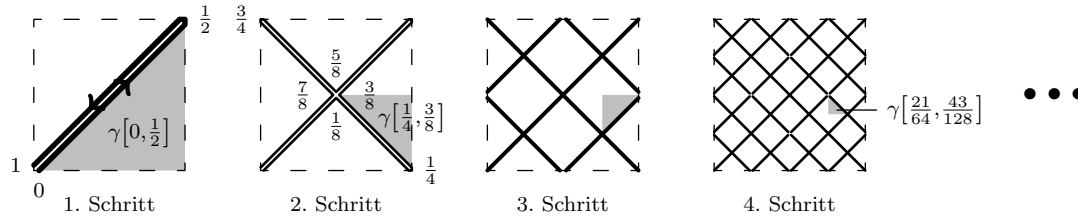


ABBILDUNG 1.1. Eine flächenfüllende Kurve

Mit einer *Klasse* bezeichnen wir eine beliebige Ansammlung von Mengen. Manche Klassen sind Mengen, alle anderen nennt man echte Klassen. Ein Beispiel für eine echte Klasse ist die Klasse aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Da Elemente von Klassen selbst bloß Mengen und keine echten Klassen sind, erhalten wir hier kein Paradoxon.

1.20. DEFINITION. Eine *Kategorie*  $\mathcal{C}$  besteht aus

- (1) einer Klasse von *Objekten*  $\text{obj}(\mathcal{C})$ ,
- (2) zu je zwei Objekten  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{C})$  einer Menge  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  von *Morphismen*,
- (3) je einem ausgezeichneten Morphismus  $\text{id}_X \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  für jedes Objekt  $x \in \text{obj}(\mathcal{C})$ ,  
und
- (4) zu je drei Objekten  $X, Y, Z \in \text{obj}(\mathcal{C})$  einer *Verkettung*

$$\circ: \text{hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad \text{mit} \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

so dass die folgenden zwei Axiome gelten.

*Identität.* Seien  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{C})$  und  $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , dann gilt

$$f = f \circ \text{id}_X = \text{id}_Y \circ f.$$

*Assoziativität.* Seien  $X, Y, Z, W \in \text{obj}(\mathcal{C})$  und  $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ ,  $h \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ , dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

1.21. BEISPIEL. Es folgen einige typische Beispiele von Kategorien.

- (1) Die Kategorie *Set* hat als Objekte alle Mengen, und als Morphismen alle Abbildungen zwischen Mengen.
- (2) Die Kategorie *Grp* hat als Objekte alle Gruppen, und als Morphismen alle Gruppenhomomorphismen.
- (3) Sei  $\mathbb{k}$  ein Körper, dann hat die Kategorie  $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$  als Objekte alle  $\mathbb{k}$ -Vektorräume, und als Morphismen alle  $\mathbb{k}$ -linearen Abbildungen.
- (4) Die Kategorie *Top* hat als Objekte alle topologischen Räume, und als Morphismen alle stetigen Abbildungen, siehe Bemerkung 1.19.

In jedem dieser Beispiele ist die Identität die Identität der zugrundeliegenden Menge, und die Komposition die Hintereinanderschaltung von Abbildungen.

Schließlich wollen wir an ein pathologisches Beispiel erinnern, das uns zeigt, dass stetige Abbildungen mitunter unerwartete Eigenschaften an den Tag legen.

1.22. BEISPIEL. Es gibt stetige, surjektive Abbildungen vom Einheitsintervall  $I = [0, 1]$  in die Menge  $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ . Zum Beispiel kann man zwei Kopien der Kochschen Schneeflockenkurve aneinandersetzen, siehe Abbildung 1.1. Die entstehende Kurve  $\gamma$  ist stetig, sogar  $\frac{1}{2}$ -Höldersch. In jedem Schritt  $\gamma_{i+1}$  wird jede Strecke der Kurve  $\gamma_i$  durch vier Strecken der halben Länge ersetzt. Man überzeugt sich, dass die Folge  $(\gamma_i)_i$  gleichmäßig konvergiert. Den Bildpunkt  $\gamma(t)$  kann man durch Intervallschachtelung bestimmen.

Wir können auch verschiedene Topologien auf ein und demselben Raum vergleichen.

1.23. DEFINITION. Seien  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}'$  zwei Topologien auf einer Menge  $X$ . Dann ist  $\mathcal{O}'$  *feiner* als  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}$  *größer* als  $\mathcal{O}'$ , wenn  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ .

1.24. BEMERKUNG. Eine Topologie  $\mathcal{O}'$  auf  $X$  ist nach Definition 1.17 genau dann feiner als  $\mathcal{O}$ , wenn die Identität  $\text{id}_X: (X, \mathcal{O}') \rightarrow (X, \mathcal{O})$  stetig ist. Mit Bemerkung 1.19 (2) folgt: Sei die Abbildung  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  stetig, sei  $\mathcal{O}'_X$  feiner als oder gleich  $\mathcal{O}_X$ , und sei  $\mathcal{O}'_Y$  größer als oder gleich  $\mathcal{O}_Y$ , dann ist auch  $F: (X, \mathcal{O}'_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}'_Y)$  stetig.

1.25. BEISPIEL. Sei  $X = \mathbb{R}^n$ , sei  $\mathcal{O}_d$  die metrische Topologie zur Standardmetrik, und sei  $\mathcal{O}_f$  die Topologie zur französischen Eisenbahnmetrik. Dann ist die diskrete Topologie  $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  aus Beispiel 1.12 (1) feiner als  $\mathcal{O}_f$ , die Topologie  $\mathcal{O}_f$  ist feiner als  $\mathcal{O}_d$ , und  $\mathcal{O}_d$  ist wiederum feiner als die Klumpentopologie  $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$  aus Beispiel 1.12 (2).

### 1.c. Trennungseigenschaften

Wir untersuchen die Frage, ob es in einem topologischen Raum genug offene Mengen gibt, so dass man vorgegebene Punkte oder Teilmengen voneinander „trennen“ kann.

Wir beantworten diese Frage zunächst für metrische Räume. Sei dazu  $I = ([0, 1], \mathcal{O}_d)$  das reelle Einheitsintervall, wie üblich versehen mit der metrischen Topologie.

1.26. SATZ. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt bezüglich  $\mathcal{O}_d$ :

- (1) *einpunktige Teilmengen von  $X$  sind abgeschlossen;*
- (2) *seien  $A_0, A_1 \subset X$  abgeschlossen und disjunkt, dann existieren disjunkte offene Mengen  $U_0, U_1 \in \mathcal{O}$  mit  $A_0 \subset U_0$  und  $A_1 \subset U_1$ ;*
- (3) *seien  $A_0, A_1 \subset X$  abgeschlossen und disjunkt, dann gibt es eine stetige Funktion  $f: X \rightarrow I$  mit  $A_0 = f^{-1}\{0\}$  und  $A_1 = f^{-1}\{1\}$ .*

BEWEIS. Zu (1). Zu zeigen ist die Offenheit von  $X \setminus \{x\}$  für ein beliebiges  $x \in X$ . Sei dazu  $x \neq y \in X$ , dann folgt

$$B_{d(x,y)}(y) \subset X \setminus \{x\}.$$

Also ist  $X \setminus \{x\}$  offen nach 1.4.

(3)  $\rightarrow$  (2). Wähle  $f$  wie in (3). Da  $f$  stetig ist, sind die Mengen  $U_0 = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$  und  $U_1 = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$  disjunkt und offen in  $X$ , da  $[0, \frac{1}{2})$  und  $(\frac{1}{2}, 1]$  disjunkt und offen in  $I$  sind.

Punkt (3) lassen wir als Übung 1.103. □ □

1.27. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O})$  hat die *Trennungseigenschaft* oder erfüllt das *Trennungsaxiom*

- (T0) wenn es zu je zwei Punkten  $x \neq y$  in  $X$  eine offene Menge  $U \in \mathcal{O}$  gibt mit  $x \in U, y \notin U$  oder  $x \notin U, y \in U$ ,
- (T1) wenn alle einpunktigen Mengen  $\{x\}$  für  $x \in X$  abgeschlossen sind,
- (T2) oder ist ein *Hausdorff-Raum*, wenn es zu je zwei Punkten  $x \neq y$  in  $X$  disjunkte offene Mengen  $U, V \in \mathcal{O}$  mit  $x \in U$  und  $y \in V$  gibt,
- (T3) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset X$  und jedem Punkt  $x \in X \setminus A$  disjunkte offene Mengen  $U, V \in \mathcal{O}$  mit  $A \subset U$  und  $x \in V$  gibt,
- (T3a) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset X$  und jedem Punkt  $x \in X \setminus A$  eine stetige Funktion  $f: (X, \mathcal{O}) \rightarrow I$  mit  $f(A) \subset \{0\}$  und  $f(x) = 1$  gibt,
- (T4) wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen  $A, B \subset X$  disjunkte offene Mengen  $U, V \in \mathcal{O}$  mit  $A \subset U$  und  $B \subset V$  gibt.

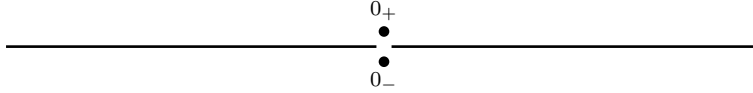


ABBILDUNG 1.2. Ein nicht Hausdorffscher Raum

Ein topologischer Raum heißt *regulär*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3) erfüllt, *vollständig regulär*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3a) erfüllt, und *normal*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T4) erfüllt.

Die für uns zunächst wichtigste Trennungseigenschaft ist „hausdorffsch“. Bemerkung 1.28 und Beispiel 1.29 sollen das verdeutlichen.

1.28. BEMERKUNG. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum.

- (1) Wenn  $(X, \mathcal{O})$  hausdorffsch ist, dann hat jede Folge in  $X$  höchstens einen Grenzwert. Das heißt, zu jeder Folge  $(x_i)_i$  gibt es höchstens einen Punkt  $x \in X$ , so dass für jede Umgebung  $U$  von  $x$  fast alle Folgenglieder  $x_i$  in  $U$  liegen. Denn wäre  $y \in X \setminus \{x\}$  ein weiterer Grenzwert, so könnte man  $x$  und  $y$  durch disjunkte offene Umgebungen  $U$  und  $V$  trennen, und fast alle Folgenglieder müssten in  $U \cap V = \emptyset$  liegen.
- (2) Wenn sich zwei Punkte  $x, y \in X$  nicht durch disjunkte offene Umgebungen trennen lassen, gilt  $f(x) = f(y)$  für jede stetige Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Denn wäre  $f(x) \neq f(y)$ , so könnte man  $f(x)$  und  $f(y)$  in  $\mathbb{R}$  durch disjunkte offene Intervalle  $I, J \subset \mathbb{R}$  trennen. Aber dann trennten  $f^{-1}(I)$  und  $f^{-1}(J)$  bereits  $x$  und  $y$ .

1.29. BEISPIEL. Betrachte den Raum  $X = (-1, 0) \cup \{0_+, 0_-\} \cup (0, 1)$  mit der folgenden Topologie  $\mathcal{O}$ . Eine Teilmenge  $U \subset X$  sei offen, wenn zu jedem Punkt  $x \in U \setminus \{0_+, 0_-\}$  ein  $\varepsilon_x > 0$  mit  $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U \setminus \{0_+, 0_-\}$  existiert, und falls  $0_- \in U$  oder  $0_+ \in U$ , ein  $\varepsilon_0 > 0$  mit  $(-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0) \subset U$  existiert, siehe Abbildung 1.2. Man überzeugt sich leicht, dass  $(X, \mathcal{O})$  die Trennungseigenschaften (T0) und (T1) erfüllt. Die Hausdorff-Eigenschaft (T2) ist jedoch verletzt, da der Schnitt je zweier Umgebungen von  $0_+$  und  $0_-$  eine kleine Menge der Form  $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$  mit  $\varepsilon > 0$  enthält. Als Beispiel für eine Folge mit zwei Grenzwerten betrachten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0_+ \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0_- .$$

Ein wichtiges Hilfsmittel in der Topologie ist das Lemma von Urysohn, wonach jeder (T4)-Raum „viele stetige Funktionen“ trägt.

1.30. LEMMA (Urysohn). Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein (T4)-Raum. Dann existiert zu je zwei abgeschlossenen, disjunkten Teilmengen  $A, B \subset X$  eine stetige Funktion  $f: X \rightarrow I$  mit  $f|_A \equiv 0$  und  $f|_B \equiv 1$ .

BEWEIS. Sei

$$D = \left\{ a 2^{-k} \mid a, k \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq 2^k \right\}$$

die Menge der dyadischen Zahlen im Einheitsintervall  $I$ . Wir wollen induktiv zu allen  $d \in D$  eine offene Menge  $U_d$  konstruieren, so dass  $A \subset \bar{U}_d \subset U_{d'} \subset X \setminus B$  für alle  $d, d' \in D$  mit  $d < d'$ . Für  $t \in I$  definieren wir dann offene Mengen

$$U_t = \bigcup_{d \in D \cap [0, t]} U_d ,$$

und wiederum gilt  $\bar{U}_t \subset U_{t'}$  für alle  $t, t' \in I$  mit  $t < t'$ , da zwischen  $t$  und  $t'$  noch beliebig viele dyadische Zahlen liegen.

Mit  $U_t = \emptyset$  für  $t < 0$  und  $U_t = X$  für  $t > 1$  definieren wir

$$f(x) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid x \in U_t\} \in [0, 1].$$

Aus  $A \subset U_0 \subset U_1 \subset X \setminus B$  folgt sofort  $f|_A \equiv 0$  und  $f|_B \equiv 1$ . Um Stetigkeit zu zeigen, betrachten wir für  $t \in I$  und  $x \in X$  mit  $f(x) = t$  sowie  $\varepsilon > 0$  das Intervall  $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap I$ . Sei  $0 < \delta < \varepsilon$ , dann folgt

$$x \in U_{t+\delta} \setminus \overline{U}_{t-\delta} \subset f^{-1}(t - \varepsilon, t + \varepsilon),$$

also ist  $f$  stetig.

Nun zur Konstruktion der Familie  $(U_d)_{d \in D}$ . Zu (T4) äquivalent ist die folgende Aussage: sei  $A \subset Y \subset X$ ,  $A$  abgeschlossen und  $Y$  offen, dann existiert eine offene Menge  $U$ , so dass  $A \subset U \subset \overline{U} \subset Y$ .

Wir wählen also zunächst  $U_0 \in \mathcal{O}$  mit  $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset X \setminus B$ , und  $U_1 \in \mathcal{O}$  mit  $\overline{U}_0 \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset X \setminus B$ . Seien jetzt alle  $U_d$  mit Nenner  $2^k$  bestimmt, dann wählen wir  $U_{(2a+1)2^{-k-1}}$  induktiv so, dass

$$\overline{U}_{a \cdot 2^{-k}} \subset U_{(2a+1)2^{-k-1}} \subset \overline{U}_{(2a+1)2^{-k-1}} \subset U_{(a+1)2^{-k}}. \quad \square$$

1.31. BEMERKUNG. Urysohn's Lemma 1.30 ist nicht ganz so stark wie Satz 1.26 (3), denn dort galt sogar  $f^{-1}(0) = A$  und  $f^{-1}(1) = B$ . Wenn nämlich  $f^{-1}(0) = A$  gilt, dann können wir die abgeschlossene Menge  $A$  als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen schreiben, etwa

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left[0, \frac{1}{n}\right).$$

Und das muss in allgemeinen (T4)-Räumen nicht gelten.

1.32. BEMERKUNG. Aus Satz 1.26 und den obigen Definitionen ergeben sich die folgenden Implikationen.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{metrisierbar} & \implies & \text{normal} & \implies & \begin{array}{c} \text{vollständig} \\ \text{regulär} \end{array} & \implies & \text{regulär} & \implies & \begin{array}{c} \text{hausdorffsch} \\ \text{(T2)} \end{array} & \implies & \text{(T1)} & \implies & \text{(T0)} \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & & \\ & & & & \text{(T4)} & & \text{(T3a)} & \implies & \text{(T3)} & & & & & \end{array}$$

Aus metrisierbar folgt normal wegen Satz 1.26. Die drei vertikalen Pfeile beruhen direkt auf den Definitionen. Aus (T3a) folgt (T3) wie (2) aus (3) in Satz 1.26, genauso folgt regulär aus vollständig regulär. Um aus regulär hausdorffsch zu folgern, ersetzen wir die abgeschlossene Menge in (T3) durch einen Punkt, der nach (T1) abgeschlossen ist. Aus normal folgt vollständig regulär mit (T1) und Urysohns Lemma 1.30. Aus hausdorffsch folgt (T1) wie im Beweis von 1.26 (1), und (T1)-Räume sind offensichtlich (T0).

In den Übungen 1.104–1.106 wird deutlich, dass in der Tat die Eigenschaften (T3), (T3a) und (T4) ohne (T1) wenig Aussagekraft besitzen.

### 1.d. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften

Um eine Topologie  $\mathcal{O}$  zu definieren, ist es häufig unbequem, alle offenen Mengen anzugeben. Stattdessen sucht man möglichst kleine Teilmengen  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{O}$ , so dass  $\mathcal{O}$  selbst die größte Topologie ist, für die alle Mengen in  $\mathcal{U}$  offen sind. So wird man auf die Begriffe „Basis“ und „Subbasis“ geführt. Für spätere Überlegungen ist es oft hilfreich zu wissen, dass manche topologischen Räume eine „kleine“ — sprich abzählbare — Basis besitzen.

1.33. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum. Eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$  heißt *Basis* von  $\mathcal{O}$ , wenn

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \mid I \text{ Menge, } U_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Eine Teilmenge  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$  heißt *Subbasis* von  $\mathcal{O}$ , wenn die Menge

$$\{ U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \in \mathbb{N}, U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S} \}$$

eine Basis von  $\mathcal{O}$  bildet.

Mit anderen Worten:  $\mathcal{B}$  ist eine Basis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{B}$  schreiben lässt.  $\mathcal{S}$  ist eine Subbasis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Durchschnitten je endlich vieler Elemente aus  $\mathcal{S}$  schreiben lässt. Insbesondere ist jede Basis auch eine Subbasis.

1.34. BEISPIEL. Es folgen Basen und Subbasen für einige uns wohlbekannte Topologien.

- (1) Sei  $X$  eine Menge. Die einpunktigen Teilmengen von  $X$  bilden eine Basis der diskreten Topologie  $\mathcal{O}_\delta$  auf  $X$ . Die Menge  $\{X\}$  bildet eine Basis der Klumpentopologie  $\mathcal{O}_K$ , und die leere Menge bildet eine Subbasis, denn  $\bigcap \emptyset = X \in \mathcal{P}X$ .
- (2) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann bildet die Menge  $\mathcal{B}$  alle metrischen Bälle mit rationalem Radius eine Basis der metrischen Topologie  $\mathcal{O}_d$ . Sei nämlich  $U \in \mathcal{O}_d$ . Nach Definition 1.4 existiert zu jedem  $x \in U$  ein Radius  $0 < r_x \in \mathbb{Q}$  so dass  $B_{r_x}(x) \subset U$ . Also gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) \quad \text{und} \quad \{ B_{r_x}(x) \mid x \in U \} \subset \mathcal{B}.$$

Darüberhinaus ist eine Teilmenge  $V \subset X$  genau dann eine Umgebung von  $x \in X$ , wenn sie einen der abzählbar vielen offene Bälle  $B_r(x)$  mit  $0 < r \in \mathbb{Q}$  enthält.

- (3) Sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit der Standard-Topologie versehen. Dann bildet die Menge aller metrischen Bälle mit rationalem Radius um Mittelpunkte mit rationalen Koordinaten bereits eine Basis der metrischen Topologie. Diese Basis ist abzählbar, während  $\mathcal{O}$  selbst überabzählbar ist.

Die letzten beiden Beispiele sollen als Motivation für die folgende Definition dienen.

1.35. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum. Dann hat  $(X, \mathcal{O})$  die *Abzählbarkeitseigenschaft* oder erfüllt das *Abzählbarkeitsaxiom*

- (A1) wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine abzählbare Menge  $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{P}X$  von Umgebungen besitzt, so dass  $V \subset X$  genau dann eine Umgebung von  $x$  ist, wenn es ein  $U \in \mathcal{U}_x$  mit  $U \subset V$  gibt, und
- (A2) wenn  $\mathcal{O}$  eine abzählbare Basis besitzt.

Eine Teilmenge  $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{O}$  wie in (A1) heißt auch *Umgebungsbasis*. Aus (A2) folgt (A1), denn sei  $\mathcal{B}$  eine abzählbare Basis von  $X$  und  $x \in X$ , dann ist

$$\mathcal{U}_x = \{ U \in \mathcal{B} \mid x \in U \}$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x$ . Das zweite Abzählbarkeitsaxiom lässt sich benutzen, um topologische Argumente induktiv über kleine Mengen zu führen. Das erste Abzählbarkeitsaxiom wird häufig benötigt, um topologische Begriffe über Folgen zu erklären, so wie im folgenden Satz.

1.36. SATZ. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum mit der Abzählbarkeitseigenschaft (A1). Dann ist eine Menge  $A \subset X$  genau dann abgeschlossen, wenn sie folgenabgeschlossen ist, das heißt, wenn jede Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $A$ , die in  $X$  konvergiert, ihre Grenzwerte in  $A$  annimmt.

Beachte, dass der Grenzwert einer Folge nicht eindeutig sein muss, wenn der Raum nicht Hausdorff (T2) ist.

BEWEIS. Sei  $A$  abgeschlossen, und sei  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$  eine Folge mit Grenzwert  $x \in X \setminus A$ . Wir wollen zeigen, dass dann nicht alle  $a_i$  in  $A$  liegen können. Da  $X \setminus A$  eine offene Umgebung von  $x$  ist, existiert ein  $i_0 > 0$ , so dass  $a_i \notin A$  für alle  $i \geq i_0$ .

Sei umgekehrt  $A$  nicht abgeschlossen, das heißt, es gibt einen Punkt  $x \notin A$ , so dass jede Umgebung  $V$  von  $x$  die Menge  $A$  schneidet. Da (A1) gilt, können wir eine abzählbare Umgebungsbasis  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $x$  wählen. Da endliche Durchschnitte offener Mengen offen sind, sind endliche Durchschnitte von Umgebungen von  $x$  wiederum Umgebungen von  $x$ , und wir setzen  $U_i = V_1 \cap \dots \cap V_i$ . Dann ist  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Umgebungsbasis mit der Eigenschaft, dass  $U_j \subset U_i$  für alle  $j \geq i$ . Sei  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $a_i \in A \cap U_i$ . Eine Teilmenge  $V \subset X$  ist Umgebung von  $x$  genau dann, wenn es ein  $i_0$  gibt mit  $U_i \subset V$  für alle  $i \geq i_0$ . Es folgt  $a_i \in V$  für alle  $i \geq i_0$ . Daraus folgt, dass  $x$  ein Grenzwert unserer Folge  $a_i$  ist.  $\square$

1.37. BEMERKUNG. Für allgemeine metrisierbare Räume gilt nur (A1), siehe Beispiel 1.34 (2). Es gilt aber der *erste Metrisationssatz von Urysohn*: Wenn  $(X, \mathcal{O})$  die zweite Abzählbarkeitseigenschaft (A2) hat, dann ist  $(X, \mathcal{O})$  genau dann metrisierbar, wenn  $(X, \mathcal{O})$  regulär ist, also (T1) und (T3) erfüllt. Man beachte, dass  $(X, \mathcal{O})$  nach Satz 1.26 dann sogar normal ist.

Die allgemeinen Metrisationssätze von Bing und Nagata-Smirnov geben ein genaues topologisches Äquivalent zur Metrisierbarkeit, sind aber leider nicht ganz so einfach zu formulieren.

Wir können eine Subbasis oder Basis aber auch dazu verwenden, eine Topologie zu definieren.

1.38. SATZ. Sei  $X$  eine Menge, und seien  $\mathcal{B}, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}X$  beliebig.

- (1) Wenn für je endlich viele  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}$  mit  $k \geq 0$  eine Untermenge  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  existiert, so dass  $B_1 \cap \dots \cap B_k = \bigcup \mathcal{U}$ , dann existiert eine eindeutige Topologie  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$  auf  $X$  mit Basis  $\mathcal{B}$ . Wir nennen  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$  die durch die Basis  $\mathcal{B}$  definierte Topologie.
- (2) Es existiert eine eindeutige Topologie  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  auf  $X$  mit Subbasis  $\mathcal{S}$ . Sei  $\mathcal{O}_X$  eine beliebige Topologie auf  $X$  mit  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$ , dann gilt  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{O}_X$ . Wir nennen  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  die durch die Subbasis  $\mathcal{S}$  definierte Topologie.

Insbesondere ist  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  die *kleinste* oder *größte* Topologie auf  $X$ , bezüglich der alle Mengen der Subbasis  $\mathcal{S}$  offen sind.

BEWEIS. Zu (1). Die Menge  $\mathcal{O} = \{ \bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \}$  enthält  $\emptyset = \bigcup \emptyset$  und erfüllt Axiom (3) in Definition 1.10. Nach Voraussetzung gilt  $X = \bigcap \emptyset \subset \mathcal{O}$ , somit ist auch Axiom (1) erfüllt. Um Axiom (2) zu zeigen, seien  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k \subset \mathcal{B}$ , dann folgt

$$\left( \bigcup \mathcal{U}_1 \right) \cap \dots \cap \left( \bigcup \mathcal{U}_k \right) = \bigcup_{U_1 \in \mathcal{U}_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}_k} U_1 \cap \dots \cap U_k.$$

Nach Voraussetzung gilt  $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$  für alle Terme auf der rechten Seite, und da Axiom (3) gilt, auch für deren Vereinigung. Also ist  $\mathcal{O}$  eine Topologie.

Man sieht leicht, dass jede Topologie  $\mathcal{O}'$ , die  $\mathcal{B}$  enthält, alle offenen Mengen aus  $\mathcal{O}$  enthalten muss, also folgt  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ . Wäre umgekehrt  $U \in \mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$ , dann liesse  $U$  sich nicht als Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{O}$  schreiben,  $\mathcal{B}$  wäre dann also keine Basis von  $\mathcal{O}'$ . Also ist  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}} = \mathcal{O}$  die einzige Topologie mit Basis  $\mathcal{B}$ .

Zu (2) setze

$$\mathcal{B} = \{ U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \geq 0, U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S} \},$$

dann erfüllt  $\mathcal{B}$  die Voraussetzung von (1) und definiert eine Topologie  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$  mit Subbasis  $\mathcal{S}$ . Wie unter (1) lässt sich zeigen, dass das die einzige Topologie auf  $X$  mit Subbasis  $\mathcal{S}$  ist; in der Tat enthält jede Topologie  $\mathcal{O}_X$  mit  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$  bereits  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ .  $\square$



## 1.e. Konstruktionen topologischer Räume

In diesem Abschnitt lernen wir, wie man aus bekannten topologischen Räumen neue topologische Räume gewinnen kann.

Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen, dann bezeichne  $\coprod_i X_i$  die disjunkte Vereinigung dieser Mengen, und  $\iota_i: X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$  sei die Inklusion der Menge  $X_i$  in die disjunkte Vereinigung. Da die Mengen  $X_i$  nicht immer paarweise disjunkt sind, müssen wir die disjunkte Vereinigung beliebiger Mengen erst konstruieren, zum Beispiel wie folgt:

$$\coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i \subset I \times \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{und} \quad \iota_i(x_i) = (i, x_i).$$

1.39. DEFINITION. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Die *topologische Summe* der  $X_i$  ist definiert als

$$\coprod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup \right) \quad \text{mit} \quad \mathcal{O}_\sqcup = \left\{ U \subset \coprod_i X_i \mid \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wenn wir  $X_i$  mit der Teilmenge  $\iota_i(X_i) \subset \coprod_i X_i$  identifizieren, dann ist  $U \subset \coprod_i X_i$  genau dann offen, wenn  $U \cap X_i$  für alle  $i \in I$  in  $X_i$  offen ist.

Wir überprüfen, dass  $\mathcal{O}_\sqcup$  eine Topologie ist. Dazu nutzen wir elementare Eigenschaften der Urbild-Abbildung  $\iota_i^{-1}$  aus, nämlich

$$\begin{aligned} \iota_i^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \in \mathcal{O}_i, & \iota_i^{-1}(X) &= X_i \in \mathcal{O}_i, \\ \iota_i^{-1}(U_i \cap \dots \cap U_k) &= \iota_i^{-1}(U_i) \cap \dots \cap \iota_i^{-1}(U_k) \in \mathcal{O}_i & \text{und} & \quad \iota_i^{-1}\left(\bigcup \mathcal{U}\right) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \end{aligned}$$

für  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}$  und  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ .

1.40. SATZ. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume.

- (1) Die Topologie  $\mathcal{O}_\sqcup$  ist die feinste Topologie auf der disjunkten Vereinigung  $\coprod_i X_i$ , für die alle Abbildungen  $\iota_i: X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$  stetig sind.
- (2) Die Topologie  $\mathcal{O}_\sqcup$  ist die einzige Topologie auf  $\coprod_i X_i$ , so dass eine Abbildung  $F$  von  $\coprod_i X_i$  in einen beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen  $F \circ \iota_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$  stetig sind.
- (3) Der Raum  $(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup)$  zusammen mit den Abbildungen  $(\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_i X_i)_{i \in I}$  ist ein Koproduct der  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  in der Kategorie  $\text{Top}$ , das heißt, zu jedem Objekt  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  und jeder Familie von Morphismen  $(F_i: X_i \rightarrow Z)_{i \in I}$  existiert genau ein Morphismus  $F: \coprod_i X_i \rightarrow Z$ , so dass  $F_i = F \circ \iota_i$  für alle  $i \in I$ .

1.41. BEMERKUNG. Die charakteristische Eigenschaft (2) der topologischen Summe wird durch das linke kommutative Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{F \circ \iota_i} & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ \iota_i \downarrow & \nearrow F & \\ (\coprod_i X_i, \mathcal{O}) & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{F_i} & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ \iota_i \downarrow & \dashrightarrow F & \\ (Y, \mathcal{O}_Y) & & \end{array} \quad (1.1)$$

Ein Raum  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  mit stetigen Abbildungen  $\iota_i: X_i \rightarrow Y$  ist ein genau dann ein *Koproduct* im Sinne von Satz 1.40 (3), wenn zu jedem Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  mit stetigen Abbildungen  $F_i: X_i \rightarrow Z$  genau eine stetige Abbildung  $F$  wie im rechten Diagramm existiert.

Wie bei vielen universellen Konstruktionen folgt, dass das Koprodukt bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist durch (3). Wenn also ein anderer Raum  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  mit Abbildungen  $(\eta_i: X_i \rightarrow Y)_i$  die Koprodukteigenschaft erfüllt, dann gibt es genau einen Homöomorphismus  $G: \coprod_i X_i \rightarrow Y$  mit  $\eta_i = G \circ \iota_i$  für alle  $i$ . Dazu betrachten wir die folgenden vier Diagramme.

$$\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\eta_i} & (Y, \mathcal{O}_Y) \\
\downarrow \iota_i & \nearrow G & \\
(\coprod_i X_i, \mathcal{O}) & & 
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xleftarrow{\iota_i} & (\coprod_i X_i, \mathcal{O}) \\
\downarrow \eta_i & \nearrow H & \\
(Y, \mathcal{O}_Y) & & 
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xleftarrow{\iota_i} & (\coprod_i X_i, \mathcal{O}) \\
\downarrow \iota_i & \nearrow \text{id} & \\
(\coprod_i X_i, \mathcal{O}) & & 
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\eta_i} & (Y, \mathcal{O}_Y) \\
\downarrow \eta_i & \nearrow \text{id} & \\
(Y, \mathcal{O}_Y) & & 
\end{array}$$

Die ersten beiden Diagramme zeigen die Existenz eindeutiger Abbildungen  $G$  und  $H$ , die letzten zwei Diagramme zeigen, dass  $H = G^{-1}$ , so dass  $G$  in der Tat ein Homöomorphismus ist. Da dieser Homöomorphismus stets eindeutig ist, kann man mit seiner Hilfe je zwei verschiedene Modelle für das Koprodukt miteinander identifizieren.

BEWEIS des Satzes 1.40. Zu (1) sei  $\mathcal{O}$  eine beliebige Topologie auf  $\coprod_i X_i$ . Es sind genau dann alle Inklusionsabbildungen  $\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_i X_i$  stetig, wenn

$$\iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \quad \text{für alle } U \in \mathcal{O} \text{ und alle } i \in I$$

gilt, wenn also  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\sqcup$ .

Zu (2) seien  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  und  $F: (\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup) \rightarrow (Z, \mathcal{O})$  wie im Satz vorgegeben. Wenn  $F$  stetig ist, sind alle Abbildungen  $F \circ \iota_i$  stetig, da  $\iota_i$  nach (1) stetig ist.

Seien jetzt alle Abbildungen  $F \circ \iota_i$  stetig, und sei  $U \subset Z$  offen, dann ist

$$\iota_i^{-1}(F^{-1}(U)) = (F \circ \iota_i)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$$

offen in  $X_i$  für alle  $i \in I$ . Nach Definition 1.39 gilt  $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_\sqcup$ , also ist  $F$  stetig.

Zur Eindeutigkeit sei  $\mathcal{O}$  eine weitere Topologie auf  $\coprod_i X_i$  mit der in (2) geforderten Eigenschaft. Für alle topologischen Räume  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  ist also jede Abbildung  $F: \coprod_i X_i \rightarrow Z$  genau dann stetig, wenn  $F \circ \iota_i$  für alle  $i \in I$  stetig ist. Wir wählen  $Z = \coprod_i X_i$  mit verschiedenen Topologien und  $F = \text{id}$  und schließen wie folgt. Da

$$\text{id}: \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O} \right) \rightarrow \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O} \right)$$

stetig ist, sind alle

$$\iota_i = \text{id} \circ \iota_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O} \right)$$

stetig, und nach (1) ist  $\mathcal{O}$  gröber als  $\mathcal{O}_\sqcup$ . Da nach (1) alle

$$\text{id} \circ \iota_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup \right)$$

stetig sind, ist auch

$$\text{id}: \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O} \right) \rightarrow \left( \coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup \right)$$

stetig. Also ist  $\mathcal{O}$  nach Bemerkung 1.24 feiner als  $\mathcal{O}_\sqcup$ . Insgesamt folgt also  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\sqcup$  wie behauptet.

Zu (3) seien  $f_i: X_i \rightarrow Z$  stetig. Die einzige Abbildung  $f: \prod_i X_i \rightarrow Z$  mit  $f \circ \iota_i = f_i$  für alle  $i$  wird gegeben durch

$$f(i, x_i) = f_i(x_i),$$

und  $f$  ist stetig nach (2). □

Als nächstes wollen wir Unterräume topologischer Räume betrachten.

1.42. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum, und sei  $Y \subset X$ . Die *Unterraumtopologie* (auch *Relativ-, Spur- oder induzierte Topologie*)  $\mathcal{O}_Y$  ist definiert durch

$$\mathcal{O}_Y = \{ Y \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X \}.$$

Man überlegt sich, dass  $\mathcal{O}_Y$  eine Topologie ist, denn

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \in \mathcal{O}_Y, \quad Y = Y \cap X \in \mathcal{O}_Y,$$

$$(Y \cap U_1) \cap \cdots \cap (Y \cap U_k) = Y \cap (U_1 \cap \cdots \cap U_k) \in \mathcal{O}_Y \quad \text{und} \quad \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (Y \cap U) = Y \cap \bigcup U$$

für alle  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}_X$  und  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ .

Auch die Unterraumtopologie wird durch eine Eigenschaft charakterisiert.

1.43. SATZ. Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum und sei  $Y \subset X$  versehen mit der Unterraumtopologie  $\mathcal{O}_Y$ . Dann gilt:

- (1)  $\mathcal{O}_Y$  ist die grösste Topologie auf  $Y$ , für die die Inklusion  $\iota: Y \hookrightarrow X$  stetig ist.
- (2)  $\mathcal{O}_Y$  ist die einzige Topologie, für die eine Abbildung  $F$  von einem beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  nach  $Y$  genau dann stetig ist, wenn die Abbildung  $\iota \circ F: Z \rightarrow X$  stetig ist.

BEWEIS. Da  $\iota^{-1}(U) = U \cap Y$  gilt, folgt (1) bereits aus der Definition von  $\mathcal{O}_Y$ .

Zu (2) sei zunächst  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  ein beliebiger topologischer Raum, und sei  $F: Z \rightarrow Y$  eine Abbildung. Für eine offene Menge  $V = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$  gilt

$$F^{-1}(V) = F^{-1}(\iota^{-1}(U)) = (\iota \circ F)^{-1}(U),$$

also ist  $F$  genau dann stetig bezüglich  $\mathcal{O}_Y$ , wenn  $\iota \circ F$  stetig ist bezüglich  $\mathcal{O}_X$ .

Um zu zeigen, dass  $\mathcal{O}_Y$  die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft ist, wählen wir eine beliebige Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $Y$ , die die in (2) geforderte Eigenschaft besitzt. Wir machen weiter wie im Beweis von Satz 1.40. Da  $\text{id}: (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O})$  stetig ist, ist auch  $\iota = \iota \circ \text{id}: (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  stetig, und nach (1) ist  $\mathcal{O}$  feiner als  $\mathcal{O}_Y$ . Umgekehrt ist  $\iota = \iota \circ \text{id}: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  stetig, also ist auch  $\text{id}: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Y, \mathcal{O})$  stetig, und  $\mathcal{O}$  ist gröber als  $\mathcal{O}_Y$  nach Bemerkung 1.24. Also stimmen  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}_Y$  überein. □

1.44. DEFINITION. Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume. Eine *Einbettung* von  $X$  nach  $Y$  ist eine injektive Abbildung  $F: X \hookrightarrow Y$ , so dass die induzierte Abbildung von  $(X, \mathcal{O}_X)$  nach  $F(X) \subset Y$  mit der Unterraumtopologie ein Homöomorphismus ist.

Wir betrachten jetzt die Produkttopologie. Dazu bezeichnen wir mit

$$\prod_i X_i = \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i \}$$

das kartesische Produkt einer Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von topologischen Räumen über einer beliebigen Indexmenge  $I$ , und mit  $\pi_i: X \rightarrow X_i$  die Projektion auf die  $i$ -te Komponente.

1.45. DEFINITION. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Das *topologische Produkt* der  $X_i$  ist definiert als

$$\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \left( \prod_i X_i, \mathcal{O}_\prod \right),$$

wobei  $\mathcal{O}_\square$  erzeugt wird von der Subbasis

$$\mathcal{S}_\square = \bigcup_{i \in I} \{ \pi_i^{-1} U_i \mid U_i \in \mathcal{O}_i \}.$$

Da wir  $\mathcal{O}_\square$  über mit Hilfe einer Subbasis erklärt haben, wissen wir aus Satz 1.38, dass  $\mathcal{O}_\square$  eine Topologie ist. Ein endlicher Durchschnitt von Mengen aus  $\mathcal{S}_\square$  hat die Gestalt

$$\prod_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(U_i) \quad \text{mit } U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I.$$

Mit anderen Worten: eine Teilmenge  $U \subset \prod_i X_i$  ist genau dann offen, wenn jeder Punkt  $x$  eine Umgebung der obigen Form hat. Auch hier haben wir wieder eine universelle Eigenschaft.

1.46. SATZ. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume.

- (1) Die Topologie  $\mathcal{O}_\square$  ist die grösste Topologie auf  $\prod_i X_i$ , für die alle Abbildungen  $\pi_i: \prod_i X_i \rightarrow X_i$  stetig sind.
- (2) Die Topologie  $\mathcal{O}_\square$  ist die einzige Topologie  $\mathcal{O}$  auf dem kartesischen Produkt  $\prod_i X_i$ , so dass eine Abbildung  $G$  von einem beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  in das Produkt  $\prod_i X_i$  genau dann stetig ist, wenn die Abbildungen  $\pi_i \circ G$  für alle  $i \in I$  stetig sind.
- (3) Der Raum  $(\prod_i X_i, \mathcal{O}_\square)$  zusammen mit den Abbildungen  $(\pi_i: \prod_i X_i \rightarrow X_i)_{i \in I}$  ist ein Produkt in der Kategorie  $\mathcal{Top}$ , das heißt, zu jedem topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  und jeder Familie stetiger Abbildungen  $(G_i: Z \rightarrow X_i)_{i \in I}$  existiert genau eine stetige Abbildung  $G: Z \rightarrow Y$ , so dass  $G_i = \pi_i \circ G$  für alle  $i \in I$ .

1.47. BEMERKUNG. Die charakterisierende Eigenschaft (2) des Produkts wird durch das linke Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{array}{ccc}
 & (\prod_i X_i, \mathcal{O}) & \\
 G \nearrow & \downarrow \pi_i & \\
 (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{\pi_i \circ G} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & (Y, \mathcal{O}_Y) & \\
 G \dashrightarrow & \downarrow \eta_i & \\
 (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{G_i} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}
 \tag{1.2}$$

Ein Raum  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  mit stetigen Abbildungen  $\eta_i: Y \rightarrow X_i$  ist genau dann ein Produkt im Sinne von Satz 1.46 (3), wenn für alle  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  mit stetigen Abbildungen  $G_i: Z \rightarrow X_i$  genau eine stetige Abbildung  $G$  wie im rechten Diagramm existiert.

Das Produkt ist ebenfalls bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt. Da sich die beiden Diagramme in (1.1) und (1.2) jeweils nur in der Richtung der Pfeile unterscheiden, sagt man, die beiden Konstruktionen in den Definitionen 1.39 und 1.45 seien zueinander *dual*. Daher rührt die Wahl der Bezeichnungen und der Symbole „ $\prod$ “ und „ $\coprod$ “.

Man beachte, dass (geeignet formulierte) universelle Eigenschaften wie in Satz 1.40 (3) oder Satz 1.46 (3) zwar die Eindeutigkeit der beschriebenen Objekte (bis auf eindeutige Isomorphismen) garantieren können, aber nicht die Existenz. Man muss also für jede Kategorie (wie  $\mathcal{Set}$ ,  $\mathcal{Top}$  oder  $\mathcal{Vec}_k$ ) erst beweisen, dass sie Produkte und Koprodukte enthält.

BEWEIS von Satz 1.46. Die Subbasis  $\mathcal{S}_\square$  enthält genau die Urbilder der offenen Teilmengen von  $X_i$  unter den Abbildungen  $\pi_i$ . Also sind alle  $\pi_i$  bezüglich einer Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $\prod_{i \in I} X_i$  genau dann stetig, wenn  $\mathcal{O}_\square \subset \mathcal{O}$ , und es folgt Behauptung (1).

Zu (2) sei  $G$  stetig. Dann sind auch die Abbildungen  $\pi_i \circ G$  stetig nach (1).

Seien umgekehrt alle Abbildungen  $\pi_i \circ G$  stetig. Da die Abbildung  $G^{-1}: \mathcal{P}(\prod_i X_i) \rightarrow \mathcal{P}Z$  mit Vereinigungen und Durchschnitten vertauscht, folgt Stetigkeit von  $G$  bereits, wenn  $G^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Z$  nur für alle  $U \in \mathcal{S}_\square$  gilt. Aber

$$G^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = (\pi_i \circ G)^{-1}U_i \in \mathcal{O}_Z$$

wegen Stetigkeit der Abbildungen  $\pi_i \circ G$ .

Der Beweis der Eindeutigkeit ist völlig analog zu den Beweisen der Sätze 1.40 (2) und 1.43 (2). Behauptung (3) folgt wie in Satz 1.40 (3) aus der entsprechenden Eigenschaft des kartesischen Produkts und (2).  $\square$

1.48. BEMERKUNG. Eine andere natürliche Topologie auf  $\prod_i X_i$  ist die *Box-Topologie*  $\mathcal{O}_\square$  mit Basis

$$\mathcal{B}_\square = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wenn die Indexmenge  $I$  unendlich ist und unendlich viele  $X_i$  nicht die Klumpentopologie tragen, ist  $\mathcal{O}_\square$  echt feiner als  $\mathcal{O}_\square$ . Diese Topologie hat leider nicht so schöne Eigenschaften wie  $\mathcal{O}_\square$ , obwohl sie auf den ersten Blick einfacher aussieht.

Wir sagen, dass eine topologische Eigenschaft  $E$  (wie etwa eine Trennungs- oder Abzählbarkeits-eigenschaft) unter einer Konstruktion (wie etwa dem Produkt, der disjunkten Vereinigung oder der Unterraumkonstruktion) *vererbt* wird, wenn immer dann, wenn alle zugrundeliegenden Topologien die Eigenschaft  $E$  haben, auch die neu konstruierte Topologie diese Eigenschaft hat.

- 1.49. SATZ. (1) *Die Trennungseigenschaften (T0) – (T4) und (T3a) und die Abzählbarkeitseigenschaft (A1) werden unter der disjunkten Vereinigung vererbt, die Eigenschaft (A2) wird vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist.*  
(2) *Es werden (T0) – (T3), (T3a), (A1) und (A2) unter Unterraumbildung vererbt.*  
(3) *Es werden (T0) – (T3), (T3a) unter Produkten vererbt. Die Abzählbarkeitseigenschaften (A1) und (A2) werden vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist.*

BEWEIS. Zu (1) kann man die in den Trennungsaxiomen (T0) – (T4) gesuchten offenen Mengen  $U$  und  $V \subset \prod_{i \in I} X_i$  konstruieren, in dem man für alle  $i \in I$  offene Teilmengen  $\iota_i^{-1}(U)$ ,  $\iota_i^{-1}(V) \subset X_i$  angibt. Analog konstruiert man die in (T3a) gesuchte Funktion, indem man stetige Funktionen auf jedem  $X_i$  definiert und diese mit der universellen Eigenschaft aus Satz 1.40 (3) auf  $\prod_{i \in I} X_i$  zusammensetzt.

Sei  $x = \iota_j(x_j) \in \iota_j(X_j) \subset \prod_{i \in I} X_i$ , und sei  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X_j)$  eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x_j$  in  $X_j$ , dann ist  $\iota_j(\mathcal{U}) \subset \mathcal{P}(\prod_{i \in I} X_i)$  eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x$  in der disjunkten Vereinigung, also wird (A1) vererbt. Wenn  $I$  abzählbar ist und  $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{O}_i$  eine abzählbare Basis von  $\mathcal{O}_i$  für alle  $i \in I$ , dann ist

$$\bigcup_{i \in I} \iota_i(\mathcal{B}_i) \subset \mathcal{O}_\square$$

eine abzählbare Basis der disjunkten Vereinigung.

Zu (2) betrachten wir nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome lassen sich analog beweisen. Sei also  $A \subset Y$  abgeschlossen in der Unterraumtopologie auf  $Y \subset X$ . Dann lässt sich  $Y \setminus A$  zu einer offenen Teilmenge von  $X$  fortsetzen, deren Komplement  $B$  in  $X$  abgeschlossen ist mit  $A = Y \cap B$ . Sei  $y \in Y \setminus A \subset X \setminus B$ . Wir nehmen an, dass (T3) in  $X$  gilt und finden disjunkte offene Mengen  $U, V \subset X$  mit  $y \in U$ ,  $B \subset V$ . Dann sind  $Y \cap U$  und  $Y \cap V$  in  $Y$  offen und disjunkt und trennen  $y$  und  $A$ . Zu (T3a) betrachte  $A, B$  und  $y$  wie oben. Wenn es eine Funktion  $f: X \rightarrow [0, 1]$  mit  $B \subset f^{-1}(0)$  und  $f(y) = 1$  gibt, dann ist  $f|_Y$  stetig nach Satz 1.43 (2) und trennt  $y$  und  $A$  in  $Y$ .

Sei  $\mathcal{U}_x$  abzählbare Umgebungsbasis von  $x \in Y \subset X$  in  $X$ , dann ist

$$\{Y \cap U \mid U \in \mathcal{U}_x\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x$  in  $Y$ . Genauso überträgt sich (A2) von  $X$  auf den Unterraum  $Y$ .

Zu (3) betrachten wir wieder nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome funktionieren analog. Ein Raum  $(Y, \mathcal{O}_y)$  erfüllt (T3) genau dann, wenn es zu jeder Umgebung  $U$  von  $y \in Y$  eine

abgeschlossene Umgebung  $A$  mit  $y \in A \subset U$  gibt. Denn wenn (T3) gilt und  $U$  Umgebung von  $y$  ist, dann ist auch das Innere  $\mathring{U}$  Umgebung von  $y$ . Wir trennen  $B = Y \setminus \mathring{U}$  von  $y$  durch disjunkte offene Mengen  $V, W \subset X$ . Dann ist  $Y \setminus V$  abgeschlossene Umgebung, da  $y \in W \subset Y \setminus V$ , und es gilt  $Y \setminus V \subset \mathring{U} = Y \setminus B \subset U$ . Die Umkehrung gilt analog.

Sei also  $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$  und sei  $U$  Umgebung von  $x$ . Nach Definition 1.45 und der Konstruktion im Beweis von Satz 1.38 (2) existieren  $U_{i_1} \in \mathcal{O}_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}$  mit

$$x \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset U \quad (*)$$

Nach unserer obigen Überlegung existieren abgeschlossene Umgebungen  $A_{i_j} \subset U_{i_j}$  von  $x_{i_j}$ , und

$$\pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) \subset U$$

ist eine abgeschlossene Umgebung von  $x$  in  $\prod_{i \in I} X_i$ . Also gilt (T3).

Zu (T3a) sei  $x \in \prod_{i \in I} X_i$  wie oben und  $B \subset \prod_{i \in I} X_i$  abgeschlossen. Setze  $U = \prod_{i \in I} X_i \setminus B$ . Dann existieren  $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$  wie in (\*). Also gibt es Funktionen

$$f_{i_j}: X_{i_j} \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad f_{i_j}|_{X_{i_j} \setminus U_{i_j}} = 0 \quad \text{und} \quad f_{i_j}(x_{i_j}) = 1.$$

Dann sind die  $f_{i_j} \circ \pi_{i_j}$  nach Satz 1.46 (2) stetig, und

$$f = \min(f_{i_1} \circ \pi_{i_1}, \dots, f_{i_k} \circ \pi_{i_k}): \prod_{i \in I} X_i \rightarrow [0, 1]$$

ist als Minimum endlich vieler stetiger Funktionen wieder stetig mit  $f(x) = 1$  und

$$B \subset X \setminus (\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})) \subset f^{-1}(0).$$

Sei schließlich  $I$  höchstens abzählbar und  $\mathcal{B}_i$  eine abzählbare Basis von  $\mathcal{O}_i$ . Dann erhalten wir eine abzählbare Subbasis

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1} \mathcal{B}_i$$

von  $\mathcal{O}_\square$ , denn jedes Element  $\pi_i^{-1}(U)$  von  $\mathcal{S}_\square$  lässt sich als Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{S}$  schreiben. Dann ist aber auch die Basis

$$\mathcal{B} = \{U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S}\}$$

von  $\mathcal{O}_\square$  abzählbar. Also wird (A2) und analog auch (A1) unter abzählbaren Produkten vererbt.  $\square$

Normalität wird unter Produkten und Unterräumen nicht vererbt, also auch nicht (T4). Die Gegenbeispiele können keine metrischen Räume sein, da sich Metriken auf Unterräume und endliche Produkte übertragen lassen (Übungen 1.110, 1.111), womit diese nach Satz 1.26 wieder normal sind. Dann dürfen unsere Räume auch (A2) nicht erfüllen, da sie sonst nach Bemerkung 1.37 metrisierbar wären. Wir besprechen diese Gegenbeispiele daher nicht hier, sondern verweisen auf [Q].

## 1.f. Kompaktheit

Wir erinnern uns, dass abgeschlossene Intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  viele schöne Eigenschaften haben: stetige Funktionen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  besitzen auf  $I$  ein Maximum und ein Minimum, und jede Folge  $(x_i)_i$  in  $I$  hat mindestens einen Häufungspunkt. Der Grund dafür ist der Satz von Heine-Borel, nach dem abgeschlossene Intervalle kompakt sind.

Wir lernen drei mögliche Definitionen von Kompaktheit kennen. Eine *offene Überdeckung* eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{O})$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  mit  $\bigcup \mathcal{U} = X$ . Ein Punkt  $x \in X$  ist *Häufungspunkt* einer Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  in jeder Umgebung von  $x$  ein  $x_i$  liegt mit  $i \geq n$ . Insbesondere sind Grenzwerte von Teilfolgen immer Häufungspunkte.

1.50. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum. Dann heißt  $X$

- (1) *quasikompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung  $\mathcal{U}$  eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, eine Menge  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$  mit  $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$ ,
- (2) *kompakt*, wenn er Hausdorffsch und quasikompakt ist,
- (3) *abzählbar kompakt*, wenn  $X$  Hausdorffsch ist und es zu jeder abzählbaren offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt,  $X = \bigcup_{i=0}^N U_i$  für ein  $N \in \mathbb{N}$ , und
- (4) *folgenkompakt*, wenn  $X$  Hausdorffsch ist und jede Folge  $x_i \in U$  eine konvergente Teilfolge besitzt.

In der Literatur wird teilweise die Hausdorff-Eigenschaft in (2)–(4) nicht verlangt. Wir halten uns hier an **[Q]**.

1.51. BEMERKUNG. Es folgen einige wohlbekannte Eigenschaften kompakter Mengen.

- (1) Abgeschlossene Unterräume eines (abzählbar / folgen-) kompakten Raumes sind wieder (abzählbar / folgen-) kompakt. Denn sei etwa  $X$  kompakt,  $A \subset X$  abgeschlossen und  $\mathcal{V}$  eine offene Überdeckung von  $A$ , dann existiert  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$  mit

$$\mathcal{V} = \{ U \cap A \mid U \in \mathcal{U} \}.$$

Dann ist aber  $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$  offene Überdeckung von  $X$ , und eine endliche Teilüberdeckung  $\mathcal{U}'$  liefert uns auch eine endliche Teilüberdeckung von  $A$ , nämlich

$$\{ U \cap A \mid U \in \mathcal{U}' \}.$$

- (2) Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  (abzählbar / folgen-) kompakt,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  ein Hausdorff-Raum und  $F: X \rightarrow Y$  stetig, dann ist das Bild  $F \subset Y$ , versehen mit der Unterraumtopologie, wieder (abzählbar / folgen-) kompakt (Übung 1.115).
- (3) Sei  $(X, \mathcal{O})$  (abzählbar / folgen-) kompakt, und sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ist  $f$  beschränkt und nimmt sein Maximum an. Dazu kombinieren wir (2) mit den Sätzen 1.53 und 1.54 unten.
- (4) Jeder kompakte Raum ist normal (Übung 1.116).
- (5) Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Hausdorff-Raum, und sei  $Y \subset (X, \mathcal{O}_X)$  kompakt in der Unterraumtopologie, dann ist  $Y \subset X$  abgeschlossen.

1.52. SATZ. *Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein Hausdorff-Raum.*

- (1) *Wenn  $X$  kompakt oder folgenkompakt ist, ist  $X$  auch abzählbar kompakt.*
- (2) *Es ist  $X$  genau dann abzählbar kompakt, wenn jede Folge in  $X$  einen Häufungspunkt besitzt.*
- (3) *Wenn  $X$  abzählbar kompakt ist und (A1) erfüllt, ist  $X$  folgenkompakt.*
- (4) *Wenn  $X$  abzählbar kompakt ist und (A2) erfüllt, dann ist  $X$  kompakt.*

Die Punkte (2) und (3) zeigen wieder einmal, dass man mit Folgen vorsichtig umgehen muss, wenn das erste Abzählbarkeitsaxiom verletzt ist. Wir fassen den obigen Satz in einem Diagramm zusammen.

$$\text{kompakt} \begin{array}{c} \xleftarrow{(A2)} \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \text{abzählbar kompakt} \begin{array}{c} \xrightarrow{(A1)} \\ \xleftarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \text{folgenkompakt}$$

Wir betrachten im Folgenden vor allem kompakte Räume. In der Analysis ist hingegen der Begriff der Folgenkompaktheit wichtiger.

BEWEIS VON SATZ 1.52. In (1) ist nur zu zeigen, dass jeder folgenkompakte Raum auch abzählbar kompakt ist, die andere Aussage ist klar. Sei also  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare offene Überdeckung. Wir nehmen an, dass es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Wir dürfen außerdem annehmen, dass

$$U_i \not\subset \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt, andernfalls lassen wir  $U_i$  weg und gehen zu einer kleineren Teilüberdeckung über. Wir wählen also eine Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit

$$x_i \in U_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j.$$

Sei  $x \in X$  ein Häufungspunkt (z.B. der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge), dann gilt  $x \in U_{i_0}$  für ein  $i_0 \in \mathbb{N}$ , also liegen unendlich viele Folgenglieder in  $U_{i_0}$ , im Widerspruch zur Konstruktion.

Zu (2) zeigen wir, dass jede Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in einem abzählbar kompakten Raum  $X$  einen Häufungspunkt besitzt, die Rückrichtung folgt wie in (1). Sei  $A_n = \overline{\{x_i \mid i \geq n\}} \neq \emptyset$ , dann ist  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  die Menge aller Häufungspunkte. Wenn wir annehmen, dass  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  keinen Häufungspunkt besitzt, sei  $U_n = X \setminus A_n$ , dann ist  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare offene Überdeckung von  $X$  mit  $U_m \subset U_n$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m < n$ . Es folgt, dass  $X = \bigcup_{i=1}^n U_i = U_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , im Widerspruch zu  $A_n \neq \emptyset$ .

Zu (3) wähle nach (2) einen Häufungspunkt  $x$  der Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Wenn (A1) erfüllt ist, existiert eine abzählbare Umgebungsbasis  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $x$ , und wie im Beweis von Satz 1.36 dürfen wir annehmen, dass  $V_j \subset V_i$  für alle  $i, j \in \mathbb{N}$  mit  $i < j$ . Um eine Teilfolge mit Grenzwert  $x$  zu konstruieren, setzen wir  $i_0 = 1$  und wählen induktiv  $i_j > i_{j-1}$  für  $j \geq 1$  so, dass  $x_{i_j} \in V_j$ . Aus  $V_j \subset V_i$  für alle  $i < j$  folgt  $x_{i_k} \in V_j$  für alle  $k \geq j$ , also konvergiert  $(x_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$ .

Für (4) nehmen wir an, dass  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  eine beliebige offene Überdeckung ist, und dass  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Basis von  $\mathcal{O}$  ist. Wenn wir eine abzählbare Teilüberdeckung von  $\mathcal{U}$  konstruieren können, folgt die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung aus der Annahme, dass  $X$  abzählbar kompakt ist. Wir wählen jetzt zu jedem  $i \in \mathbb{N}$  eine Menge  $U_i \in \mathcal{U} \cup \{\emptyset\}$ , so dass  $V_i \subset U_i$ , falls eine Menge  $U \in \mathcal{U}$  mit  $V_i \subset U$  existiert, und  $U_i = \emptyset$  sonst. Da  $\mathcal{U}$  eine Überdeckung von  $X$  war, muss dann auch  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Überdeckung sein, denn jeder Punkt  $x \in X$  ist in einem  $U \in \mathcal{U}$  enthalten, und es existiert also ein  $i$  mit  $x \in V_i \subset U$ . Elimination aller Indizes  $i$  mit  $U_i = \emptyset$  liefert eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von  $X$ , nach Voraussetzung existiert also auch eine endliche Teilüberdeckung.  $\square$

Es folgen einige weitere Sätze aus Analysis II, die wir nicht noch einmal beweisen wollen.

1.53. SATZ. *Für einen metrischen Raum sind die Begriffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt äquivalent.*

1.54. SATZ (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

1.55. SATZ (Lebesgue). *Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Dann existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $x \in K$  ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $B_\varepsilon(x) \cap K \subset U$  existiert.*

Den folgenden Satz wollen wir ebenfalls nicht beweisen.

1.56. SATZ (Tychonoff). *Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume, dann ist der Produktraum  $\prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{O}_i)$  genau dann kompakt, wenn alle Räume  $(X_i, \mathcal{O}_i)$  kompakt sind.*

Man beachte, dass die Box-Topologie aus Bemerkung 1.48 diese Eigenschaft offensichtlich nicht besitzt.

Schließlich führen wir noch den Begriff der lokalen Kompaktheit ein.

1.57. DEFINITION. Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn er Hausdorffsch ist und jeder Punkt in  $x$  eine kompakte Umgebung besitzt.

1.58. BEISPIEL. Die Räume  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^n$  sind lokalkompakt,  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Q}^n$  jedoch nicht.



Wir benutzen Kompaktheit, um eine interessante und wichtige Topologie auf der Menge  $C(X, Y)$  aller stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  einzuführen.

1.59. DEFINITION. Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume, dann ist die *kompakt-offene Topologie*  $\mathcal{O}_{\text{ko}}$  auf  $C(X, Y)$  definiert als die Topologie zur Subbasis

$$\mathcal{S}_{\text{ko}} = \{S_{K,U} \mid K \subset X \text{ kompakt und } U \subset Y \text{ offen}\}$$

mit  $S_{K,U} = \{F \in C(X, Y) \mid K \subset F^{-1}(U)\}$ .

Wenn der Definitionsbereich lokalkompakt ist, gibt es genug kompakte Mengen, um eine interessante Topologie zu erhalten. Seien  $X, Y, Z$  Mengen, dann gibt es eine Bijektion

$$\text{Abb}(X \times Y, Z) \cong \text{Abb}(X, \text{Abb}(Y, Z)), \quad F \mapsto f = (x \mapsto F(x, \cdot) \in \text{Abb}(Y, Z)).$$

Die Abbildungen  $f$  und  $F$  heißen zueinander *adjungiert*.

1.60. SATZ (Exponentialgesetz). *Es seien  $(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  und  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  topologische Räume,  $f: X \rightarrow C(Y, Z)$  eine beliebige Abbildung, und  $F: X \times Y \rightarrow Z$  dazu adjungiert.*

- (1) *Wenn  $F$  stetig ist, ist  $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (C(Y, Z), \mathcal{O}_{\text{ko}})$  ebenfalls stetig, wir erhalten also eine injektive Abbildung*

$$\alpha: C(X \times Y, Z) \rightarrow C(X, C(Y, Z)).$$

- (2) *Die Abbildung  $\alpha$  ist stetig.*  
 (3) *Sei  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  lokalkompakt. Dann ist  $\alpha$  eine Bijektion.*  
 (4) *Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  Hausdorff und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  lokalkompakt. Dann ist  $\alpha$  ein Homöomorphismus.*  
 (5) *Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokalkompakt. Die kompakt-offene Topologie ist auf  $C(X, Y)$  die grösste Topologie, für die die Auswertungsabbildung*

$$\text{ev}: X \times C(X, Y) \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad \text{ev}(x, g) = g(x)$$

*stetig ist.*

Wenn wir  $Y^X$  anstelle von  $(C(X, Y), \mathcal{O}_{\text{ko}})$  schreiben, ließt sich (4) als  $Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X$ , daher der Name „Exponentialgesetz“. Die Eigenschaft (5) ist eine Möglichkeit, die kompakt-offene Topologie zu charakterisieren.

Die zahlreichen verschiedenen Bedingungen in (1)–(5) sind hässlich. Geht man aber zur Unterkategorie der kompakt erzeugten schwachen Hausdorff-Räume über, so existiert eine Topologie auf  $C(X, Y)$ , für die (1)–(5) ohne weitere Voraussetzungen gelten. Wir lernen später weitere Motivation für diese Unterkategorie kennen.

BEWEIS. Zu (1) sei  $F: X \times Y \rightarrow Z$  stetig. Zu zeigen ist, dass

$$f^{-1}(S_{K,U}) = \{x \in X \mid F(x, y) \in U \text{ für alle } y \in K\}$$

für alle kompakten  $K \subset Y$  und alle offenen  $U \subset Z$  in  $X$  offen ist. Sei dazu  $x \in f^{-1}(S_{K,U})$ . Da  $F^{-1}(U) \subset X \times Y$  in der Produkttopologie offen ist und  $(x, y) \in F^{-1}(U)$  für alle  $y \in K$ , existieren  $V_y \subset X$  und  $W_y \subset Y$  offen mit

$$(x, y) \in V_y \times W_y \subset F^{-1}(U).$$

Die offenen Mengen  $(W_y)_{y \in K}$  überdecken  $K$ , also gibt es endlich viele  $y_1, \dots, y_k \in K$ , so dass

$$K \subset W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_k}.$$

Dann ist

$$V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_k} \subset X$$

offen mit  $x \in V$ , und es gilt

$$V \times K \subset \bigcup_{i=1}^k V \times W_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^k V_{y_i} \times W_{y_i} \subset F^{-1}(U),$$

also  $V \subset f^{-1}(S_{K,U})$ . Somit ist  $f^{-1}(S_{K,U}) \subset X$  offen, und  $f$  ist stetig.

Zu (2) reicht es, für Subbasismengen  $S_{K,W}$  (also  $K \subset X$  kompakt,  $W \subset C(Y, Z)$  offen) zu zeigen, dass  $\alpha^{-1}(S_{K,W})$ , denn  $\alpha^{-1}$  ist mit endlichen Durchschnitten verträglich. Aus dem gleichen Grund reicht es, für  $W$  Subbasismengen einzusetzen, denn für  $L \subset Y$  kompakt und  $U, V \subset Z$  offen gilt

$$S_{L,U \cap V} = \{ f: Y \rightarrow Z \mid f(L) \subset U \text{ und } f(L) \subset V \} = S_{L,U} \cap S_{L,V}.$$

Die Stetigkeit von  $\alpha$  folgt, denn für alle  $K \subset X$  und  $L \subset Y$  kompakt und  $U \subset Z$  offen ist auch die folgende Menge offen:

$$\alpha^{-1}(S_{K,S_{L,U}}) = S_{K \times L, U} \subset C(X \times Y, Z).$$

Zu (3) sei jetzt  $f: X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$  stetig. Es sei  $U \subset Z$  offen und  $(x, y) \in F^{-1}(U)$ . Nach Voraussetzung ist  $f(x): Y \rightarrow Z$  stetig, also ist

$$(f(x))^{-1}(U) = \{ y \in Y \mid F(x, y) \in U \} \subset Y$$

offen. Da  $Y$  lokalkompakt ist, hat  $y$  eine kompakte Umgebung  $K$ , und  $K$  ist normal nach Bemerkung 1.51 (4), erfüllt also insbesondere (T3). Wie im Beweis von Satz 1.49 (3) besitzt  $y$  eine abgeschlossene Umgebung  $A \subset K \cap (f(x))^{-1}(U)$ . Nach Bemerkung 1.51 (1) ist  $A$  dann auch kompakt. Da  $f$  stetig ist, ist

$$V = f^{-1}(S_{A,U})$$

eine offene Umgebung von  $x$  in  $X$ . Daraus folgt aber, dass  $V \times A \subset F^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $(x, y)$  in  $X \times Y$  ist. Also ist  $F^{-1}(U)$  offen und  $F$  daher stetig.

Zu (4) zeigen wir, dass Mengen der Form  $S_{K \times L, U}$  eine Subbasis von  $C(X \times Y, Z)$  bilden. Dann folgt die Offenheit von  $\alpha$  mit dem gleichen Argument wie in (2). Sei dazu  $M \subset X \times Y$  kompakt und  $U \subset Z$  offen, und sei  $F \in S_{M,U}$ . Es reicht, endlich viele Kompakta  $K_i \subset X$  und  $L_i \subset Y$ ,  $i = 1, \dots, n$  zu konstruieren, so dass

$$F \in \bigcap S_{K_i \times L_i, U} \subset S_{M,U}.$$

Da  $X$  und  $Y$  Hausdorff sind, sind die Bilder  $M_X \subset X$ ,  $M_Y \subset Y$  der Projektionen von  $M \subset X \times Y$  nach Bemerkung 1.51 (2) wieder kompakt. Daher finden wir zu jedem Punkt  $(x, y) \in M$  kompakte Umgebungen  $K_x, L_y$ , so dass  $K_x \times L_y \subset F^{-1}(U)$ , also  $F \in S_{K_x \times L_y, U}$  gilt. Wegen Kompaktheit von  $M$  reichen endlich viele der Produkte  $K_x \times L_y$  aus, um  $M$  zu überdecken. Daraus ergibt sich die obige Behauptung.

Zu (5) betrachte die Identität

$$\text{id}: (C(X, Y), \mathcal{O}) \longrightarrow (C(X, Y), \mathcal{O}_{\text{ko}}).$$

Sie induziert gerade die Abbildung

$$\text{ev}: (C(X, Y), \mathcal{O}) \times (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

Also ist  $\text{ev}$  nach (1), (3) und Bemerkung 1.24 genau dann stetig, wenn  $\mathcal{O}$  feiner als  $\mathcal{O}_{\text{ko}}$  ist.  $\square$

1.61. BEMERKUNG. Es sei jetzt  $(Y, d)$  ein metrischer Raum.

- (1) Eine Folge  $(f_i)_i$  in  $C(X, Y)$  konvergiert genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen  $f \in C(X, Y)$ , wenn  $(f_i)_i$  *gleichmäßig auf Kompakta* gegen  $f$  konvergiert (oder kurz: *kompakt konvergiert*), das heißt, wenn es zu jedem Kompaktum  $K \subset X$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$d(f_i(x), f(x)) < \varepsilon$$

für alle  $x \in K$  und alle  $i \geq n$  (Übung 1.117).

- (2) Sei  $X$  lokalkompakt, dann ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie wegen (1) äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz, das heißt, jeder Punkt  $x \in X$  hat eine Umgebung, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert.
- (3) Wenn  $X$  sogar kompakt ist, ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz.

Um gleichmäßige Konvergenz topologisch zu definieren, wenn  $X$  nicht kompakt ist, brauchen wir eine stärkere Struktur als nur eine Topologie auf dem Raum  $Y$ .

### 1.g. Zusammenhang

Wir definieren den Begriff des zusammenhängenden Raumes. Für viele Anwendungen benötigen wir den etwas stärkeren Begriff des Wegzusammenhangs.

1.62. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt

- (1) *zusammenhängend*, wenn es keine zwei nichtleeren offenen Mengen  $U, V \in \mathcal{O}$  gibt mit  $U \cup V = X$  und  $U \cap V = \emptyset$ , und
- (2) *wegzusammenhängend*, wenn zu je zwei  $x, y \in X$  ein Weg  $\gamma$  von  $x$  nach  $y$ , das heißt, eine stetige Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ , existiert.

Bedingung (1) kann man äquivalent mit abgeschlossenen Mengen formulieren.

- 1.63. BEMERKUNG. (1) Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $\emptyset$  und  $X$  die einzigen Mengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.
- (2) Es trage  $Y = \{0, 1\}$  die diskrete Topologie. Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  ist genau dann zusammenhängend, wenn es keine stetige surjektive Abbildung  $F: X \rightarrow Y$  gibt.

1.64. BEISPIEL. Jedes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  ist zusammenhängend. Sei etwa  $I = U \dot{\cup} V$  mit  $U, V \subset (a, b)$  nichtleer, offen und abgeschlossen. Wir fixieren  $u \in U$  und  $v \in V$ , o.B.d.A. sei  $u < v$ . Setze  $x = \inf(V \cap [u, v])$ , dann enthält jede Umgebung von  $x$  sowohl Punkte von  $V$  als auch von  $U$ . Es folgt

$$x \in \overline{V} \cap \overline{U} = V \cap U,$$

da sowohl  $U$  als auch  $V$  abgeschlossen sind, im Widerspruch zu  $U \cap V = \emptyset$ .

- 1.65. SATZ. (1) *Das Bild eines (weg-) zusammenhängenden Raumes unter einer stetigen Abbildung ist wieder (weg-) zusammenhängend.*
- (2) *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

BEWEIS. Sei  $F: X \rightarrow Y$  stetig. Wenn im  $F \subset Y$  nicht zusammenhängend ist, dann gibt es nichtleere, offene Teilmengen  $U, V \subset \text{im } F$  mit  $\text{im } F = U \dot{\cup} V$ . Dann sind auch  $F^{-1}(U)$  und  $F^{-1}(V)$  nicht leer, offen mit  $X = F^{-1}(U) \dot{\cup} F^{-1}(V)$ . Also ist auch  $X$  nicht zusammenhängend.

Sei  $X$  wegzusammenhängend und  $F(x), F(y)$  zwei beliebige Punkte in  $\text{im } F$ . Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ , dann ist  $F \circ \gamma$  ein Weg von  $F(x)$  nach  $F(y)$  in  $\text{im } F$ . Also ist auch  $\text{im } F$  wegzusammenhängend, und es folgt (1).

Zu (2) nehmen wir an, dass es nichtleere, offene und abgeschlossene Teilmengen  $U, V \subset X$  mit  $X = U \dot{\cup} V$  gibt. Wähle  $x \in U$  und  $y \in V$ . Dann kann es keinen Weg  $\gamma$  von  $x$  nach  $y$  geben, denn ansonsten wäre

$$[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \dot{\cup} \gamma^{-1}(V)$$

mit  $\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)$  nichtleer, offen im Widerspruch zu Beispiel 1.64. □

1.66. DEFINITION. Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum, und sei  $x \in X$ .

- (1) Die Vereinigung aller zusammenhängenden Unterräume von  $X$ , die  $x$  enthalten, heißt die *Zusammenhangskomponente*  $K(x)$  von  $x$ .
- (2) Die Menge aller Punkte  $y$ , die sich mit  $x$  durch einen stetigen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  verbinden lassen, heißt die *Wegzusammenhangskomponente* von  $x$ .
- (3) Der Raum  $X$  heißt *total unzusammenhängend*, wenn  $\{x\}$  die Zusammenhangskomponente von  $x$  ist für alle  $x \in X$ .

- 1.67. BEMERKUNG. (1) Zusammenhangskomponenten sind immer abgeschlossen, Wegzusammenhangskomponenten jedoch nicht notwendigerweise, siehe Übung 1.118.
- (2) Seien  $x, y \in X$ , dann gilt entweder  $K(x) = K(y)$  oder  $K(x) \cap K(y) = \emptyset$ , analoges gilt für Wegzusammenhangskomponenten.
  - (3) Aus Beispiel 1.64 folgt, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes  $x$  in  $K(x)$  enthalten ist.
  - (4) Für alle  $x \in X$  gilt

$$K(x) \subset \bigcap \{ V \subset X \mid x \in V, V \text{ ist offen und abgeschlossen} \} .$$

Gleichheit muss nicht gelten.

1.68. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt *lokal (weg-) zusammenhängend*, wenn zu jedem Punkt  $x$  und jeder Umgebung  $U$  von  $x$  eine (weg-) zusammenhängende Umgebung  $V \subset U$  von  $x$  existiert.

1.69. BEMERKUNG. Es gibt lokal zusammenhängende, nicht zusammenhängende topologische Räume, und auch zusammenhängende, nicht lokal zusammenhängende topologische Räume. Wir werden später in der Regel mit lokal wegzusammenhängenden Räumen arbeiten.

## 1.h. Quotienten und Verklebung

In Absatz 1.e hatten wir bereits einige Konstruktionen topologischer Räume vorgestellt. Jetzt wollen wir beliebige Vereinigungen und Quotienten topologischer Räume betrachten, und auch mehrerer Räume zu einem neuen verkleben.

- 1.70. BEMERKUNG. Es sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume und  $X$  eine Menge.
- (1) Gegeben Abbildungen  $f_i: X \rightarrow X_i$  für alle  $i \in I$ , existiert stets eine eindeutige grösste Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ , für die alle  $f_i$  stetig sind. Diese Topologie  $\mathcal{O}$  heißt die von den  $f_i$  *induzierte Topologie* oder auch *Initialtopologie*. Beispiele sind die Unterraumtopologie (Satz 1.43 (1)), die Produkttopologie (Satz 1.46 (1)) sowie die Klumpentopologie, falls  $I = \emptyset$ .
  - (2) Seien umgekehrt Abbildungen  $f_i: X_i \rightarrow X$  für alle  $i \in I$  gegeben, dann existiert stets eine eindeutige feinste Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ , für die alle  $f_i$  stetig sind. Diese Topologie heißt die von den  $f_i$  *koinduzierte Topologie* oder *Finaltopologie*. Beispiele sind die Summentopologie (Satz 1.40 (1)), sowie die diskrete Topologie, falls  $I = \emptyset$ .

Die Existenz und Eindeutigkeit ist in jedem Fall zu zeigen, die Argumente sind immer ähnlich denen in den Beweisen der Sätze 1.40, 1.43 und 1.46. Die Begriffe „Initialtopologie“ und „Finaltopologie“ stammen daher, dass man eine Topologie am „Beginn“ beziehungsweise „Ende“ der betrachteten „Pfeile“, also der Abbildungen  $f_i$ , definiert.

Im Folgenden betrachten wir einige Finaltopologien. Die Quotiententopologie ist dual zur Unterraumtopologie. Anstelle einer injektiven Abbildung  $\iota: Y \hookrightarrow X$  in einen gegebenen topologischen Raum betrachten wir also eine surjektive Abbildung  $\pi: X \twoheadrightarrow Y$  von einem gegebenen Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  auf eine Menge  $Y$ . Dabei können mit  $Y$  als Quotienten  $Y = X / \sim$  nach einer Äquivalenzrelation  $\sim$  auffassen, wobei

$$x \sim y \quad \iff \quad \pi(x) = \pi(y) .$$

1.71. DEFINITION. Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum und  $\pi: X \rightarrow Y$  eine surjektive Abbildung. Dann definieren wir die *Quotiententopologie* oder *Identifizierungstopologie* auf  $Y$  durch

$$\mathcal{O}_Y = \{U \subset Y \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}.$$

Ähnlich wie bei der Summentopologie überlegt man sich, dass  $\mathcal{O}_Y$  tatsächlich eine Topologie ist. Die Quotiententopologie wird durch die folgende Eigenschaft charakterisiert.

1.72. SATZ. *Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum und  $\pi: X \rightarrow Y$  eine surjektive Abbildung.*

- (1) *Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf  $Y$ , für die  $\pi: X \rightarrow Y$  stetig ist.*
- (2) *Die Quotiententopologie ist die einzige Topologie auf  $Y$ , für die eine Abbildung  $f$  von  $Y$  in einen beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  genau dann stetig ist, wenn  $f \circ \pi: X \rightarrow Z$  stetig ist.*

1.73. BEMERKUNG. Um zu sehen, dass Unterraumtopologie und Quotiententopologie zueinander dual sind, vergleichen wir die zugehörigen Diagramme.

$$\begin{array}{ccc}
 & (X, \mathcal{O}_X) & \\
 \iota \circ F \nearrow & \uparrow \iota & \\
 (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{F} & (Y, \mathcal{O}_Y)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{O}_X) & & \\
 \pi \downarrow & \searrow f \circ \pi & \\
 (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{f} & (Z, \mathcal{O}_Z)
 \end{array}$$

Das linke Diagramm beschreibt die Situation aus Satz 1.43 (2), das rechte die aus Satz 1.72 (2).

BEWEIS von Satz 1.72. Damit  $\pi: X \rightarrow Y$  stetig ist, dürfen höchstens Teilmengen  $U \subset Y$  mit  $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$  offen sein, also gilt (1).

Zu (2) kopieren wir den Beweis von Satz 1.43 (2) und drehen alle Pfeile um. □

1.74. BEMERKUNG. Sei  $p: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow Y$  surjektiv, und  $\mathcal{O}_Y$  sei die Quotiententopologie. Wir untersuchen, welche topologischen Eigenschaften sich von  $X$  auf  $Y$  vererben.

- (1) Wenn  $X$  quasikompakt ist, dann ist auch  $Y$  quasikompakt, da  $Y = p(X)$ . Wenn  $X$  kompakt und  $Y$  Hausdorffsch ist, dann ist  $Y$  auch kompakt, vgl. Übung 1.115.
- (2) Wenn  $X$  (weg-) zusammenhängend ist, dann ist auch  $Y$  (weg-) zusammenhängend. Dies folgt wiederum aus der Stetigkeit von  $p$  und Satz 1.65 (1).
- (3) Trennungseigenschaften vererben sich im allgemeinen nicht von  $X$  auf  $Y$ , wie die Übungen 1.124 und 1.126 zeigen. Insbesondere vererbt sich auch Kompaktheit nicht automatisch.
- (4) Auch Abzählbarkeitseigenschaften vererben sich nicht immer, siehe Bemerkung 1.83 unten.

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an die Äquivalenzrelation  $\sim$  beziehungsweise die Abbildung  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  lassen sich einzelne Trennungsaxiome von  $X$  auf den Quotienten übertragen. Diese Sätze helfen uns aber bei den Spezialfällen, die wir als nächstes betrachten wollen, nicht weiter, daher lassen wir sie hier weg.

Als nächstes wollen wir die Summen- und die Quotiententopologie benutzen, um zwei weitere universelle Konstruktionen zu erklären. Wir benötigen beide später bei der Konstruktion von CW-Komplexen.

Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume, sei  $V \subset Y$  eine Teilmenge, und seien  $f: V \rightarrow X$  eine zunächst beliebige Abbildung. Wir betrachten die Menge

$$X \cup_f Y = (X \dot{\cup} Y) / \sim,$$

wobei  $\sim$  die von  $y \sim f(y)$  für alle  $y \in V$  erzeugte Äquivalenzrelation ist. Hierbei *erzeugt* jede Teilmenge  $S \subset M \times M$  eine Äquivalenzrelation  $R$  auf  $M$ , so dass  $aRb$  genau dann gilt, wenn es

eine Kette  $a = a_0, a_1, \dots, a_k = b$  von Elementen von  $M$  mit  $(a_{i-1}, a_i) \in S$  oder  $(a_i, a_{i-1}) \in S$  für alle  $i = 1, \dots, k$  gibt. Die Punkte in  $V$  werden in unserem Fall entlang der Abbildung  $f$  an  $X$  „angeklebt“. Die Quotiententopologie auf  $X \cup_f Y$  heißt hier auch „Verklebungstopologie“. Man beachte: die kanonische Abbildung  $i: X \hookrightarrow X \cup_f Y$  ist injektiv, die Abbildung  $j: Y \rightarrow X \cup_f Y$  im allgemeinen jedoch nicht.

Ein wichtiger Spezialfall besteht darin, dass  $f$  stetig ist. In diesem Fall erfüllt  $W = X \cup_f Y$  die universelle Eigenschaft eines *Pushouts*.

1.75. FOLGERUNG. Seien  $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume,  $V \subset Y$  und  $f: V \rightarrow X$  stetig. Der Raum  $X \cup_f Y$  trage die Identifizierungstopologie zur Abbildung  $\pi: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ . Sei  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  ein weiterer topologischer Raum und  $g: X \rightarrow Z$  und  $h: Y \rightarrow Z$  stetig.

- (1) Es existiert genau dann eine Abbildung  $k: X \cup_f Y \rightarrow Z$  mit  $g = k \circ i$  und  $h = k \circ j$ , wenn  $g \circ f = h|_V: V \rightarrow Z$ , und  $k$  ist in diesem Fall eindeutig.
- (2) In diesem Fall ist  $k$  stetig.

$$\begin{array}{ccc}
 & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
 & \xrightarrow{h} & \\
 (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{j} & (W, \mathcal{O}_W) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (V, \mathcal{O}_V) & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{O}_X)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{---} k \text{---} \\
 \text{---} g \text{---}
 \end{array}
 \tag{1.3}$$

BEWEIS. Zu (1) existiert stets genau eine Abbildung

$$\bar{k}: X \sqcup Y \rightarrow Z \quad \text{mit} \quad \bar{k}|_X = g \quad \text{und} \quad \bar{k}|_Y = h,$$

da die disjunkte Vereinigung ein Koproduct in der Kategorie der Mengen ist. Damit  $k$  existiert, muss  $\bar{k}$  mit der Äquivalenzrelation  $\sim$  verträglich sein. Das ist äquivalent zu

$$(g \circ f)(y) = \bar{k}(f(y)) = \bar{k}(y) = h(y) \quad \text{für alle } y \in V.$$

Sei nun  $k: X \cup_f Y \rightarrow Z$  eine Abbildung mit  $g = k \circ i$  und  $h = k \circ j$ , dann gilt  $(k \circ \pi)|_X = g$  und  $(k \circ \pi)|_Y = h$ , und es folgt  $\bar{k} = k \circ \pi$  wegen Satz 1.40 (3). Da  $\pi$  surjektiv ist, ergibt sich daraus die Eindeutigkeit von  $k$ .

Zu (2) folgern wir nach Satz 1.40 (2), dass  $\bar{k}$  stetig ist. Da  $\bar{k} = k \circ \pi$ , folgt aus Satz 1.72 (2) die Stetigkeit von  $k$ .  $\square$

Sei jetzt  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine gerichtete Familie topologischer Räume, das heißt, es existieren (beliebige) Abbildungen  $f_{ij}: X_i \rightarrow X_j$  für alle  $i < j$  mit

$$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}: X_i \rightarrow X_k \quad \text{für alle } i < j < k.$$

Wir betrachten den *Kolimes*

$$\lim_{\rightarrow} X_i = \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i / \sim, \tag{1.4}$$

wobei

$$X_i \ni x_i \sim x_j \in X_j \iff f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j) \quad \text{für ein } k > i, j.$$

Die *schwache Topologie* auf  $\lim_{\rightarrow} X_i$  ist die von den natürlichen Abbildungen  $g_i: X_i \rightarrow \lim_{\rightarrow} X_i$  koinduzierte Topologie.

Ein wichtiger Spezialfall besteht darin, dass alle  $f_{ji}$  stetig sind.

1.76. FOLGERUNG. Seien  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  topologische Räume und  $f_{ij}: X_i \rightarrow X_j$  stetige Abbildungen mit  $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$  für alle  $i < j < k$ . Sei  $\varinjlim X_i$  mit der Identifizierungstopologie zur Abbildung  $\coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \varinjlim X_i$  versehen. Sei  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  ein weiterer topologischer Raum und  $(h_i: X_i \rightarrow Z)_{i \in \mathbb{N}}$  stetige Abbildungen.

- (1) Es existiert genau dann eine Abbildung  $\ell: \varinjlim X_i \rightarrow Z$  mit  $h_i = \ell \circ g_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , wenn  $h_j \circ f_{ji} = h_i: X_i \rightarrow Z$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt, und  $\ell$  ist in diesem Fall eindeutig.
- (2) In dieser Situation ist  $\ell$  stetig.

Also erfüllt  $W = \varinjlim X_i$  die universelle Eigenschaft eines Kolimes.

$$\begin{array}{ccc}
 & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
 & \nearrow^{h_0} & \uparrow \ell \\
 (X_0, \mathcal{O}_0) & \xrightarrow{f_{01}} & (X_1, \mathcal{O}_1) \longrightarrow \dots \\
 & \searrow_{g_0} & \downarrow_{g_1}
 \end{array}
 \tag{1.5}$$

BEWEIS. Dieser Beweis ist völlig analog zum Beweis von Folgerung 1.75. □

In Wirklichkeit ist die Kolimes-Konstruktion wesentlich allgemeiner und umfasst die universellen Eigenschaften in den Diagrammen (1.3) und (1.5) als Spezialfälle.

### 1.i. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten

Wir beschreiben jetzt zwei wichtige Klassen topologischer Räume. Die Grundidee bei beiden Konstruktionen besteht darin, Räume zu konstruieren, die sich in einem gewissen Sinne ähnlich verhalten wie  $\mathbb{R}^n$  mit der Standardbasis.

1.77. DEFINITION. Eine (topologische) Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \in \mathbb{N}$  ist ein Hausdorff-Raum  $M$  mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt  $p \in M$  eine Umgebung  $U \subset M$  besitzt, die homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist.

1.78. BEISPIEL. Die folgenden Räume sind Mannigfaltigkeiten.

- (1) Der Raum  $\mathbb{R}^n$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ .
- (2) Die Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Hierzu betrachtet man die stereographischen Projektion vom Nord- und Südpol  $(0, \dots, 0, \pm 1)$  aus auf den Unterraum  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ .
- (3) Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Hierzu reicht es zu zeigen, dass offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  sind. Betrachte dazu die Abbildung

$$B_r(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad y \mapsto \frac{1}{r - |y - x|} (y - x).$$

- (4) Sei  $M \subset \mathbb{R}^m$  eine  $n$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit, dann ist  $M$ , versehen mit der Unterraumtopologie, eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

1.79. BEMERKUNG. (1) Wir verlangen die Hausdorff-Eigenschaft (T2), um den Raum aus Beispiel 1.29 und ähnliche Konstrukte auszuschließen. Wir verlangen abzählbare Basen (A2), damit unsere Mannigfaltigkeiten nicht zu groß werden, betrachte dazu etwa das Produkt aus dem Intervall  $(0, 1)$  mit einer überabzählbaren, diskreten Menge. Man

beachte, dass (A1) und (T1) automatisch erfüllt sind, da jeder Punkt eine Umgebung homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  besitzt.

- (2) Mannigfaltigkeiten erfüllen (T3), sind also regulär, daher nach dem ersten Metrisationssatz von Urysohn metrisierbar (siehe Bemerkung 1.37), also insbesondere sogar normal. Sei etwa  $A \subset M$  abgeschlossen und  $p \in M \setminus A$ , dann wählen wir eine zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorphe Umgebung  $U \subset M$  von  $p$  und betrachten  $p \subset \mathbb{R}^n$  und  $A \cap U \subset \mathbb{R}^n$ . Dann existiert  $r > 0$ , so dass  $D_r(p) \cap (A \cap U) = \emptyset$  in  $\mathbb{R}^n$ . Da  $M$  hausdorffsch und  $D_r(p)$  kompakt ist, ist das Bild  $K$  von  $D_r(p)$  unter der Inklusion  $U \hookrightarrow M$  kompakt und insbesondere abgeschlossen nach Bemerkung 1.51 (2) und (5). Daher trennen die offenen Mengen  $\overset{\circ}{K}$  und  $M \setminus K$  den Punkt  $p$  von der Menge  $A$ .
- (3) Wir werden später sehen, dass die Dimension eine lokale Invariante ist: eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  genau dann isomorph, wenn  $n = m$  gilt. Wir verlangen, dass eine Mannigfaltigkeit nur aus Komponenten einer festgelegten Dimension besteht.

Mit dieser Definition lässt sich zeigen, dass man jede Mannigfaltigkeit in den  $\mathbb{R}^N$  einbetten kann, wenn  $N$  hinreichend groß gewählt wurde.

Der Begriff der Mannigfaltigkeit ist jedoch für viele Zwecke zu speziell. Die folgende induktive Konstruktion liefert hingegen (überraschenderweise) eine Klasse von topologischen Räumen, die für viele Zwecke allgemein genug ist. Als Referenz verweisen wir auf den Anhang von [H1] und auf Abschnitt 4.c.

Wir bezeichnen mit  $D^n = D_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  den abgeschlossenen  $n$ -dimensionalen Einheitsball, und mit  $\partial D^n = S^{n-1}$  seinen Rand. Hier wie auch im folgenden bezieht sich ein hochgestellter Index immer auf eine Art Dimension und bezeichnet insbesondere nicht etwa einen Exponenten.

- (1) Wir beginnen mit einem diskreten topologischen Raum  $X^0$ , dem 0-Gerüst oder 0-Skelett, dessen Punkte wir auch 0-Zellen nennen.
- (2) Sei das  $n-1$ -Gerüst  $X^{n-1}$  bereits induktiv konstruiert, sei  $I^n$  eine beliebige Indexmenge, und sei

$$(\varphi_i^n: \partial D^n \rightarrow X^{n-1})_{i \in I^n}$$

eine Familie stetiger Abbildungen. Definiere die natürliche Abbildung

$$\varphi^n = \bigcup_i \varphi_i^n: \prod_i \partial D^n \rightarrow X^{n-1} \quad \text{mit} \quad \left( \bigcup_i \varphi_i^n \right)(i, x) = \varphi_i^n(x).$$

Dann konstruieren wir das  $n$ -Gerüst  $X_n$ , indem wir  $\#I^n$ -viele Kopien von  $D^n$  mit  $X^{n-1}$  entlang der Abbildung  $\phi^n$  verkleben wie in Folgerung 1.75:

$$X^n = \left( \prod_{i \in I^n} D^n \right) \cup_{\phi^n} X^{n-1}.$$

Somit erhalten wir auf die  $X^n$  die Quotiententopologie bezüglich einer Projektionsabbildung

$$\left( X^{n-1} \sqcup \prod_{i \in I^n} D^n, \mathcal{O}_{\sqcup} \right) \xrightarrow{\Pi^n} (X^n, \mathcal{O}_{X^n}). \quad (1.6)$$

- (3) Wir können entweder nach endlich vielen Schritten aufhören mit  $X = X^n$ , oder diesen Prozess für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  fortsetzen, in diesem Fall setzen wir

$$X = \varinjlim X^n$$

wie in Folgerung 1.76, und erhalten wiederum eine Quotiententopologie bezüglich

$$\prod_{n \in \mathbb{N}_0} (X^n, \mathcal{O}_{X^n}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X).$$



Als Menge ist  $X$  die aufsteigende Vereinigung der Räume  $X^0 \subset X^1 \subset \dots$

In  $X$  gehört zu jedem  $i \in I^n$  eine *charakteristische Abbildung*

$$\Phi_i^n: D^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X,$$

die die Verklebeabbildung  $\varphi_i^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  fortsetzt, und  $\Phi_i^n|_{B^n}$  ist ein Homöomorphismus von  $B^n$  auf sein Bild  $e_i^n = \Phi_i^n(B^n)$ .

Aus den Definitionen der Verklebungstopologie folgt induktiv, dass eine Teilmenge  $U \cap X^n$  genau dann in  $X^n$  offen ist, wenn alle  $(\Phi_i^j)^{-1}(U) \subset D^j$  offen sind für alle  $j \leq n$  und  $i \in I^j$ . Für  $n = 0$  ist das klar, da  $X^0$  die diskrete Topologie trägt. Im Induktionsschritt ist  $U \cap X^n$  genau dann offen, wenn das für  $U \cap X^{n-1}$  und  $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$  für alle  $i \in I^n$  gilt, also genau dann, wenn  $(\Phi_i^j)^{-1}(U) \subset D^j$  offen sind für alle  $j \leq n$  und  $i \in I^j$ .

Nach Definition der Kolimes-Topologie ist  $U \subset X$  offen, wenn  $U \cap X^n$  in  $X^n$  offen ist für alle  $n$ , wenn also alle  $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$  offen sind. In der obigen Argumentation können wir „offen“ überall durch „abgeschlossen“ ersetzen. Insgesamt können wir also  $X$  als einen großen Quotienten schreiben bezüglich der Vereinigung aller charakteristischen Abbildungen

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}_0} \coprod_{i \in I^n} (D^n, \mathcal{O}_{D^n}) \xrightarrow{\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{i \in I^n} \Phi_i^n} (X, \mathcal{O}_X). \quad (1.7)$$

Nach Definition 1.71 sind dann die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- (1) Die Menge  $X$  trägt die CW-Topologie  $\mathcal{O}_{CW}$ .
- (2) Eine Teilmenge  $U \subset X$  ist genau dann offen, wenn  $(\Phi_i^n)^{-1}(U) \subset D^n$  in der üblichen Topologie offen ist für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle  $i \in I^n$ .
- (3) Eine Teilmenge  $A \subset X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $(\Phi_i^n)^{-1}(A) \subset D^n$  in der üblichen Topologie abgeschlossen ist für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle  $i \in I^n$ .

Die übliche Topologie auf  $D^n$  ist hier einfach die Unterraum-Topologie zu  $D^n \subset \mathbb{R}^n$ .

1.80. DEFINITION. Ein so konstruierter topologischer Raum  $X$  heißt *Zellkomplex* oder *CW-Komplex*. Die Teilmenge  $X^n \subset X$  heißt *n-Gerüst* (*n-Skelett*) von  $X$ . Die Abbildungen

$$\varphi_i^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \hookrightarrow X$$

heißen *Verklebeabbildungen*, die

$$\Phi_i^n: D^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X$$

*charakteristische Abbildungen*. Man nennt  $e_i^n = \Phi_i^n(B^n)$  eine *n-Zelle* und  $\bar{e}_i^n = \Phi_i^n(D^n)$  eine *abgeschlossene n-Zelle* von  $X$ .

Die Buchstaben „CW“ stehen für *closure finite, weak topology*, siehe unten.

1.81. BEISPIEL. Die folgenden Räume sind CW-Komplexe:

$$\begin{array}{llll} X = S^n & \text{mit} & X^0 = \dots = X^{n-1} = \text{pt}, & X^n = \dots = S^n; \\ & \text{oder mit} & X^j = S^j \quad \text{für } j \leq n, & X^n = \dots = S^n; \\ X = \mathbb{R} & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}, & X^1 = \dots = \mathbb{R}; \\ X = \mathbb{R}^2 & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}^2, \quad X^1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, & X^2 = \dots = \mathbb{R}^2; \\ X = \mathbb{R}^n & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}^n, \quad \dots, & X^n = \dots = \mathbb{R}^n; \end{array}$$

Das erste Beispiel zeigt, dass ein gegebener topologischer Raum auf (viele) verschiedene Weisen als CW-Komplex geschrieben werden kann.

Wir geben exemplarisch charakteristische Funktionen für die ersten zwei CW-Strukturen auf  $S^n$  an. Für die erste wählen wir  $\Phi^0(\{0\}) = e_{n+1} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und

$$\Phi^n(v) = \begin{pmatrix} \sin(\pi |v|) \frac{v}{|v|} \\ -\cos(\pi |v|) \end{pmatrix} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}.$$

Für die zweite CW-Struktur setzen wir beispielsweise

$$\Phi_{\pm}^j(v) = \begin{pmatrix} v \\ \pm \sqrt{1 - |v|^2} \\ 0 \end{pmatrix} \in S^j \times \{0\} = S^n \cap \mathbb{R}^{j+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^j \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n-j}$$

für alle  $j \leq n$  und alle  $v \in D^j$ .

Wir wollen jetzt einige grundlegende Fakten über CW-Komplexe zusammenstellen.

1.82. BEMERKUNG. Sei  $X = \lim_{\rightarrow} X^n$  ein CW-Komplex, dann ist die Verklebungstopologie auf  $X^n$  gleich der von  $X$  induzierten Unterraumtopologie für alle  $n$ . Es reicht zu zeigen, dass Teilmengen  $A \subset X^n$  als Teilmengen von  $X^n$  genau dann abgeschlossen sind, wenn sie als Teilmengen von  $X$  abgeschlossen sind. Nach Definition 1.71 der Quotiententopologie heißt das

$$\begin{aligned} & (\Phi_i^m)^{-1}(A) \subset D^m \text{ abgeschlossen für alle } m \leq n \text{ und alle } i \in I^m \\ \iff & (\Phi_i^m)^{-1}(A) \subset D^m \text{ abgeschlossen für alle } m \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } i \in I^m. \end{aligned}$$

Die Richtung „ $\Leftarrow$ “ ist klar. Zu „ $\Rightarrow$ “ schließen wir durch Induktion über  $m$ : Wenn  $A \subset X^{m-1}$  abgeschlossen ist, dann ist

$$(\Phi_i^m)^{-1}(A) = (\varphi_i^m)^{-1}(A) \subset S^{m-1} \subset D^m$$

abgeschlossen in  $S^{m-1}$  wegen der Stetigkeit der Verklebeabbildungen  $\varphi_i^n$ , und in  $D^m$ , da  $S^{m-1} \subset D^m$  abgeschlossen ist. Also ist  $A$  in  $X^m$  ebenfalls abgeschlossen, und damit auch in  $X$ . Somit trägt  $X^n$  die von  $X = \lim_{\rightarrow} X^n$  induzierte Unterraumtopologie.

1.83. BEMERKUNG. CW-Komplexe erfüllen nicht automatisch das erste Abzählbarkeitsaxiom (A1) und sind daher auch nicht immer metrisierbar, siehe Beispiel 1.34 (2). Als Beispiel betrachten wir einen CW-Komplex mit 0-Skelett

$$X^0 = \mathbb{N} \dot{\cup} \{*\}.$$

Wir wählen  $I^1 = \mathbb{N}$  und definieren Verklebefunktionen

$$\varphi_n^1: \{-1, 1\} \rightarrow X^0 \quad \text{mit} \quad \varphi_n^1(-1) = * \quad \text{und} \quad \varphi_n^1(1) = n.$$

Unser CW-Komplex  $X = X^1$  sieht also aus wie ein Stern mit abzählbar vielen Zacken. Äquivalent schreiben wir

$$X = ([-1, 1] \times \mathbb{N}) / \sim,$$

wobei  $(-1, m) \sim (-1, n)$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ , während alle anderen Punkte nur zu sich selbst äquivalent sind. Da der Raum  $[-1, 1] \times \mathbb{N}$  sogar das zweite Abzählbarkeitsaxiom (A2) erfüllt, erhalten wir auch ein Gegenbeispiel zu Bemerkung 1.74 (4). Im Beweis unten werden wir auch sehen, dass die CW-Topologie auf  $X$  echt feiner ist als die metrische Topologie, bei der wir  $X$  als Vereinigung radialer Strecken in einem Vektorraum mit der französischen Eisenbahnmetrik aus Übung 1.95 auffassen; dazu wählen wir etwa  $U_n = B_{1/n}(*).$

Es sei  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Umgebungen von  $*$  in  $X$ . Mit Hilfe eines Diagonalarguments konstruieren wir eine offene Umgebung  $V$  von  $*$  in  $X$ , so dass kein  $U_n$  ganz in  $V$  enthalten ist. Damit zeigen wir, dass  $*$  keine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, dass (A1) also verletzt ist.

Nach Definition der Quotiententopologie reicht es,

$$(\Phi_n^1)^{-1}(V) \subset [-1, 1]$$

für alle  $n$  als offene Umgebung von  $-1 = (\Phi_n^1)^{-1}(*)$  anzugeben. Da  $[-1, 1]$  insbesondere (T3) erfüllt, finden wir (wie im Beweis von Satz 1.49 (3)) eine offene Umgebung  $V_n$  von  $-1$  in  $[-1, 1]$  mit

$$\overline{V}_n \subset ((\Phi_n^1)^{-1}(U_n))^\circ.$$

Für die offene Menge

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n^1(V_n) \subset X$$

gilt offensichtlich  $U_n \not\subset V$  für alle  $n$  wie gewünscht, denn

$$(\Phi_n^1)^{-1}(U_n) \not\subset (\Phi_n^1)^{-1}(V).$$

1.84. SATZ. *CW-Komplexe sind normal.*

BEWEIS. Sei  $X = \lim_{\rightarrow} X^n$  ein CW-Komplex. Zu zeigen ist, dass (T1) und (T4) gelten, und (T1) ist äquivalent dazu, dass Punkte in  $X$  abgeschlossen sind.

Sei also  $x \in X$ . Da  $X = \lim_{\rightarrow} X^n$ , existiert genau ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  mit  $x \in X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$ . Da

$$X^{n_0} \setminus X^{n_0-1} = \coprod_{i \in I^{n_0}} e_i^{n_0},$$

liegt  $x$  in genau einer Zelle  $e_{i_0}^{n_0}$ . Wir betrachten  $X^{n_0}$  als Quotienten wie in (1.6), dann ist das Urbild  $\{x\}$  gerade ein Punkt in einer Kopie von  $D^{n_0}$  und somit abgeschlossen in  $X^{n_0}$  nach Definition der Quotiententopologie.

Wie in Bemerkung 1.82 folgt aus der Stetigkeit der Verklebeabbildungen induktiv, dass  $\{x\}$  in  $X^n$  abgeschlossen ist für alle  $n > n_0$ . Jetzt können wir aus der Definition der Quotiententopologie in (1.7) darauf schließen, dass  $\{x\} \subset X$  abgeschlossen ist. Da  $x \in X$  beliebig war, gilt also (T1).

Wir zeigen jetzt, dass auch (T4) erfüllt ist. Dazu seien  $A, B \subset X$  abgeschlossen. Wir konstruieren induktiv offene Mengen  $U^n, V^n \subset X^n$  mit

$$A \cap X^n \subset U^n, \quad B \cap X^n \subset V^n \quad \text{und} \quad \overline{U}^n \cap \overline{V}^n = \emptyset. \quad (*)$$

Für  $n = 0$  können wir  $U^0 = A \cap X^0$  und  $V^0 = B \cap X^0$  wählen. Danach wählen wir in jedem weiteren Schritt für  $n > 0$  offene Mengen  $U^n$  und  $V^n \subset X^n$ , die (\*) erfüllen sowie

$$U^n \cap X^{n-1} = U^{n-1} \quad \text{und} \quad V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}. \quad (**)$$

Aus der Definition der schwachen Topologie und (\*), (\*\*) folgt, dass die Mengen

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} U^n \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} V^n$$

in  $X$  offen sind mit  $A \subset U, B \subset V$  und  $U \cap V = \emptyset$ , womit (T4) vorbehaltlich der Konstruktion der  $U^n, V^n$  bewiesen ist.

Um  $U^n$  und  $V^n$  aus  $U^{n-1}$  und  $V^{n-1}$  zu konstruieren, können wir  $U^n \cap e_i^n$  für jede Zelle  $e_i^n \in X^n \setminus X^{n-1}$  einzeln konstruieren. Wir betrachten dazu die Mengen

$$\begin{aligned} A_i^n &= (\Phi_i^n)^{-1}(A), & B_i^n &= (\Phi_i^n)^{-1}(B) & \subset & D^n, \\ \text{und} \quad M_i^n &= (\varphi_i^n)^{-1}(U^{n-1}), & N_i^n &= (\varphi_i^n)^{-1}(V^{n-1}) & \subset & \partial D^n = S^{n-1}, \end{aligned}$$

dabei sind  $A_i^n$  und  $B_i^n$  abgeschlossen. Sei  $d$  die euklidische Metrik auf  $D^n \subset \mathbb{R}^n$ . Nach dem Satz 1.54 von Heine-Borel ist  $D^n$  kompakt, also auch alle abgeschlossenen Teilmengen. Da

$$\overline{M}_i^n \cap B_i^n = \overline{N}_i^n \cap A_i^n = \emptyset,$$

folgt aus der Kompaktheit von  $A_i^n$ ,  $B_i^n$ ,  $\overline{M_i^n}$  und  $\overline{N_i^n}$ , dass

$$\varepsilon_i^n = \frac{1}{2} \min \left\{ \inf_{x \in M_i^n} \inf_{y \in B_i^n} d(x, y), \inf_{x \in N_i^n} \inf_{y \in A_i^n} d(x, y), 1 \right\} = \frac{1}{2} \min \{ d(M_i^n, B_i^n), d(A_i^n, N_i^n), 1 \} > 0.$$

Wir erhalten also offene Teilmengen  $P_i^n, Q_i^n \subset D^n$  der Gestalt

$$P_i^n = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in M_i^n \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\}$$

und

$$Q_i^n = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in N_i^n \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\}$$

mit

$$P_i^n \cap S^{n-1} = M_i^n, \quad Q_i^n \cap S^{n-1} = N_i^n, \quad \text{und} \quad \overline{P_i^n} \cap B_i^n = \overline{Q_i^n} \cap A_i^n = P_i^n \cap Q_i^n = \emptyset.$$

Schliesslich benutzen wir die Normalität der offenen Kreisscheibe  $B^n$ , um offene Mengen  $R_i^n, T_i^n \subset B^n$  zu konstruieren, so dass

$$\begin{aligned} R_i^n \supset A_i^n \cap B^n, & \quad \emptyset = \overline{R_i^n} \cap \overline{Q_i^n} \cup \overline{B_i^n}, \\ T_i^n \supset B_i^n \cap B^n, & \quad \text{und} \quad \emptyset = \overline{T_i^n} \cap \overline{P_i^n} \cup \overline{R_i^n}. \end{aligned}$$

Da

$$(P_i^n \cup R_i^n) \cap \partial D^n = (\varphi_i^n)^{-1}(U^{n-1}) \quad \text{und} \quad (Q_i^n \cup T_i^n) \cap \partial D^n = (\varphi_i^n)^{-1}(V^{n-1}),$$

können wir jetzt  $U^n$  und  $V^n$  so definieren, dass

$$(\Phi_i^n)^{-1}(U^n) = P_i^n \cup R_i^n \quad \text{und} \quad (\Phi_i^n)^{-1}(V^n) = Q_i^n \cup T_i^n$$

für alle  $i$  offen ist und (\*) und (\*\*) erfüllt. □

1.85. DEFINITION. Ein *Unterkomplex*  $Y$  eines CW-Komplexes  $X$  ist ein abgeschlossener Unterraum, der aus einer Vereinigung von Zellen von  $X$  besteht. Ein CW-Komplex heißt *endlich*, wenn er aus endlich vielen Zellen besteht.

Da einzelne  $n$ -Zellen  $e_i^n$  für  $n > 0$  selbst nicht abgeschlossen sind, gehören auch alle Zellen, die vom Rand von  $\overline{e_i^n}$  getroffen werden, mit zum Unterkomplex. Insbesondere sind Unterkomplexe selbst wieder CW-Komplexe, und man kann sich wie in Bemerkung 1.82 überzeugen, dass die Unterraumtopologie eines Unterkomplexes  $Y \subset X$  mit seiner CW-Komplex-Topologie übereinstimmt, indem man induktiv die CW-Topologie auf  $Y^n$  mit der Unterraumtopologie von  $Y^n \subset X^n$  vergleicht.

Um einem möglichen Missverständnis vorzubeugen, weisen wir darauf hin, dass der Abschluss einer Zelle  $e_i^n$  nicht notwendigerweise ein Unterkomplex von  $X$  ist, genausowenig ihr Rand  $\partial e_i^n \subset X^{n-1}$  (obwohl das in vielen Beispielen durchaus so sein wird).

1.86. SATZ. *Ein Unterraum  $A$  eines CW-Komplexes  $X$  ist genau dann kompakt, wenn er abgeschlossen und in einem endlichen Unterkomplex von  $X$  enthalten ist.*

BEWEIS. „ $\Leftarrow$ “: Jede abgeschlossene Zelle  $\overline{e_i^n} = \Phi_i^n(D^n)$  ist als Bild einer kompakten Menge in einem Hausdorff-Raum kompakt, siehe Bemerkung 1.51 (2). Ein endlicher Unterkomplex ist eine endliche Vereinigung abgeschlossener Zellen, und daher immer noch kompakt. Eine abgeschlossene Teilmenge eines endlichen Unterkomplexes ist auch in  $X$  abgeschlossen und daher nach Bemerkung 1.51 (1) kompakt.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $K \subset X$  kompakt, dann ist  $K$  abgeschlossen nach Bemerkung 1.51 (5). Für die andere Richtung zeigen wir als nächstes, dass eine kompakte Teilmenge  $K \subset X$  höchstens endlich viele offene Zellen treffen kann. Falls das nicht der Fall sein sollte, wählen wir abzählbar unendlich viele Punkte  $x_j \in K$  mit  $j \in \mathbb{N}_0$ , die in paarweise verschiedenen Zellen liegen. Durch Induktion über  $n$  wie im Beweis von Satz 1.84 konstruieren wir offene Mengen  $U_j^n \subset X^n$  mit  $x_j \in U_j^n$  falls  $x_j \in X^n$ ,

und  $U_j^n = \emptyset$  sonst. Hierbei ist  $U_j^n$  das Bild eines kleinen Balles in  $B^n$ , falls  $x_j \in e_i^n$  liegt, und ansonsten wählen wir  $U_j^n$  so, dass

$$(\Phi_i^n)^{-1}(U_j^n) = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in (\varphi_i^n)^{-1}(U_j^{n-1}) \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\}$$

für ein hinreichend kleines  $\varepsilon_i^n > 0$ . Anschliessend setzen wir  $U_j = \bigcup_n U_j^n$ .

Die Menge  $U_0 = X \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$  ist ebenfalls offen, da man zu  $x_0 \in U_0$  analog zur Konstruktion der  $U_j$  eine offene Umgebung von  $x_0$  in  $U_0$  finden kann. Dann wird  $K$  überdeckt von den offenen Mengen  $(U_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ , es existiert jedoch keine endliche Teilüberdeckung, da  $x_j$  jeweils nur in  $U_j$  enthalten ist, Widerspruch. Also kann  $K$  nur endlich viele offene Zellen treffen.

Es bleibt zu zeigen, dass der Abschluss jeder einzelnen Zelle  $e_i^n$  in einem endlichen Unterkomplex enthalten ist. Wir beweisen das durch Induktion über  $n$ . Der Rand  $\partial e_i^n = \varphi_i^n(S^{n-1})$  einer Zelle  $e_i^n$  ist ein kompakter Unterraum von  $X^{n-1}$  und trifft daher nur endlich viele offene Zellen der Dimension  $< n$ , von denen jede nach Induktion in einem endlichen Unterkomplex enthalten ist. Durch Ankleben von  $e_i^n$  an die endliche Vereinigung dieser endlichen Unterkomplexe erhält man einen endlichen Komplex, der  $\bar{e}_i^n$  und damit auch  $e_i^n$  enthält.  $\square$

Aus der Kompaktheit von  $D^n$  folgt also insbesondere, dass das Bild  $\bar{e}_i^n$  von  $\Phi_i^n$  nur endlich viele Zellen trifft (daher „closure finite“). Mit „weak topology“ ist die im dritten Schritt auf  $X$  definierte Topologie gemeint, bzw. die durch (1.7) definierte Quotiententopologie. Dadurch lassen sich CW-Komplexe sogar charakterisieren.

1.87. SATZ (ohne Beweis, siehe [H1]). Sei  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $(\Phi_i^n: D^n \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}_0, i \in I^n}$  für jedes  $n$  eine Familie stetiger Abbildungen. Dann sind die Abbildungen  $\Phi_i^n$  genau dann die charakteristischen Abbildungen eines CW-Komplexes auf  $X$ , wenn

- (1) die Einschränkungen  $\Phi_i^n|_{B^n}$  allesamt Homöomorphismen auf ihre Bilder  $e_i^n$  sind, und  $X$  als Menge die disjunkte Vereinigung aller  $e_i^n$  ist,
- (2) die Bilder der  $\Phi_i^n|_{\partial D^n}$  jeweils nur endlich viele Zellen treffen,
- (3) und eine Menge  $A \subset X$  genau dann abgeschlossen ist, wenn  $(\Phi_i^n)^{-1}(A) \subset D^n$  für alle  $n$  und alle  $i \in I^n$  abgeschlossen ist.

Der Vollständigkeit halber definieren wir eine besondere Klasse von stetigen Abbildungen zwischen CW-Komplexen, die besonders schön mit der CW-Struktur verträglich ist.

1.88. DEFINITION. Seien  $X$  und  $Y$  zwei CW-Komplexe. Eine stetige Abbildung  $F: X \rightarrow Y$  heißt *zellulär*, wenn  $F(X^n) \subset Y^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt.

Das folgende technische Resultat wird später noch benötigt.

1.89. PROPOSITION. Es sei  $X$  ein CW-Komplex und  $Y$  lokalkompakt, dann ist die Produkttopologie auf  $X \times Y$  gerade die Quotiententopologie zur Abbildung

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}_0} \coprod_{i \in I^n} D^n \times Y \xrightarrow{\bigcup_n \bigcup_i \Phi_i^n \times \text{id}_Y} X \times Y.$$

BEWEIS. Es bezeichne  $\mathcal{O}_\square$  die Produkt- und  $\mathcal{O}_\rightarrow$  die Quotiententopologie auf  $X \times Y$ . Aus der Stetigkeit von

$$\begin{aligned} \pi_X \circ (\Phi_i^n \times \text{id}_Y) &= \Phi_i^n \circ \pi_{D^n}: D^n \times Y \longrightarrow X \\ \text{und} \quad \pi_Y \circ (\Phi_i^n \times \text{id}_Y) &= \pi_Y: D^n \times Y \longrightarrow Y \end{aligned}$$

folgt mit den charakteristischen Eigenschaften aus Satz 1.46 (2) und Satz 1.72 (2) auch die Stetigkeit von

$$\begin{aligned} & \Phi_i^n \times \text{id}_Y: D^n \times Y \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\square) \\ \text{und} \quad & \text{id}_{X \times Y}: (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow) \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\square). \end{aligned}$$

Für einen beliebigen topologischen Raum folgt aus Satz 1.60 (1) und (3), dass

$$F: (X \times Y, \mathcal{O}_\square) \longrightarrow Z$$

genau dann stetig ist, wenn die zugehörige Abbildung

$$f: X \longrightarrow (C(Y, Z), \mathcal{O}_{\text{ko}})$$

stetig ist. Aber das ist nach Satz 1.72 (2) äquivalent zur Stetigkeit von

$$f \circ \Phi_i^n: D^n \longrightarrow (C(Y, Z), \mathcal{O}_{\text{ko}})$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $i \in I^n$ , also wiederum mit Satz 1.60 zur Stetigkeit von

$$F \circ (\Phi_i^n \times \text{id}_Y): D^n \times Y \longrightarrow Z.$$

Nach Definition der Quotiententopologie sind für  $Z = (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow)$  alle Abbildungen

$$\Phi_i^n \times \text{id}_Y: D^n \times Y \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow)$$

stetig, also nach dem obigen auch

$$\text{id}_{X \times Y}: (X \times Y, \mathcal{O}_\square) \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}_\rightarrow). \quad \square$$

1.90. BEMERKUNG. Es ist wichtig, dass  $Y$  lokalkompakt ist in der obigen Proposition. Seien etwa  $X$  und  $Y$  zwei beliebige  $CW$ -Komplexe mit charakteristischen Abbildungen  $\Phi_i^n$  und  $\Psi_j^m$ . Dann erhalten wir eine  $CW$ -Struktur auf der Menge  $X \times Y$  mit charakteristischen Abbildungen

$$D^{n \times m} \xrightarrow{\sim} D^n \times D^m \xrightarrow{\Phi_i^n \times \Psi_j^m} X \times Y.$$

Dann ist die  $CW$ -Topologie auf  $X \times Y$  im allgemeinen feiner als die Produkt-Topologie.

Mit Hinblick auf eine Anwendung im nächsten Kapitel wollen wir uns überlegen, dass  $CW$ -Komplexe lokal zusammenziehbar sind.

1.91. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $X$  heißt *zusammenziehbar*, wenn es eine stetige Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  und einen Punkt  $x_0 \in X$  gibt, so dass

$$H(x, 0) = x \quad \text{und} \quad H(x, 1) = x_0$$

für alle  $x \in X$  gilt.

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *lokal zusammenziehbar*, wenn jede Umgebung  $U$  eines Punktes  $x$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  enthält, die sich auf  $x$  zusammenziehen lässt.

1.92. BEMERKUNG. (1) Zum Beispiel ist  $B^n$  zusammenziehbar mit

$$x_0 = 0 \quad \text{und} \quad H(x, t) = (1 - t)x \in B^n \quad \text{für alle } x \in B^n \text{ und alle } t \in [0, 1].$$

(2) Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , und daher ebenfalls lokal zusammenziehbar. Sei etwa  $U$  eine beliebige Umgebung von  $x \in M$ , und sei  $V$  eine zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorphe Umgebung von  $x$ . Dann ist  $U \cap V$  zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  homöomorph, enthält also einen zusammenziehbaren Ball um  $x$ .

(3) Jeder zusammenziehbare Raum  $X$  ist wegzusammenhängend, denn für alle  $x \in X$  ist  $t \mapsto H(x, t)$  ein Weg von  $x$  zum festen Punkt  $x_0$ .

1.93. SATZ.  *$CW$ -Komplexe sind lokal zusammenziehbar.*

BEWEIS. Sei  $X$  ein CW-Komplex, sei  $x_0 \in e_{i_0}^{n_0} \subset X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$ , und sei  $U \subset X$  eine Umgebung von  $x_0$ . Sei  $V^{n_0} \subset U \cap X^{n_0}$  das Bild eines kleinen Balles in  $B^{n_0}$  unter der charakteristischen Abbildung  $\Phi_{i_0}^{n_0}$ , beziehungsweise  $V^0 = \{x_0\}$  für den Fall dass  $n_0 = 0$  und  $x \in X^0$ . Dann konstruieren wir induktiv offene Mengen  $V^n \subset U \cap X^n$  mit  $V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}$  für alle  $n > n_0$ , wobei wieder

$$(\Phi_i^n)^{-1}(V^n) = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in (\varphi_i^n)^{-1}(V_j^{n-1}) \text{ und } |x| > 1 - \varepsilon_i^n \right\} \subset (\Phi_i^n)^{-1}(U)$$

für ein hinreichend kleines  $\varepsilon_i^n \in (0, 1)$ . Anschliessend setzen wir  $V = \bigcup V^n$ .

Wir können jetzt eine Abbildung  $H$  wie in Definition 1.91 definieren, indem wir — beginnend mit der „höchsten“ Dimension — Punkte innerhalb einer Zelle auf ihren Rand projizieren. Da Zellen beliebig hohe Dimension haben können, müssen wir vorsichtig sein. Wir definieren zunächst  $H^n: V^n \times [0, 1] \rightarrow V^n$  für  $n > n_0$  durch

$$H^n(\Phi_i^n(x), t) = \Phi_i^n\left(\frac{x}{|x|^t}\right)$$

für alle  $x \in V^n \cap e_i^n$ . Hier nutzen wir aus, dass  $\varepsilon_i^n < 1$ , also  $|x| > 0$  für alle  $x \in (\Phi_i^n)^{-1}(V^n)$ . Offensichtlich gilt also

$$H^n(V^n, 1) \subset V^{n-1} \quad \text{und} \quad H^n(x, t) = x \text{ für alle } x \in V^{n-1}.$$

Außerdem definieren wir  $H^{n_0}: V^{n_0} \times [0, 1] \rightarrow V^{n_0}$  durch

$$H^{n_0}(\Phi_{i_0}^{n_0}(x), t) = \Phi_{i_0}^{n_0}\left((1-t)x + t(\Phi_{i_0}^{n_0})^{-1}(x_0)\right).$$

Wir schreiben  $P^n = H(\cdot, 1): V^n \rightarrow V^{n-1}$  und definieren  $H: V \times [0, 1] \rightarrow V$  für  $x \in V^n$  durch

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq t \leq 2^{n_0-n-1}, \text{ und} \\ H^{n'}((P^{n'+1} \circ \dots \circ P^n)(x), 2^{n'+1-n_0}t - 1) & \text{für } 2^{n_0-n'-1} \leq t \leq 2^{n_0-n'} \end{cases}$$

Dann ist  $H$  die gewünschte Abbildung. Für die Stetigkeit von  $H$  reicht nach Proposition 1.89 und Satz 1.72 (2), dass  $H(\Phi_i^n(\cdot), \cdot): D^n \times [0, 1] \rightarrow X$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle  $i \in I^n$  stetig ist. Wir schreiben  $[0, 1]$  als CW-Komplex mit den 1-Zellen

$$[0, 1] = [0, 2^{n_0-n-1}] \cup [2^{n_0-n-1}, 2^{n_0-n}] \cup \dots \cup [2^{-1}, 2^0]$$

und benötigen mit dem gleichen Argument nur die Stetigkeit von  $H(\Phi_i^n(\cdot), \cdot)$  auf dem Produkt von  $D^n$  mit den einzelnen Teilintervallen, aber die folgt direkt aus der Konstruktion der  $H^n$  und  $H$ . Man beachte, dass wir trotz beliebig hoher „Kontraktionsgeschwindigkeiten“ nahe  $t = 0$  aufgrund der Quotiententopologie auf  $X$  keine Probleme mit der Stetigkeit bei  $t = 0$  bekommen.  $\square$

1.94. FOLGERUNG (aus Satz 1.93). *Sei  $X$  ein CW-Komplex, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1)  $X$  ist zusammenhängend.
- (2)  $X$  ist wegzusammenhängend.
- (3)  $X^1$  ist zusammenhängend.
- (4)  $X^1$  ist wegzusammenhängend.

BEWEIS. (1)  $\implies$  (2). Sei  $x \in X$ , und sei  $Z_x$  die Wegzusammenhangskomponente von  $x$ . Da  $X$  lokal zusammenziehbar ist, folgt:

- (1)  $Z_x$  ist offen, denn alle  $z \in Z_x$  haben eine zusammenziehbare Umgebung  $U$ . Sei  $H: U \times [0, 1] \rightarrow U$  die Kontraktion, dann ist  $t \mapsto H(z, t)$  ein Weg von  $y$  nach  $z \in U$ . Also kann jeder Punkt  $z \in U$  mit  $y$ , also auch mit  $x$  verbunden werden.

- (2)  $Z_x$  ist abgeschlossen, denn sei  $y \in \overline{Z_x}$ , und sei  $U$  eine zusammenziehbare Umgebung von  $y$ , dann gibt es einen Punkt in  $U \cap Z_x$ , der sowohl mit  $x$  als auch mit  $y$  durch einen Weg verbunden werden kann, also kann auch  $x$  mit  $y$  durch einen Weg verbunden werden.

Somit ist  $Z_x$  offen, abgeschlossen und nicht leer. Wenn  $X$  zusammenhängend ist, folgt  $X = Z_x$ , somit ist  $X$  auch wegzusammenhängend.

Da jeder wegzusammenhängende Raum nach 1.65 (2) zusammenhängend ist, folgt also (1)  $\iff$  (2). Da  $X^1$  selbst ein CW-Komplex ist, folgt auch (3)  $\iff$  (4).

(1)  $\implies$  (3). Wir nehmen an, dass  $X^1$  nicht zusammenhängend sei. Dann existiert eine offene und abgeschlossene Menge  $\emptyset \neq A^1 \neq X^1$  mit offenem und abgeschlossenem Komplement  $\emptyset \neq B^1 \neq X^1$ , und  $A^n$  und  $B^n$  sind sogar Unterkomplexe, da abgeschlossene Zellen zusammenhängend sind.

Wir zeigen induktiv, dass  $X^n$  nicht zusammenhängend ist, indem wir nichtleere abgeschlossene Mengen  $A^n$  und  $B^n$  mit

$$A^n \cap X^{n-1} = A^{n-1}, \quad B^n \cap X^{n-1} = B^{n-1}, \quad \text{und} \quad X^n = A^n \dot{\cup} B^n \quad (*)$$

angeben. Betrachte dazu  $\varphi_i^n: S^{n-1} = \partial D^n \rightarrow X^{n-1}$  für  $i \in I^n$ . Da  $S^{n-1}$  zusammenhängend ist für  $n \geq 2$ , ist auch  $\varphi_i^n(S^{n-1})$  zusammenhängend, und somit gilt entweder  $\partial e_i^n = \varphi_i^n(S^{n-1}) \subset A^{n-1}$  oder  $\partial e_i^n \subset B^{n-1}$ . Wir können jetzt Unterkomplexe  $\emptyset \neq A^n, B^n \subset X^n$  definieren durch

$$A^n = A^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{i \in I^n \\ \partial e_i^n \subset A^{n-1}}} \bar{e}_i^n \quad \text{und} \quad B^n = B^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{i \in I^n \\ \partial e_i^n \subset B^{n-1}}} \bar{e}_i^n,$$

und es gilt (\*). Ausserdem sind  $A^n, B^n$  als Unterkomplexe abgeschlossen. Schliesslich folgt

$$X = A \dot{\cup} B \quad \text{mit} \quad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} B^n,$$

und  $A$  und  $B$  sind beide abgeschlossen und nicht leer, also ist auch  $X$  nicht zusammenhängend.

(4)  $\implies$  (2). Sei jetzt  $X^1$  wegzusammenhängend, und sei  $x \in X^0$ . Wir zeigen induktiv, dass  $X^n$  auch wegzusammenhängend ist. Sei also  $y \in X^n$ , dann suchen wir einen Weg von  $y$  nach  $x$ . Falls  $y \in X^{n-1}$ , sind wir nach Induktionsvoraussetzung fertig.

Ansonsten ist  $y = \Phi_i^n(y_0)$  mit  $y_0 \in D^n$ . Wir wählen  $z_0 \in S^{n-1} = \partial D^n$  und erhalten einen Weg

$$s \mapsto \Phi_i^n((1-s)y_0 + sz_0)$$

von  $y$  nach  $z = \Phi_i^n(z_0) \in X^{n-1}$ , und somit auch einen Weg von  $y$  nach  $x$  nach Induktionsvoraussetzung. Damit ist  $X^n$  dann auch wegzusammenhängend.

Seien schliesslich  $x, y \in X$  beliebig, dann existiert ein  $N > 0$  mit  $x, y \in X^N$ , und somit lassen sich  $x, y$  durch einen Weg in  $X^N \subset X$  verbinden.  $\square$

## 1.j. Übungen zu Kapitel 1

### Übungen zu Abschnitt 1.a.

1.95. ÜBUNG. Die Metrik der französischen Eisenbahnen. Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum. Man setze

$$d_f(x, y) = \begin{cases} \|y - x\| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ kollinear, und} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (1)  $(V, d_f)$  ist ein metrischer Raum.
- (2) Sei  $d_n(x, y) = \|y - x\|$  die übliche Metrik. Die Identität  $\text{id}_V: (V, d_f) \rightarrow (V, d_n)$  ist stetig, nicht jedoch  $\text{id}_V: (V, d_n) \rightarrow (V, d_f)$ .



1.96. ÜBUNG. Seien  $(X, d), (Y, d')$  metrische Räume und  $\alpha \in (0, 1]$ . Eine Abbildung  $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  heißt  $\alpha$ -Höldersch, falls eine Konstante  $C > 0$  existiert, so dass für alle  $x, y \in X$  gilt:

$$d'(F(x), F(y)) \leq C d(x, y)^\alpha .$$

1-Höldersche Abbildungen heissen auch Lipschitzsch. Zeigen Sie, dass jede  $\alpha$ -Höldersche Abbildung stetig ist.

1.97. ÜBUNG. Sei  $p$  eine Primzahl. Jede rationale Zahl  $q \neq 0$  lässt sich eindeutig schreiben als

$$q = p^r \frac{a}{b} ,$$

mit  $r, a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ , so dass  $p, a$  und  $b$  paarweise teilerfremd sind. In diesem Fall definieren wir die  $p$ -adische Bewertung von  $q$  durch  $\|q\|_p = p^{-r}$  und  $\|0\|_p = 0$ . Dadurch wird die  $p$ -adische Metrik

$$d_p(x, y) = \|y - x\|_p$$

auf  $\mathbb{Q}$  induziert.

- (1) Zeigen Sie, dass  $d_p$  wirklich eine Metrik ist, also die Axiome (1)–(3) aus Definition 1.1 erfüllt.
- (2) Zeigen Sie, dass eine verschärfte Dreiecksungleichung gilt:

$$d_p(x, z) \leq \max\{d_p(x, y), d_p(y, z)\} ,$$

und „ $\leq$ “ kann nur auftreten, wenn  $d_p(x, y) = d_p(y, z)$  gilt.

- (3) Folgern Sie daraus: Für alle  $x, y \in (\mathbb{Q}, d_p)$  und alle  $\varepsilon, \delta > 0$  seien  $B_\delta(x)$  und  $B_\varepsilon(y)$  metrische Bälle bezüglich  $d_p$ , dann sind  $B_\delta(x)$  und  $B_\varepsilon(y)$  entweder disjunkt, oder einer der beiden Bälle enthält den anderen.

1.98. ÜBUNG. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, und sei  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $X$ . Zeigen Sie: die Folge  $x_i$  konvergiert genau dann gegen  $x \in X$ , wenn es zu jeder Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  gibt, so dass  $x_i \in U$  für alle  $i \geq n_0$ .

1.99. ÜBUNG. Seien  $(X, d)$  und  $(Y, d')$  metrische Räume, und sei  $x \in X$ . Zeigen Sie: eine Abbildung  $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  ist genau dann stetig am Punkt  $x$ , wenn die Urbilder aller Umgebungen von  $F(x)$  in  $Y$  wiederum Umgebungen von  $x$  sind.

*Übungen zu Abschnitt 1.b.*

1.100. ÜBUNG. Sei  $X$  eine beliebige Menge, und sei

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ ist eine endliche Menge}\} \cup \{\emptyset\} \subset \mathcal{P}X .$$

Zeigen Sie, dass  $\mathcal{O}$  eine Topologie auf  $X$  definiert. Diese Topologie heißt auch die *koendliche Topologie*.

1.101. ÜBUNG. Die folgende Konstruktion ist wichtig in der algebraischen Geometrie. Wir nennen eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{C}^n$  *Zariski-abgeschlossen*, wenn es eine Menge  $P \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  von Polynomen gibt, so dass

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid p(z) = 0 \text{ für alle } p \in P\} . \quad (*)$$

Eine Menge  $U \subset \mathbb{C}^n$  heißt *Zariski-offen*, wenn  $\mathbb{C}^n \setminus U$  Zariski-abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass die Menge  $\mathcal{O}_Z$  aller Zariski-offenen Teilmengen eine Topologie bildet. Diese Topologie heißt auch die *Zariski-Topologie*.

*Hinweis:* Überlegen Sie sich, dass es äquivalent (und etwas einfacher) ist, zu zeigen: (1)  $\emptyset$  und  $\mathbb{C}^n$  sind Zariski-abgeschlossen; (2) wenn  $A_1, \dots, A_k$  Zariski-abgeschlossen sind, dann auch  $A_1 \cup \dots \cup A_k$

(betrachten Sie hierzu geeignete Produkte der definierenden Polynome); (3) wenn alle  $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}\mathbb{C}^n$  Zariski-abgeschlossen sind, dann auch

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A.$$

*Bemerkung:* Aus dem Hilbertschen Basissatz folgt, dass man für jedes  $A$  nur jeweils endlich viele Polynome braucht, um  $A$  wie in (\*) zu definieren.

1.102. ÜBUNG. Seien  $X$  und  $Y$  beliebige Mengen. Zeigen Sie:

- (1) Sei  $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$  die diskrete Topologie, und sei  $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, Y\}$  die Klumpentopologie. Dann sind für jeden beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O})$  alle Abbildungen  $F: (X, \mathcal{O}_\delta) \rightarrow (Z, \mathcal{O})$  und alle Abbildungen  $G: (Z, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_K)$  stetig.
- (2) Seien  $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$  beliebige Topologien auf  $X$  und  $Y$ . Falls für jeden beliebigen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{O})$  alle Abbildungen  $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O})$  und alle Abbildungen  $G: (Z, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  stetig sind, dann ist  $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_\delta$  die diskrete und  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_K$  die Klumpentopologie.

*Übungen zu Abschnitt 1.c.*

1.103. ÜBUNG. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, und seien  $A, A_0$  und  $A_1$  abgeschlossene Teilmengen von  $X$ , und  $A_0$  und  $A_1$  seien disjunkt. Zeigen Sie:

- (1) die Funktion  $d_A: X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(a, x)$  ist stetig;
- (2) es gilt  $d_A(x) = 0$  genau dann, wenn  $x \in A$ ;
- (3) die Funktion  $f = d_{A_0}/(d_{A_0} + d_{A_1})$  hat die in Satz 1.26 (3) geforderten Eigenschaften.

1.104. ÜBUNG. Sei  $X$  eine Menge mit mindestens zwei Elementen, und sei  $\mathcal{O}_K$  die Klumpentopologie auf  $X$ . Welche Trennungseigenschaften besitzt  $(X, \mathcal{O}_K)$ ?

1.105. ÜBUNG. Es sei  $X$  eine unendliche Menge mit der koendlichen Topologie  $\mathcal{O}$  aus Aufgabe 1.100. Welche Trennungseigenschaften besitzt  $(X, \mathcal{O})$ ?

1.106. ÜBUNG. Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{N}$  heiße offen bezüglich der Ordnungstopologie  $\mathcal{O}_<$ , wenn aus  $m \in U$  auch  $n \in U$  für alle  $n \geq m$  folgt.

- (1) Überprüfen Sie, dass  $\mathcal{O}_<$  die Axiome einer Topologie erfüllt.
- (2) Welche Trennungseigenschaften hat  $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_<)$ ?

1.107. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) die Zariski-Topologie auf  $\mathbb{C}^n$  ist für kein  $n \geq 1$  hausdorffsch, erfüllt aber (T1).
- (2) Jedes Polynom  $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  definiert eine stetige Abbildung  $p: (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{O}_Z)$ .
- (3) Versuchen Sie zu erklären, warum (2) nicht Bemerkung 1.28 (2) widerspricht.

*Hinweis:* Um (1) zu beweisen, überlegen Sie sich, dass für alle Polynome  $p$  gilt:

- (1) wenn  $p(x) \neq 0$ , dann existiert ein kleiner metrischer Ball  $B_\varepsilon(x)$ , auf dem  $p$  nirgends verschwindet.
- (2) wenn  $p$  auf einem kleinen metrischen Ball verschwindet, dann verschwindet es auf ganz  $\mathbb{C}^n$ .

*Übungen zu Abschnitt 1.d.*

1.108. ÜBUNG. Betrachte den Raum  $X = [0, 1]^2$  mit

$$d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{falls } x_1 = x_2, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

- (1) Zeigen Sie, dass  $d$  eine Metrik auf  $X$  ist.
- (2) Welche Abzählbarkeitseigenschaften erfüllt  $(X, \mathcal{O}_d)$ ?

Übungen zu Abschnitt 1.e.

1.109. ÜBUNG. Betrachten Sie den obigen Raum  $X = [0, 1]^2$ .

(1) Geben Sie einen Homöomorphismus  $X \rightarrow \prod_{i \in [0,1]} [0, 1]$  an.

(2) Geben Sie einen Homöomorphismus zu einem nichttrivialen topologischen Produkt an.

1.110. ÜBUNG. Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum mit Topologie  $\mathcal{O}_{d_X}$ , und sei  $Y \subset X$  versehen mit der induzierten Metrik  $d_Y = d|_{Y \times Y}$ . Zeigen Sie, dass die von  $\mathcal{O}_{d_X}$  induzierte Unterraumtopologie  $\mathcal{O}_Y$  mit der metrischen Topologie  $\mathcal{O}_{d_Y}$  übereinstimmt.

1.111. ÜBUNG. Seien  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  metrische Räume, dann definieren wir eine Metrik  $d_{X \times Y}$  auf dem kartesischen Produkt  $X \times Y$  durch

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Zeigen Sie, dass die von  $\mathcal{O}_{d_X}$  und  $\mathcal{O}_{d_Y}$  induzierte Produkttopologie mit der metrischen Topologie  $\mathcal{O}_{d_{X \times Y}}$  übereinstimmt.

1.112. ÜBUNG. Sei  $\mathbb{k}$  ein beliebiger Körper. Es seien  $V_i$  Vektorräume über  $\mathbb{k}$  für  $i \in I$ . Wir betrachten die direkte Summe und das

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in I} V_i &:= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I, \text{ fast alle } x_i = 0\} \\ \subset \prod_{i \in I} V_i &:= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- (1) Die direkte Summe ist ein Koproduct in  $\mathcal{Vec}_{\mathbb{k}}$ .
- (2) Das direkte Produkt ist ein Produkt in  $\mathcal{Vec}_{\mathbb{k}}$ .
- (3) Für die Dualräume gilt

$$\left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* = \prod_{i \in I} V_i^*.$$

1.113. ÜBUNG. Wir versehen  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  und alle Unterräume mit der Standardtopologie. Welche der folgenden Abbildungen sind Einbettungen:

$$F: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad (\text{a})$$

$$G: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad G(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t). \quad (\text{b})$$

$$H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad H(n) = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ 1/n & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{c})$$

1.114. ÜBUNG. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine überabzählbare Familie topologischer Räume mit  $\#X_i > 1$  für alle  $i \in I$ . Zeigen Sie: dann besitzt  $\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$  nicht die erste Abzählbarkeitseigenschaft.

Übungen zu Abschnitt 1.f.

1.115. ÜBUNG. Seien  $(X, \mathcal{O}), (Y, \mathcal{O})$  Hausdorff-Räume,  $X$  sei kompakt, und sei  $F: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch  $F(X) \subset Y$ , versehen mit der Unterraumtopologie, kompakt ist.

1.116. ÜBUNG. Zeigen Sie: kompakte Räume sind normal, erfüllen also insbesondere (T4). Dazu zeigt am besten zuerst, dass kompakte Räume (T3) erfüllen.

*Hinweis:* Per Definitionem sind kompakte Räume Hausdorffsch.

1.117. ÜBUNG. Zeigen Sie: Wenn  $(Y, d)$  metrischer Raum und  $(f_i: X \rightarrow Y)_i$  eine Folge stetiger Funktionen ist, dann konvergiert  $(f_i)_i$  genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen  $f \in C(X, Y)$ , wenn  $(f_i)$  gleichmäßig auf Kompakta gegen  $f$  konvergiert.

*Übungen zu Abschnitt 1.g.*

1.118. ÜBUNG. Sei

$$X = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \neq 0 \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der von  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$  induzierten Unterraumtopologie.

- (1) Skizzieren Sie  $X$ .
- (2) Zeigen Sie, dass  $X$  zusammenhängend ist.
- (3) Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ .

1.119. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Der Raum der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  ist total unzusammenhängend sowohl bezüglich der metrischen Topologie als auch bezüglich der  $p$ -adischen Topologien für alle Primzahlen  $p$ .
- (2) Der Raum  $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z)$  ist zusammenhängend.

1.120. ÜBUNG. Sei  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine beliebige Familie topologischer Räume und  $X = \prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$  ihr Produkt. Zeigen Sie, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes  $(x_i)_{i \in I} \in X$  das Produkt der Wegzusammenhangskomponenten der Punkte  $x_i \in X_i$  ist. Insbesondere ist  $X$  genau dann wegzusammenhängend, wenn alle  $X_i$  wegzusammenhängend sind.

*Übungen zu Abschnitt 1.h.*

1.121. ÜBUNG. Führen Sie den Beweis von Satz 1.72 (2) aus.

1.122. ÜBUNG. Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume, sei  $V \subset Y$ , und sei  $f: V \rightarrow X$  stetig bezüglich der Unterraumtopologie auf  $V$ . Zeigen Sie:

- (1) die Topologie  $\mathcal{O}_X$  ist genau die von der Verklebungstopologie auf  $X \subset X \cup_f Y$  induzierte Unterraumtopologie;
- (2) wenn  $V$  abgeschlossen ist und  $X$  und  $Y$  beide (T1) erfüllen, dann gilt (T1) auch für  $X \cup_f Y$ .

1.123. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A$  in  $X$  abgeschlossen. Dann ist eine Teilmenge  $B$  von  $A$  genau dann in  $X$  abgeschlossen, wenn sie in  $A$  abgeschlossen ist.
- (2) Sei  $X = A_1 \cup \dots \cup A_k$  Vereinigung abgeschlossener Teilmengen, dann ist  $B$  in  $X$  genau dann abgeschlossen, wenn alle  $B \cap A_i$  in  $A_i$  abgeschlossen sind.
- (3) Das Argument in (2) funktioniert für eine beliebige lokal endliche Vereinigung: sei  $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ , so dass alle  $A_i$  in  $X$  abgeschlossen sind, und so dass jeder Punkt eine Umgebung  $U$  besitzt mit  $U \cap A_i = \emptyset$  für fast alle  $i$ . Dann ist  $B$  in  $X$  genau dann abgeschlossen, wenn alle  $B \cap A_i$  abgeschlossen sind.
- (4) Sei  $X$  wie in Teil (2) beziehungsweise wie in Teil (3). Seien  $f_i: A_i \rightarrow Y$  stetige Abbildungen mit  $f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$ , dann gibt es genau eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f|_{A_i} = f_i$ , und  $f$  ist stetig.

1.124. ÜBUNG. Sei  $S^1 \subset \mathbb{C}$  der komplexe Einheitskreis, und sei  $z = e^{i\varphi} \in S^1 \subset \mathbb{C}$ . Wir betrachten auf  $S^1$  die von  $x \sim zx$  erzeugte Äquivalenzrelation, das heißt,  $x \sim y$  genau dann, wenn  $x/y = z^k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Bestimmen Sie die Quotiententopologie auf  $S^1/\sim$ , unterscheiden Sie die Fälle  $\varphi \in 2\pi\mathbb{Q}$  und  $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Q}$ .

1.125. ÜBUNG. Betrachten Sie auf  $\mathbb{R}^2$  die Äquivalenzrelation

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff (y_1, y_2) = \left( rx_1, \frac{x_2}{r} \right) \text{ für ein } r \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- (1) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen im  $\mathbb{R}^2$ .
- (2) Skizzieren Sie  $X = \mathbb{R}^2 / \sim$ .
- (3) Beschreiben Sie die Quotiententopologie auf  $X$ , z.B., indem Sie eine Basis angeben.

1.126. ÜBUNG. Betrachten Sie die in Aufgabe 1.125 definierte Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\mathbb{R}^2$ . Sei wie vorhin  $X = \mathbb{R}^2 / \sim$ , und sei  $Y := (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim$ .

- (1) Welche der Trennungseigenschaften (T0), (T1), (T3), (T4) erfüllt  $X$ ?
- (2) Zeigen Sie, dass  $Y$  zum Raum aus Beispiel 1.29 homöomorph ist.
- (3) Welche Trennungseigenschaften erfüllt  $Y$ ?

1.127. ÜBUNG. Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein normaler topologischer Raum, sei  $f: X \rightarrow Y$  eine surjektive Abbildung, und sei  $\mathcal{O}_Y$  die Quotiententopologie auf  $Y$ . Zeigen Sie:

- (1) wenn Urbilder  $f^{-1}(\{y\})$  von Punkten in  $Y$  abgeschlossen sind in  $X$ , gilt (T1) für  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ;
- (2) wenn  $f$  abgeschlossen ist, das heißt, wenn  $f(A) \subset Y$  abgeschlossen ist für alle abgeschlossenen  $A \subset X$ , dann gilt (T4) für  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ .

Wir haben also ein einfaches Kriterium dafür, wann Quotienten normaler Räume wiederum normal sind.

*Übungen zu Abschnitt 1.i.*

1.128. ÜBUNG. Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  und  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  topologische Räume mit stetigen Abbildungen

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{O}_Z).$$

- (1) Falls  $\mathcal{O}_Y$  die von  $g$  und  $\mathcal{O}_Z$  induzierte Topologie ist, und  $\mathcal{O}_X$  die von  $f$  und  $\mathcal{O}_Y$  induzierte Topologie ist, dann ist  $\mathcal{O}_X$  auch gleich der von  $g \circ f$  und  $\mathcal{O}_Z$  induzierten Topologie.
- (2) Falls  $\mathcal{O}_Y$  die von  $f$  und  $\mathcal{O}_X$  koinduzierte Topologie ist, und  $\mathcal{O}_Z$  die von  $g$  und  $\mathcal{O}_Y$  koinduzierte Topologie ist, dann ist  $\mathcal{O}_Z$  auch gleich der von  $g \circ f$  und  $\mathcal{O}_X$  koinduzierten Topologie.

1.129. ÜBUNG. Sei  $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  ein (Schief-)Körper, und sei  $k = 1, 2$  oder  $4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{k}$ , dann sei

$$(\mathbb{k}P^n, \mathcal{O}_{\mathbb{k}P^n}) = (\mathbb{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \sim,$$

wobei  $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$  genau dann, wenn es ein  $z \in \mathbb{k}^* = \mathbb{k} \setminus \{0\}$  gibt, so dass  $y_i = zx_i$  für alle  $i = 0, \dots, n$ . Die Äquivalenzklasse von  $(x_0, \dots, x_n)$  wird auch als  $[x_0 : \dots : x_n]$  geschrieben. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{k}P^n$ , versehen mit der Quotiententopologie, eine  $kn$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie dazu, dass  $\mathbb{k}P^n$  die Eigenschaften (T2) und (A2) besitzt, und konstruieren Sie Homöomorphismen von  $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\} \subset \mathbb{k}P^n$  nach  $\mathbb{k}^n \cong \mathbb{R}^{nk}$ .

1.130. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{k}P^m$  homöomorph zum Unterraum

$$\{[x_0 : \dots : x_m : 0 : \dots : 0] \mid (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{k}^{m+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}\} \subset \mathbb{k}P^n$$

ist für alle  $0 \leq m \leq n$ , und dass diese Unterräume gerade die abgeschlossenen Zellen eines CW-Komplexes mit je einer Zelle der Dimension  $0, k, \dots, kn$  bilden. Versuchen Sie insbesondere, charakteristische Abbildungen  $\Phi^{kj}: D^{kj} \rightarrow \mathbb{k}P^n$  anzugeben, und überprüfen Sie, dass die oben definierte Topologie mit der Topologie des so definierten CW-Komplexes übereinstimmt.

1.131. ÜBUNG. Wir definieren

$$\mathbb{k}P^\infty = \varinjlim \mathbb{k}P^n .$$

Sei  $\mathbb{k}^\infty$  der Vektorraum der endlichen  $\mathbb{k}$ -wertigen Folgen, und sei

$$Q = (\mathbb{k}^\infty \setminus \{0\}) / \sim \quad \text{mit „}\sim\text{“ wie oben.}$$

Zeigen Sie:

- (1) die natürliche Abbildung  $F: \mathbb{k}P^\infty \rightarrow Q$  ist bijektiv;
- (2) sei  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{k}^\infty$  und sei  $\mathcal{O}_Q$  die dazugehörige Quotiententopologie auf  $Q$ , dann ist  $F$  stetig;
- (3) (*Zusatzaufgabe*) die Umkehrabbildung  $F^{-1}$  ist für keine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{k}^\infty$  stetig.

1.132. ÜBUNG. Es seien  $X, Y$  zwei  $CW$ -Komplexe, dann bezeichne  $\mathcal{O}_\square$  die Produkttopologie auf  $X \times Y$  und  $\mathcal{O}_{CW}$  die Topologie zur  $CW$ -Struktur aus Bemerkung 1.90.

- (1) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{O}_{CW}$  stets feiner ist als  $\mathcal{O}_\square$ .
- (2) Folgern Sie aus Proposition 1.89, dass  $\mathcal{O}_{CW} = \mathcal{O}_\square$  falls  $X$  und  $Y$  lokal kompakt sind.
- (3) Funktioniert das Argument in (2) auch, wenn nur einer der Räume lokal kompakt ist?

## Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Wir behandeln in diesem Kapitel die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. Diese Gruppe lässt sich für geeignete topologische Räume  $X$  auf zweierlei Art definieren:

- (1) Als Gruppe  $\pi_1(X, x_0)$  der Homotopieklassen von Wegen  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit festem Anfangs- und Endpunkt  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$ , oder
- (2) Als Gruppe  $\Gamma$ , die auf einem einfach zusammenhängenden Raum  $\tilde{X}$  operiert, mit  $X \cong \tilde{X}/\Gamma$ .

2.1. BEISPIEL. Sei  $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und sei  $p = 1$ .

- (1) Wir beschränken uns im folgenden auf stückweise glatte Wege. Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ , dann erhalten wir die Umlaufzahl

$$\nu(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} dt \in \mathbb{Z}.$$

In der Tat kann man zeigen, dass je zwei Wege in  $\mathbb{C}^*$  mit Anfangs- und Endpunkt  $p = 1$  und der gleichen Umlaufzahl um 0 in  $\mathbb{C}^*$  (mit festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten) homotop sind. Also ist  $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$ .

- (2) Betrachte die (leicht modifizierte) Exponentialabbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit  $z \mapsto e^{2\pi i z}$ , dann gilt

$$e^{2\pi i z_0} = e^{2\pi i z_1} \iff z_1 - z_0 \in \mathbb{Z}.$$

Wir können also  $\mathbb{C}^*$  als Quotient des einfach zusammenhängenden Raumes  $\mathbb{C}$  nach der Gruppe  $\Gamma = \mathbb{Z}$  schreiben; dabei operiert  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{C}$  durch Addition, geometrisch also durch Verschiebungen.

Wir wollen ab sofort unter einem Raum immer einen topologischen Raum verstehen, und unter einer Abbildung, einer Funktion oder einem Weg immer eine stetige Abbildung, eine stetige Funktion, oder einen stetigen Weg.

### 2.a. Homotopien und Homotopieäquivalenz

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Homotopie von Abbildungen ein. Homotopien sind Wege im Raum der Abbildungen. Indem wir statt stetiger Abbildungen Äquivalenzklassen homotoper stetiger Abbildungen betrachten, können wir den Begriff des Homöomorphismus durch den wesentlich größeren Begriff der Homotopieäquivalenz ersetzen. Im Rest dieser Vorlesung lernen wir Methoden kennen, um nicht homotope Abbildungen oder nicht homotopieäquivalente Räume voneinander zu unterscheiden.

Ab sofort geben wir die Topologien nicht mehr an, wenn es nicht unbedingt nötig ist. Falls nicht anders angegeben, seien Abbildungen zwischen topologischen Räumen immer stetig.

2.2. DEFINITION. Seien  $X, Y$  topologische Räume. Zwei Abbildungen  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  heißen *homotop*, kurz  $f_0 \sim f_1$ , wenn es eine bezüglich der Produkttopologie stetige Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  mit  $H(x, t) = f_t(x)$  für  $t \in \{0, 1\}$  gibt. Dann heißt  $H$  eine *Homotopie* zwischen  $f_0$

und  $f_1$ , und wir schreiben  $H_t = H(\circ, t): X \rightarrow Y$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Die Menge aller zu  $f$  homotopen Abbildungen heißt die (*freie*) Homotopieklasse von  $f$  und wird mit  $[f]$  bezeichnet.

2.3. BEMERKUNG. (1) Homotopie ist eine Äquivalenzrelation (Übung 2.74), und ihre Äquivalenzklassen sind gerade Homotopieklassen.

(2) Homotopie ist verträglich mit Hintereinanderschalten von Abbildungen:

$$(f_0 \sim f_1: Y \rightarrow Z \quad \text{und} \quad g_0 \sim g_1: X \rightarrow Y) \quad \implies \quad (f_0 \circ g_0) \sim (f_1 \circ g_1): X \rightarrow Z .$$

2.4. DEFINITION. Seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  gibt, so dass

$$g \circ f \sim \text{id}_X: X \rightarrow X \quad \text{und} \quad f \circ g \sim \text{id}_Y: Y \rightarrow Y .$$

In diesem Fall heißen  $X$  und  $Y$  *homotopieäquivalent*, und  $g$  heißt ein *Homotopieinverses* zu  $f$ .

2.5. BEISPIEL. Ein Raum  $X$  ist genau dann zum einpunktigen Raum  $Y = \{*\}$  homotopieäquivalent, wenn er zusammenziehbar ist. Sei dazu  $f: X \rightarrow Y$  die offensichtliche Abbildung, und sei  $g: Y \rightarrow X$  gegeben mit  $g(*) = x_0 \in X$ . Dann ist  $f \circ g = \text{id}_Y$ , und eine Homotopie zwischen  $\text{id}_X$  und  $g \circ f$  ist gerade eine Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  wie in Definition 1.91.

2.6. BEMERKUNG. (1) Jeder Homöomorphismus  $f$  ist insbesondere eine Homotopieäquivalenz mit  $g = f^{-1}$ .

(2) Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation (Übung 2.75).

(3) Betrachte die *Homotopie-Kategorie*  $\mathcal{HTop}$  mit

$$\begin{aligned} \text{obj}(\mathcal{HTop}) &= \{ \text{topologische Räume} \} , \\ \text{hom}_{\mathcal{HTop}}(X, Y) &= \{ \text{stetige Abbildungen} \} / \sim . \end{aligned}$$

Die Identität auf  $X$  im Sinne von Definition 1.20 (3) ist die Homotopieklasse der Abbildung  $\text{id}_X$ . Die Verkettung von Homotopieklassen ist nach Bemerkung 2.3 (2) wohldefiniert.

Ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt invertierbar oder *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus  $g: Y \rightarrow X$  (ein *Inverses*) gibt, so dass

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_Y .$$

Beispiele sind Bijektionen in  $\mathcal{Set}$ , Gruppenisomorphismen in  $\mathcal{Grp}$ , lineare Isomorphismen in  $\mathcal{Vec}_{\mathbb{k}}$ , und natürlich Homöomorphismen in  $\mathcal{Top}$ . Nach obiger Definition sind Homotopieäquivalenzen gerade die Isomorphismen in  $\mathcal{HTop}$ .

Algebraische Topologie versucht als erstes Ziel, gewisse Klassen von Räumen bis auf Homotopieäquivalenz zu unterscheiden.

Oftmals ist freie Homotopie ein etwas zu grober Begriff. Beispielsweise ist ein Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  immer homotop zur konstanten Abbildung auf seinen Anfangspunkt.

2.7. DEFINITION. Ein *Paar topologischer Räume*, kurz *Paar*, besteht aus einem topologischen Raum  $X$  und einer beliebigen Teilmenge  $A \subset X$ . Eine *Abbildung*  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von *Paaren* ist eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f(A) \subset B$ . Ein *punktierter (topologischer) Raum*  $(X, x_0)$  ist ein Paar  $(X, \{x_0\})$  mit  $x_0 \in X$ . Der Punkt  $x_0$  heißt auch *Basispunkt*. Eine *punktierte Abbildung*  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  ist eine Abbildung der entsprechenden Paare, es gilt also  $f(x_0) = y_0$ .

2.8. DEFINITION. Es seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  Paare. Zwei Abbildungen  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  heißen *homotop relativ zu A*, wenn es eine Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  zwischen  $f$  und  $g: X \rightarrow Y$  gibt mit

$$H(a, t) = f(a) = g(a) \quad \text{für alle } a \in A \text{ und alle } t \in [0, 1] .$$



Wir sprechen manchmal von Homotopien relativ zu  $A$ , ohne eine Teilmenge  $B \subset Y$  festzulegen. In diesem Fall können wir formal jede beliebige Teilmenge  $f(A) \subset B \subset Y$  zulassen. Diese spielt aber keine weitere Rolle.

Der Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$  ist in  $\mathbb{C}^*$  frei homotop zu einem konstanten Weg vermöge

$$H(t, s) = e^{2\pi i(1-s)t}.$$

Wir werden aber bald sehen, dass  $\gamma$  nicht relativ zu  $\{0, 1\}$ , also zu den Endpunkten, homotop zum konstanten Weg ist.

2.9. BEMERKUNG. Wir erinnern uns an die kompakt-offene Topologie aus Definition 1.59.

- (1) Wie in Satz 1.60 gehört zu jeder Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  zwischen  $f, g: X \rightarrow Y$  ein stetiger Weg  $h: [0, 1] \rightarrow (C(X, Y), \mathcal{O}_{ko})$  von  $f$  nach  $g$  mit

$$(h(s))(x) = H_s(x) = H(x, s)$$

für alle  $x \in X, s \in [0, 1]$ . Wenn  $X$  lokal kompakt ist, liefert jeder solche Weg umgekehrt eine Homotopie. In diesem Fall sind Wegzusammenhangskomponenten in  $C(X, Y)$  also gerade Homotopieklassen von Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ .

- (2) Sei jetzt  $A \subset X$  eine beliebige Teilmenge und  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, dann betrachte die Teilmenge

$$C_{f|A}(X, Y) = \{g \in C(X, Y) \mid g|_A = f|_A\} \subset C(X, Y),$$

dann liefert eine Homotopie relativ zu  $A$  einen Weg in  $C_{f|A}(X, Y)$  wie oben. Wenn  $X$  lokal kompakt ist, gehört wie oben zu jedem Weg in  $C_{f|A}(X, Y)$  eine relative Homotopie. Das folgt aus (1), indem man  $C_{f|A}(X, Y)$  mit der Unterraumtopologie versieht und deren charakterisierende Eigenschaft ausnutzt.

Zum Schluss geben wir ein Beispiel, dass Homotopieäquivalenzen mitunter nicht so offensichtlich sind, wie sie erscheinen.

2.10. DEFINITION. Eine Teilmenge  $A$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt *Retrakt von  $X$* , wenn es eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow A$  mit  $f|_A = \text{id}_A$  gibt. Sie heißt *Deformationsretrakt*, wenn zusätzlich  $\iota \circ f: X \rightarrow X$  homotop zur Identität  $\text{id}_X$  ist, und *starker Deformationsretrakt*, wenn die Homotopie zwischen  $\iota \circ f$  und  $\text{id}_X$  sogar relativ zu  $A$  gewählt werden kann.

- 2.11. BEISPIEL. (1) Jede einpunktige Menge  $\{p\} \subset X$  ist Retrakt von  $X$ , aber nur dann Deformationsretrakt, wenn  $X$  zusammenziehbar ist. Beispielsweise ist  $\{1\} \subset \mathbb{C}^*$  kein Deformationsretrakt (Beweis später).

- (2) Der Einheitskreis  $S^1 \subset \mathbb{C}^*$  ist ein starker Deformationsretrakt von  $\mathbb{C}^*$  mit

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \quad \text{und} \quad H(z, s) = \frac{z}{|z|^s}.$$

Er ist aber kein Retrakt von ganz  $\mathbb{C}$  (Beweis später).

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass man sich nicht jede Deformationsretraktion vorstellen kann.

2.12. BEISPIEL. Bings „Haus mit zwei Zimmern“ kann man basteln, indem man zwei leere Dosen mit den Unterseiten aneinanderklebt. Dann bohrt man von jeder Seite durch einen Deckel und die gemeinsamen Unterseiten je ein Loch am Rand, und klebt je einen passenden Zylinder zwischen ein Deckel- und ein Unterseitenloch so ein, dass dieser auf seiner vollen Länge den jeweiligen Dosenrand berührt (Abbildung 2.1, linkes Bild). Man kann jetzt durch das Loch in der einen Dose in das „Zimmer“ in der anderen Dose gelangen und umgekehrt.

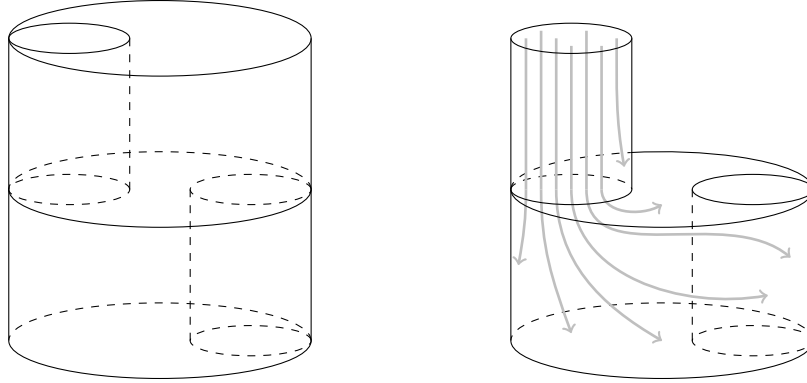


ABBILDUNG 2.1. Bings Haus mit zwei Räumen

Man überzeugt sich, dass Bings Haus ein starker Deformationsretrakt einer vollen Dose ist (Abbildung 2.1, rechtes Bild), genau wie ein Punkt in der Dose. Da Homotopieäquivalenz transitiv ist, ist Bings Haus zusammenziehbar. Die zugehörige Deformationsretraktion kann man sich aber kaum vorstellen.

## 2.b. Die Fundamentalgruppe

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes misst, wieviele Typen von nichtzusammenziehbaren Schleifen es in einem topologischen Raum gibt. Beispielsweise ist ein Fahrrad dann sicher an einem Gitter angeschlossen, wenn das Fahrradschloss sowohl im umgebenden Raum ohne Gitter, als auch im umgebenden Raum ohne Fahrrad nicht zusammenziehbar ist. Wir definieren hier die Fundamentalgruppe und geben erste Eigenschaften an. Für Anwendungen benötigen wir einige Techniken, die wir in den nächsten Abschnitten kennenlernen werden.

2.13. DEFINITION. Es sei  $(X, x)$  ein punktierter topologischer Raum. Eine *Schleife* in  $(X, x)$  ist ein Weg von  $x$  nach  $x$ , also eine Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ . Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei Schleifen in  $(X, x)$ , dann ist ihre *Verkettung* die Schleife  $\gamma_1\gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$  mit

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die *Fundamentalgruppe*  $\pi_1(X, x)$  ist die Menge aller Schleifen in  $(X, x)$  modulo Homotopie relativ zu  $\{0, 1\}$ .

Bei der Verkettung werden also beide Schleifen nacheinander mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen. Wir benutzen Übung 1.123 um zu sehen, dass die Verkettung wieder stetig ist.

Homotopie relativ zu  $\{0, 1\}$  bedeutet für Schleifen soviel wie Homotopie bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt. Insbesondere gilt für eine solche Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ , dass

$$\begin{aligned} H(0, s) = H(1, s) = x & \quad \text{für alle } s \in [0, 1], \text{ und} \\ H(t, s) = \gamma_s(t) & \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \text{ und alle } s \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

2.14. SATZ.  $\pi_1(X, x)$  bildet mit der Verkettung eine Gruppe. Das neutrale Element und das Inverse zu  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  werden repräsentiert durch e beziehungsweise  $\bar{\gamma}: [0, 1] \rightarrow X$ , mit

$$e(t) = x_0 \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

BEWEIS. Hier ist einiges zu zeigen: zunächst die Wohldefiniertheit der Verkettung relativer Homotopieklassen, dann die Gruppenaxiome.

Seien  $H_1$  und  $H_2: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  relative Homotopien zwischen den Schleifen  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  beziehungsweise zwischen  $\beta_0$  und  $\beta_1$ . Wir verketten die Homotopien und erhalten

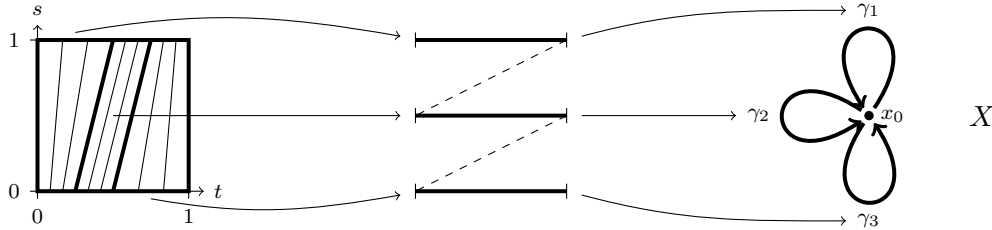
$$H = \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ H_2(2t - 1, s) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist  $H$  eine Homotopie zwischen  $\alpha_0\beta_0$  und  $\alpha_1\beta_1$  relativ zu  $\{0, 1\}$ , also ist die Verkettung mit relativer Homotopie verträglich, und damit als Verknüpfung auf  $\pi_1(X, x)$  wohldefiniert.

Zur Assoziativität überlegen wir uns, dass

$$\begin{aligned} ((\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)(t) &= \begin{cases} \gamma_1(4t) & 0 \leq t \leq 1/4, \\ \gamma_2(4t - 1) & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_3(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases} \\ (\gamma_1(\gamma_2\gamma_3))(t) &= \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_2(4t - 2) & 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ \gamma_3(4t - 3) & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Also konstruieren wir eine Homotopie zwischen  $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$  und  $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$  wie im folgenden Bild,



also in Formeln als

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma_1(4t/(1+s)) & 0 \leq t \leq (1+s)/4, \\ \gamma_2(4t - (1+s)) & (1+s)/4 \leq t \leq (2+s)/4, \\ \gamma_3(1 - 4(1-t)/(2-s)) & (2+s)/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Um zu zeigen, dass  $[e]$  ein linksneutrales Element ist, konstruieren wir ähnlich wie oben eine relative Homotopie zwischen  $e\gamma$  und  $\gamma$  für eine beliebige Schleife  $\gamma$ . Schließlich überprüfen wir, dass  $[\bar{\gamma}]$  nur von  $[\gamma]$  abhängt und zu  $[\gamma]$  linksinversiv ist. Dazu konstruieren wir eine Homotopie

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma(1 - 2st) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \gamma(1 - 2s(1 - t)) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

zwischen  $e$  und  $\bar{\gamma}\gamma$ . Damit haben wir die Gruppenaxiome für  $\pi_1(X, x)$  nachgewiesen.

Insbesondere folgt, dass  $[e]$  das eindeutige, beidseitige neutrale Element und  $[\bar{\gamma}]$  das eindeutige, beidseitige Inverse zu  $[\gamma]$  ist.  $\square$

Wir werden später etwas nachlässig sein und manchmal  $\gamma$  statt  $[\gamma]$  schreiben.

**2.15. SATZ.** *Sei  $X$  ein Raum,  $x, y \in X$ . Jede Homotopieklasse von Wegen von  $x$  nach  $y$  induziert einen Isomorphismus von  $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ . Insbesondere hängt der Isomorphismustyp der Gruppe  $\pi_1(X, x)$  nicht vom Basispunkt  $x$  ab, wenn  $X$  wegzusammenhängend ist.*

**BEWEIS VON SATZ 2.15.** Sei  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ , dann betrachte die Abbildung

$$\pi_1(X, x) \ni \gamma \mapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha \in \pi_1(X, y).$$

Wie im obigen Beweis sieht man, dass  $[\bar{\alpha}\gamma\alpha]$  weder von der Klammerung noch von den relativen Homotopieklassen von  $\alpha$  und  $\gamma$  abhängt. Es handelt sich um einen Homomorphismus, da

$$(\bar{\alpha}\gamma_1\alpha)(\bar{\alpha}\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)(\alpha\bar{\alpha})(\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)e(\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)(\gamma_2\alpha) \sim \bar{\alpha}(\gamma_1\gamma_2)\alpha .$$

Der inverse Gruppenhomomorphismus wird analog von  $\bar{\alpha}$  induziert, denn  $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$  und

$$\alpha(\bar{\alpha}\gamma\alpha)\bar{\alpha} \sim (\alpha\bar{\alpha})\gamma(\alpha\bar{\alpha}) \sim e\gamma e \sim \gamma . \quad \square$$

Man schreibt daher manchmal  $\pi_1 X$ , wenn  $X$  wegzusammenhängend ist und es nur auf den Isomorphietyp der Gruppe  $\pi_1(X, x)$  ankommt, aber nicht auf die einzelnen Elemente.

2.16. BEMERKUNG. Für  $x = y$  gehört also zu jedem  $\alpha \in \pi_1(X, x)$  ein Automorphismus von  $\pi_1(X, x)$ . In diesem Fall handelt es sich um den inneren Automorphismus

$$\gamma \longmapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha .$$

Dies zeigt: Wenn  $\pi_1(X, x)$  nicht kommutativ ist, kann man nicht von den Elementen von  $\pi_1 X$  sprechen, ohne einen Fußpunkt zu fixieren.

2.17. BEMERKUNG. Es sei  $(X, x)$  ein punktierter topologischer Raum. Dann definieren wir den Pfadraum  $PX$ , den freien Schleifenraum  $LX$  und den (punktierten) Schleifenraum  $\Omega(X, x)$  durch

$$\begin{aligned} PX &= (C([0, 1], X), \mathcal{O}_{\text{ko}}) , \\ LX &= \{\gamma \in PX \mid \gamma(0) = \gamma(1)\} \subset PX , \\ \text{und } \Omega(X, x) &= \{\gamma \in LX \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x\} \subset LX , \end{aligned}$$

wobei  $LX$  und  $\Omega(X, x)$  die von  $PX$  induzierte Unterraumtopologie tragen.

- (1) Da  $[0, 1]$  kompakt ist, sind relative Homotopien von Schleifen in  $(X, x)$  nach Bemerkung 2.9 (2) gerade Wege in  $\Omega(X, x)$ . Also entspricht  $\pi_1(X, x)$  gerade der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $\Omega(X, x)$ , kurz

$$\pi_1(X, x) = \pi_0(\Omega(X, x)) .$$

- (2) Falls  $X$  wegzusammenhängend ist, hat  $LX$  gerade die Wegzusammenhangskomponenten

$$\pi_0(LX) = \pi_1(X, x)^{\text{ab}} ,$$

da wir nach Bemerkung 2.16 die Elemente  $\gamma$  und  $\alpha^{-1}\gamma\alpha$  identifizieren müssen. Hierbei bezeichnet  $G^{\text{ab}}$  die *Abelisierung*

$$G^{\text{ab}} = G/[G, G]$$

der Gruppe  $G$ , die dadurch entsteht, dass alle Kommutatoren  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$  mit dem neutralen Element gleichgesetzt werden. Die Abelisierung ist der größte abelsche Quotient von  $G$ .

- (3) Analog zu (1) kann man höhere Homotopiegruppen induktiv für  $k \geq 2$  durch

$$\pi_k(X, x) = \pi_{k-1}(\Omega(X, x), e_x)$$

definieren. Dabei bezeichnet  $e_x$  wie in Satz 2.14 die konstante Schleife im Punkt  $x$ . Man sieht hier aber beispielsweise nicht, dass alle  $\pi_k(X, x)$  für  $k \geq 2$  abelsch sind.

So, wie man in einer Kategorie nicht nur Objekte betrachtet, sondern immer auch Morphismen, betrachtet man nicht nur Kategorien für sich, sondern auch „Abbildungen“ zwischen ihnen. Dabei muss man vorsichtig sein, da Abbildungen im strengen Sinne nur zwischen Mengen, aber nicht zwischen Klassen definiert sind.

2.18. DEFINITION. Es seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei Kategorien. Ein (kovarianter) *Funktor*  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ordnet jedem Objekt  $A \in \text{obj}(\mathcal{A})$  ein Objekt  $\mathcal{F}A \in \text{obj}(\mathcal{B})$  und jedem Morphismus  $F \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$  einen Morphismus  $\mathcal{F}F \in \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$  zu, so dass

$$\mathcal{F} \text{id}_A = \text{id}_{\mathcal{F}A}, \quad (1)$$

$$\mathcal{F}(F \circ G) = \mathcal{F}F \circ \mathcal{F}G \quad (2)$$

für alle  $A, B, C \in \text{obj}(\mathcal{A})$  und alle  $F \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$ ,  $G \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ .

2.19. DEFINITION. Wir betrachten die Kategorien  $\mathcal{Top}_+$  (und  $\mathcal{HTop}_+$ ) der punktierten topologischen Räume und der (relativen Homotopieklassen von) stetigen Abbildungen mit

$$\text{obj}(\mathcal{Top}_+) = \text{obj}(\mathcal{HTop}_+) = \{ (X, x) \mid X \in \text{obj}(\mathcal{Top}) \text{ und } x \in X \},$$

$$\text{hom}_{\mathcal{Top}_+}((X, x), (Y, y)) = \{ F: X \rightarrow Y \mid F \in \text{hom}_{\mathcal{Top}}(X, Y) \text{ und } F(x) = y \}$$

$$\text{und } \text{hom}_{\mathcal{HTop}_+}((X, x), (Y, y)) = \text{hom}_{\mathcal{Top}_+}((X, x), (Y, y)) / \sim,$$

wobei  $\sim$  hier Homotopie relativ zum Basispunkt bezeichnet. Die Identität auf  $(X, x)$  ist die (relative Homotopieklasse der) Abbildung  $\text{id}_{(X, x)}$ , und die Verkettung ist die Hintereinanderausführung.

2.20. BEISPIEL. Durch Vergessen der Basispunkte und Übergang zu (relativen) Homotopieklassen von Abbildungen erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Top}_+ & \longrightarrow & \mathcal{HTop}_+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Top} & \longrightarrow & \mathcal{HTop} \end{array}$$

2.21. SATZ. Die Fundamentalgruppe ist ein Funktor

$$\pi_1: \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$$

von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen. Dabei wird  $(X, x)$  auf  $\pi_1(X, x)$  und  $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  auf  $F_* = \pi_1 F: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  abgebildet mit

$$F_*[\gamma] = [F \circ \gamma] \in \pi_1(Y, y) \quad \text{für alle } [\gamma] \in \pi_1(X, x).$$

Dieser Funktor ist auch auf  $\mathcal{HTop}_+$  wohldefiniert.

BEWEIS. Sei  $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  eine stetige punktierte Abbildung. Als erstes zeigen wir, dass  $\pi_1 F = F_*$  ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Sei  $H$  eine relative Homotopie zwischen  $\gamma_0, \gamma_1: ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (X, x)$ , dann ist die Abbildung  $F \circ H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine relative Homotopie zwischen  $F \circ \gamma_0$  und  $F \circ \gamma_1$ , also ist  $F_*$  wohldefiniert.

Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei Schleifen in  $(X, x)$ . Dann folgt

$$(F \circ \gamma_1)(F \circ \gamma_2) = F \circ (\gamma_1 \gamma_2)$$

direkt aus Definition 2.13, also ist  $F_*$  ein Gruppenhomomorphismus.

Als nächstes überprüfen wir, dass  $\pi_1$  die beiden Eigenschaften aus Definition 2.18 erfüllt. Da  $\text{id}_X \circ \gamma = \gamma$ , gilt offensichtlich (1), also

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)}.$$

Seien  $F: (Y, y) \rightarrow (Z, z)$  und  $G: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  punktierte Abbildungen. Dann folgt (2), da

$$(F \circ G)_*[\gamma] = [(F \circ G) \circ \gamma] = [F \circ (G \circ \gamma)] = F_*(G_*[\gamma]).$$

Um zu zeigen, dass  $\pi_1$  auch auf  $\mathcal{HTop}_+$  wohldefiniert ist, müssen wir nur überprüfen, dass  $F_*$  nur von der relativen Homotopieklasse von  $F$  abhängt. Sei also  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine relative Homotopie zwischen  $F_0$  und  $F_1: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ , dann ist die Abbildung  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$  mit

$$(t, s) \mapsto H(\gamma(t), s)$$

eine relative Homotopie zwischen  $F_{0*}\gamma$  und  $F_{1*}\gamma$ . □

Wir können den Funktor  $\pi_1: \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$  also in zwei Funktoren

$$\mathcal{Top}_+ \longrightarrow \mathcal{HTop}_+ \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{Grp},$$

zerlegen, dabei ist der erste Funktor der gleiche wie in Beispiel 2.20.

Wegen Bemerkung 2.16 dürfen wir jedoch auf keinen Fall den Basispunkt vergessen, wir erhalten also keinen Funktor  $\mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Grp}$ . Später werden uns Homologie und Kohomologie solche Funktoren (mit Werten in abelschen Gruppen) liefern.

**2.22. FOLGERUNG.** *Seien  $(X, x), (Y, y)$  homotopieäquivalente Paare topologischer Räume, dann ist  $\pi_1(X, x)$  isomorph zu  $\pi_1(Y, y)$ .*

**BEWEIS.** Sei  $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  homotopieinvers zu  $G: (Y, y) \rightarrow (X, x)$ , dann folgt aus Funktorialität, dass

$$G_* \circ F_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)} \quad \text{und} \quad F_* \circ G_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y)}.$$

Also sind  $F_*$  und  $G_*$  zueinander inverse Gruppenisomorphismen. □

Mit dem gleichen Argument sieht man, dass Funktoren stets Isomorphismen auf Isomorphismen abbilden.

**2.23. DEFINITION.** Ein topologischer Raum heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist mit  $\pi_1 X = \{e\}$ .

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass der Isomphietyp von  $\pi_1(X, x)$  nach Satz 2.15 nicht vom Basispunkt  $x \in X$  abhängt. In Übung 2.77 lernen Sie andere Charakterisierungen einfach zusammenhängender Räume kennen.

- 2.24. BEISPIEL.**
- (1) Der einpunktige Raum  $\{*\}$  ist einfach zusammenhängend, da es nur die konstante Schleife  $t \mapsto *$  gibt.
  - (2) Sei  $X$  zusammenziehbar, dann ist  $X$  nach Beispiel 2.5 zu  $\{*\}$  homotopieäquivalent, also folgt  $\pi_1(X) = \{e\}$ . Nach Bemerkung 1.92 (3) sind zusammenziehbare Räume insbesondere wegzusammenhängend, also ist  $X$  auch einfach zusammenhängend.

## 2.c. Die Fundamentalgruppe der $S^1$

In diesem Abschnitt rechnen wir unsere erste Fundamentalgruppe aus, und zwar „von Hand“. Anschließend beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz und den Satz von Borsuk-Ulam als Anwendungen davon.

Wir fassen  $S^1$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  (mit der Unterraumtopologie) auf. Um  $\pi_1(S^1, 1)$  zu berechnen, brauchen wir den Begriff der Überlagerung.

**2.25. DEFINITION.** Eine Abbildung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  heißt *Überlagerung*, wenn es zu jedem  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  von  $x$  und eine Menge  $M$  mit diskreter Topologie gibt, so dass

$$\begin{array}{ccccc} U \times M & \cong & p^{-1}(U) & \hookrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & = & U & \hookrightarrow & X \end{array} .$$

Wir nennen dann  $U$  *gleichmäßig überlagert*. Eine Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  heißt *universell*, wenn  $\tilde{X}$  zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

2.26. BEISPIEL. Betrachte die modifizierte komplexe Exponentialabbildung  $p = e^{2\pi i \cdot} : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ . Diese Abbildung ist eine Überlagerung, denn jeder Punkt  $z = e^{2\pi i \varphi} \in S^1$  hat eine gleichmäßig überlagerte Umgebung  $S^1 \setminus \{-z\}$ , da

$$p^{-1}(S^1 \setminus \{-z\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left( \varphi + n - \frac{1}{2}, \varphi + n + \frac{1}{2} \right) \cong \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \mathbb{Z}.$$

Da  $\mathbb{R}$  zusammenziehbar ist, ist  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  nach Definition 2.25 eine universelle Überlagerung.

2.27. SATZ (Homotopie-Liftungssatz). Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung, und seien  $\tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}$  und  $H: Y \times [0, 1] \rightarrow X$  stetig mit

$$H(\cdot, 0) = p \circ \tilde{F}: Y \rightarrow X,$$

dann existiert genau eine stetige Abbildung  $\tilde{H}: Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  mit

$$p \circ \tilde{H} = H \quad \text{und} \quad \tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}.$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{X} \\ \times\{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Wir nennen  $\tilde{H}$  einen Lift der Homotopie  $H$  mit Startwert  $\tilde{F}$ .

BEWEIS. Idee: Lokale Existenz und Eindeutigkeit liefern globale Existenz und Eindeutigkeit.

Zur lokalen Existenz von Lifts fixiere  $y \in Y$ . Zu jedem  $s \in [0, 1]$  existiert eine gleichmäßig überlagerte Umgebung  $U_s$  von  $H(y, s) \in X$ , ein offenes Teilintervall  $I_s \subset [0, 1]$  mit  $s \in I_s$  und eine offene Umgebung  $V_s \subset Y$  von  $y$  mit  $H(V_s \times I_s) \subset U_s$ . Endlich viele solche Intervalle  $I_s$  überdecken  $[0, 1]$ , da  $[0, 1]$  kompakt ist. Also existieren  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ , gleichmäßig überlagerte  $U_i$  und Umgebungen  $V_i$  von  $y$  mit

$$H(V_i \times [t_{i-1}, t_i]) \subset U_i.$$

Wir konstruieren induktiv Umgebungen  $W_i$  von  $y$  und Lifts  $\tilde{H}_i$  von  $H|_{W_i \times [0, t_i]}$ . Setze dazu zunächst  $W_0 = Y$  und  $\tilde{H}_0(\cdot, 0) = \tilde{F}$ . Sei jetzt eine offene Umgebung  $W_{i-1}$  von  $y$  und ein Lift  $\tilde{H}_{i-1}$  von  $H|_{W_{i-1} \times [0, t_{i-1}]}$  bereits konstruiert. Betrachte die stetige Abbildung

$$f_i: W_{i-1} \cap V_i \xrightarrow{\tilde{H}_{i-1}(\cdot, t_{i-1})} p^{-1}(U_i) = U_i \times M_i \longrightarrow M_i,$$

und sei  $m_i = f_i(y) \in M_i$ . Da  $M_i$  die diskrete Topologie trägt, ist  $\{m_i\} \subset M_i$  offen, also ist

$$W_i = f_i^{-1}(m_i) \subset W_{i-1} \cap V_i$$

eine offene Umgebung von  $y$ . Für  $w \in W_i$  setze

$$\tilde{H}_i(w, s) = \begin{cases} \tilde{H}_{i-1}(w, s) & 0 \leq s \leq t_{i-1}, \\ (H(w, s), m_i) \in U_i \times M_i \subset \tilde{X} & t_{i-1} \leq s \leq t_i. \end{cases}$$

Dann ist  $\tilde{H}_i$  auf beiden Teilbereichen stetig und stimmt auf dem Durchschnitt überein, ist also insgesamt stetig. Setze schließlich  $W_y = W_k$  und erhalte einen Lift

$$\tilde{H}_y: W_y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X} \quad \text{von} \quad H|_{W_y \times [0, 1]}.$$

Außerdem ist das die einzige mögliche Wahl von  $\tilde{H}_i: W \times [0, t_i] \rightarrow \tilde{X}$ . Wenn die Eindeutigkeit auf  $W \times [0, t_{i-1}]$  bereits induktiv gezeigt ist, erzwingen für alle  $y' \in W$  Liftungseigenschaft sowie die Stetigkeit der Abbildung

$$[t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{\tilde{H}(y', \cdot)} p^{-1}(U_i) = U_i \times M_i \longrightarrow M_i$$

unsere Wahl von  $\tilde{H}(y', s)$  für  $s \in [t_{i-1}, t_i]$ , denn eine stetige Funktion in einen diskreten Raum ist lokal konstant.

Schließlich ist  $\tilde{H}_y = \tilde{H}_k: W_y = W_k \rightarrow \tilde{X}$  ein stetiger Lift von  $H|_{W_y \times [0, 1]}$  mit  $\tilde{H}(y', 0) = \tilde{F}(y')$  für alle  $y' \in W_y$ . Seien  $y, y'$  gegeben, dann folgt

$$\tilde{H}_y|_{(W_y \cap W_{y'}) \times [0, 1]} = \tilde{H}_{y'}|_{(W_y \cap W_{y'}) \times [0, 1]}$$

aus unser obigen lokalen Eindeutigkeitsüberlegung.

Somit können wir alle lokalen Lifts  $\tilde{H}_y: W_y \rightarrow \tilde{X}$  zu einer globalen Abbildung  $\tilde{H}$  zusammensetzen. Die Stetigkeit von  $\tilde{H}$  folgt, da  $\tilde{H}$  nahe  $(y, s)$  mit  $\tilde{H}_y$  übereinstimmt und  $\tilde{H}_y$  nach Konstruktion bei  $(y, s)$  stetig ist.  $\square$

2.28. SATZ. *Es gilt  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ , wobei  $[\text{id}_{S^1}]$  der  $1 \in \mathbb{Z}$  entspricht.*

BEWEIS. Wir betrachten die Überlagerung  $p = e^{2\pi i \cdot}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  aus Beispiel 2.26. Wir fassen  $\gamma \in \pi_1(S^1, 1)$  als Homotopie  $H$  von Abbildungen von  $Y = \{*\}$  nach  $S^1$  mit  $H(*, s) = \gamma(s)$  auf. Es sei  $\tilde{F}(*) = 0 \in \mathbb{Z}$  ein Lift von  $H(*, 0) = 1$ , dann existiert nach Satz 2.27 ein Lift  $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{H}(*, s)$ , und es folgt  $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ .

Seien  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  relativ homotope Schleifen in  $(S^1, 1)$  mit Lifts  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir fassen eine relative Homotopie  $H$  zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  als Homotopie  $K(s, t) = H(t, s)$  von der konstanten Abbildung  $s \mapsto 1$  zu sich selbst auf. Dann lässt sich  $K$  nach Satz 2.27 zu einer Homotopie  $\tilde{K}$  liften, wobei  $\tilde{K}(s, t) = \tilde{\gamma}_s(t)$  für  $s \in \{0, 1\}$  aufgrund der Eindeutigkeit der Lifts  $\tilde{\gamma}_i$ . Wir erhalten also eine Homotopie  $\tilde{H}(t, s) = \tilde{K}(s, t)$  zwischen  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$ . Da  $s \mapsto \tilde{H}(1, s)$  die konstante Abbildung  $H(1, s) = 1 \in S^1$  liftet, erhalten wir eine relative Homotopie zwischen Wegen von  $0 \in \mathbb{R}$ , insbesondere folgt  $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) \in \mathbb{Z}$ . Also erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \Phi([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z} \quad \text{für } \tilde{\gamma} \text{ wie oben.}$$

Ein Lift von  $\gamma_1 \gamma_2$  ist

$$\widetilde{\gamma_1 \gamma_2} = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_2(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

dabei nutzen wir aus, dass für jede Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  die Abbildung  $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) + n$  ein Lift von  $\gamma$  ist, wenn  $\tilde{\gamma}$  ein Lift ist, da

$$e^{2\pi i(\tilde{\gamma}(t)+n)} = e^{2\pi i\tilde{\gamma}(t)} \cdot e^{2\pi in} = \gamma(t) \cdot 1.$$

Also ist  $\Phi$  ein Gruppenhomomorphismus. Man kann sich durch Nachrechnen überzeugen, dass  $\gamma$  dabei gerade auf die Umlaufzahl  $\nu_{(\gamma, 0)}$  aus Beispiel 2.1 (1) abgebildet wird.

Zur Injektivität seien  $\gamma_0, \gamma_1$  Schleifen in  $S^1$  mit Lifts  $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ , so dass  $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = 0$  und  $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) = n \in \mathbb{Z}$ . Da  $\mathbb{R}$  zusammenziehbar ist, ist  $\mathbb{R}$  einfach zusammenhängend. Insbesondere existiert eine relative Homotopie  $\tilde{H}$  zwischen  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$  (Übung 2.77). Dann ist  $p \circ \tilde{H}$  eine relative Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ , also folgt  $[\gamma_0] = [\gamma_1]$ .

Zur Surjektivität betrachte zu  $n \in \mathbb{Z}$  die Schleife  $\gamma_n$  mit Lift  $\tilde{\gamma}_n$ , wobei

$$\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t} \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma}_n(t) = n t. \quad \square$$



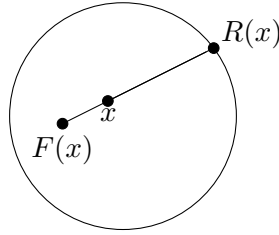


ABBILDUNG 2.2. Die Retraktion im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Wir kommen jetzt zu zwei Anwendungen; weitere folgen in den Übungen 2.80 und 2.81. Zur Motivation zunächst der eindimensionale Fall des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

2.29. BEMERKUNG. Jede stetige Funktion  $f: D^1 = [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  hat einen Fixpunkt. Betrachte dazu die Funktion

$$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto x - f(x).$$

Es gilt  $f(x) = x$  genau dann, wenn  $g(x) = 0$ . Da  $g(-1) \leq 0$  und  $g(1) \geq 0$ , folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

2.30. BEMERKUNG. Sei  $Y \subset X$ , sei  $y \in Y$ , und sei  $R: X \rightarrow Y$  eine Retraktion, dann ist der Homomorphismus  $\pi_1 R: \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  surjektiv und  $\pi_1 \iota: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$  injektiv. Zerlege dazu  $\text{id}_{\pi_1(Y, y)} = \pi_1 \text{id}_Y$  als

$$\pi_1(Y, y) \xrightarrow{\pi_1 \iota} \pi_1(X, y) \xrightarrow{\pi_1 R} \pi_1(Y, y).$$

Mit anderen Worten: eine Retraktion verhält sich ähnlich wie eine Projektion in einem (semi-)direkten Produkt von Gruppen, Ringen, Vektorräumen etc.

2.31. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz,  $n = 2$ ). Jede stetige Abbildung  $F: D^2 \rightarrow D^2$  hat einen Fixpunkt.

BEWEIS. Falls es keinen Fixpunkt gibt, konstruieren wir eine Retraktion  $R: D^2 \rightarrow \partial D^2 = S^1$  wie in Abbildung 2.2. Da  $\pi_1(D^2, 1) = 0$  und  $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ , widerspricht das der obigen Bemerkung.

Zur Konstruktion der Retraktion beachten wir, dass  $\min_{x \in D^2} d(F(x), x) > 0$  wegen Kompaktheit von  $D^2$ . Daher erhalten wir eine stetige Abbildung, indem wir die Strecke von  $F(x)$  nach  $x$  über  $x$  hinaus fortsetzen, bis sie  $S^1$  schneidet, und  $x$  den Schnittpunkt  $R(x)$  zuordnen. Falls  $x \in S^1$ , ist  $x = R(x)$  dieser Schnittpunkt, also erhalten wir die gesuchte Retraktion.  $\square$

Der folgende Satz gilt analog für Abbildungen  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wird hier aber nur für  $n = 2$  bewiesen.

2.32. SATZ (Borsuk-Ulam). Sei  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig, dann existiert  $x \in S^2$  mit  $f(x) = f(-x)$ .

BEWEIS. Falls nicht, existiert eine Abbildung  $G: S^2 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  mit

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|},$$

und es folgt  $G(x) = -G(-x)$  auf ganz  $S^2$ . Betrachte den Äquator

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ohne Einschränkung gelte  $G(\gamma(0)) = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ , andernfalls drehen wir  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  entsprechend. Es sei  $g = G \circ \gamma$ . Wir wollen  $G_*[\gamma] = [g] \in \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$  bestimmen. Sei dazu  $\tilde{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ein

Lift von  $g: [0, 1] \rightarrow S^1$  wie in Satz 2.28 unter der Überlagerung  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  mit  $p(t) = e^{2\pi t}$  aus Beispiel 2.26. Aus

$$g(t + 1/2) = G(-\gamma(t)) = -(G \circ \gamma)(t) = -g(t)$$

folgt

$$\tilde{g}(t + 1/2) - \tilde{g}(t) \in \mathbb{Z} + 1/2,$$

da  $p^{-1}(-1) = \mathbb{Z} + 1/2$ . Da der obige Ausdruck stetig von  $t$  abhängt und  $\mathbb{Z} + 1/2$  diskret ist, ist er konstant, und wir erhalten

$$\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = (\tilde{g}(1) - \tilde{g}(1/2)) + (\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)) = 2(\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)) \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

Insbesondere wird der Äquator auf ein ungerades Element von  $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$  abgebildet. Der Äquator  $\gamma$  ist aber null-homotop in  $S^2$ . Sei  $H$  eine Homotopie von  $\gamma$  zur konstanten Schleife, dann ist  $G \circ H$  eine Homotopie von  $g$  zur konstanten Schleife, was einen Widerspruch darstellt.  $\square$

Die Beweise der obigen Sätze sind nicht konstruktiv, das heißt, sie liefern kein Verfahren, das einen Punkt mit der gesuchten Eigenschaft findet. Das gleiche gilt für die beiden Anwendungen in den Übungen 2.80 und 2.81, auch dort sind die Beweise indirekt. Man beachte, dass es in allen vier Problemen beliebig „schlecht konditionierte“ Situationen gibt, in denen eine beliebige kleine Variation der Ausgangsdaten (zum Beispiel Variation von  $F$  um weniger als  $\varepsilon > 0$  in der Supremumsnorm) beliebig große Änderungen des gesuchten Punktes bewirken können.

## 2.d. Der Satz von Seifert-van Kampen

Wir wollen als nächstes den Satz von Seifert-van Kampen beweisen, der es in vielen Fällen ermöglicht, die Fundamentalgruppe eines zusammengesetzten Raumes aus den Fundamentalgruppen seiner Bausteine zu rekonstruieren. Dazu benötigen wir ein paar Begriffe aus der Gruppentheorie.

Sei  $(G_i)_{i \in I}$  eine beliebige Familie von Gruppen. Wir wollen zunächst eine Gruppe konstruieren, die alle Gruppen  $G_i$  enthält, und in der keine „unnötigen“ Relationen gelten. Diese Gruppe soll das „freie Produkt“ der Gruppen  $G_i$  heißen. Wir werden sehen, dass das freie Produkt das Koprodukt in der Kategorie  $\mathcal{G}rp$  der Gruppen ist.

2.33. BEMERKUNG (Zur Erinnerung). Produkt  $\prod$  und Summe  $\bigoplus$  von Gruppen; Abbildungen

$$G_j \xrightarrow{\iota_j} \bigoplus_i G_i \longrightarrow \prod_i G_i \xrightarrow{\pi_j} G_j.$$

In beiden Fällen kommutieren die Elemente verschiedener Gruppen, was eine zusätzliche Relation darstellt, die wir hier umgehen wollen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Gruppen  $G_i$  paarweise disjunkt sind, ansonsten müssten wir die Elemente von  $G_i$  als  $(i, g)$  „markieren“.

2.34. DEFINITION. Sei  $(G_i)_{i \in I}$  eine Familie von Gruppen. Ein Wort  $w$  im Alphabet  $\dot{\cup}_i G_i$  ist ein Tupel  $g_1 \dots g_k$  der endlichen Länge  $\ell(w) = k \geq 0$  von Buchstaben  $g_j \in G_{i_j}$  mit  $i_j \in I$ . Schreibe  $\emptyset$  für das leere Wort. Ein Wort heißt *gekürzt* oder *reduziert*, wenn

- (1) kein Buchstabe ein neutrales Element  $e_i \in G_i$  ist, und
- (2) keine zwei aufeinanderfolgenden Buchstaben  $g_j, g_{j+1}$  zur gleichen Gruppe  $G_{i_j} = G_{i_{j+1}}$  gehören.

Ein Wort *kürzen* oder *reduzieren* heißt, so oft wie möglich einen der folgenden Schritte auszuführen:

- (1) Weglassen eines Einselementes  $e_i \in G_i$  an einer beliebigen Stelle des Wortes,

$$w' e_i w'' \mapsto w' w'',$$

- (2) Ersetzen zweier aufeinanderfolgender Buchstaben  $g_j, g_{j+1} \in G_{i_j}$  aus derselben Gruppe durch ihr Produkt,

$$w' g_j g_{j+1} w'' \mapsto w'(g_j g_{j+1}) w'' .$$

Zwei Wörter heißen *äquivalent*, wenn sie zum gleichen Wort reduziert werden können.

2.35. PROPOSITION. *Jedes Wort lässt sich auf genau eine Weise reduzieren.*

BEWEIS. Die einzige mögliche Wahl beim Reduzieren besteht in der Reihenfolge, in der mögliche Reduktionsschritte ausgeführt werden. Falls diese Schritte an räumlich getrennten Stellen im Wort stattfinden, ist ihre Reihenfolge egal, beispielsweise sei  $1 \leq i, i+1 < j, j+1 \leq k$ , dann ist

$$w' \underbrace{g_i g_{i+1}}_{\in G_i} w'' \underbrace{g_j g_{j+1}}_{\in G_j} w''' \sim w'(g_i g_{i+1}) w'' (g_j g_{j+1}) w'''$$

unabhängig von der Reihenfolge der Reduktionsschritte.

Nur wenn ein Element gleichzeitig auf zwei verschiedene Weisen reduziert werden kann, kann es auf die Reihenfolge ankommen. Die möglichen Buchstabenketten, bei denen das vorkommen kann, sind

$$\begin{aligned} w' g h k w'' &\sim w' (g h) k w'' \sim w' g (h k) w'' \sim w' (g h k) w'' , \\ w' g e w'' &\sim w' (g e) w'' \sim w' g w'' \quad \text{und} \quad w' e g w'' \sim w' (e g) w'' \sim w' g w'' \end{aligned}$$

mit  $g, h, k$  und  $e = e_i \in G_i$  für ein  $i \in I$ . Hier sorgen die Rechenregeln für Gruppen dafür, dass es nicht auf die Reihenfolge der Reduktion ankommt.  $\square$

2.36. DEFINITION. Sei  $(G_i)_{i \in I}$  eine Familie von Gruppen. Das *freie Produkt*  $*_i G_i = \coprod_i G_i$  der  $G_i$  ist die Menge aller reduzierten Wörter, die Multiplikation ist Hintereinanderschreiben und anschließende Reduktion. Definiere Abbildungen  $\iota_j: G_j \rightarrow \coprod_i G_i$  mit

$$\iota_j(g) = \begin{cases} \emptyset & g = e_j , \\ g & g \in G_j \setminus \{e_j\} . \end{cases}$$

2.37. PROPOSITION. *Das freie Produkt ist eine Gruppe, und die Abbildungen  $\iota_j$  sind Homomorphismen.*

BEWEIS. Da es laut Beweis des Satzes 2.35 nicht auf die Reihenfolge der Reduktionsschritte ankommt, erhalten wir das Produkt dreier Wörter durch Hintereinanderschreiben aller drei Wörter und anschließendes Kürzen; hieraus folgt Assoziativität der Multiplikation.

Das leere Wort ist offensichtlich neutrales Element, und für jedes Wort gilt

$$(g_1 \dots g_k)^{-1} = g_k^{-1} \dots g_1^{-1} .$$

Für alle  $i \in I$  und alle  $g \in G_i$  ist  $\iota_i(g)$  gekürzt, und offensichtlich ist  $\iota_i$  ein Homomorphismus.  $\square$

2.38. BEISPIEL. (1) Freie Gruppen in einem Buchstaben  $\mathbb{Z}$ .

(2) Freie Gruppen  $F_k = \coprod_{i=1}^k \mathbb{Z}$ .

(3) Unendliche Diedergruppe  $D_\infty \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  (Isometriegruppe des metrischen Raumes  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ), die nichttrivialen Elemente der beiden Kopien von  $\mathbb{Z}_2$  sind zwei benachbarte Spiegelungen, etwa an den Punkten 0 und  $1/2$ .

2.39. SATZ. *Das Produkt von Gruppen ist ein Produkt auf der Kategorie der Gruppen. Das freie Produkt von Gruppen ist ein Koprodukt auf der Kategorie der Gruppen.*

BEWEIS. Sei  $(G_i)_{i \in I}$  eine Familie von Gruppen. Wie in Übung 1.112 ist ihr Produkt

$$\prod_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i \text{ für alle } i \in I\},$$

zusammen mit den Projektionen

$$p_j: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_j, \quad p_j((g_i)_{i \in I}) = g_j.$$

Elemente des Produktes werden komponentenweise verknüpft, das neutrale Element ist  $(e_i)_{i \in I}$  mit  $e_i \in G_i$  neutral, das Inverse von  $(g_i)_{i \in I}$  ist  $(g_i^{-1})_{i \in I}$ . Die Projektionen  $p_j$  sind Gruppenhomomorphismen.

Sei  $H$  eine weitere Gruppe, und seien  $f_i: H \rightarrow G_i$  Gruppenhomomorphismen. Zu zeigen ist nach Bemerkung 1.47 die universelle Eigenschaft des Produktes, wonach es genau einen Homomorphismus  $f: H \rightarrow G$  mit  $f_i = p_i \circ f$  für alle  $i \in I$  gibt. Man sieht leicht, dass dann gerade

$$f(h) = (f_i(h))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$$

folgt, und dass  $f$  tatsächlich ein Homomorphismus ist.

Nach Bemerkung 1.41 besagt die universelle Eigenschaft des Koproductes, dass es zu jeder Gruppe  $H$  und Homomorphismen  $f_i: G_i \rightarrow H$  genau einen Homomorphismus  $f: \ast_{i \in I} G_i \rightarrow H$  mit  $f_i = f \circ \iota_i$  für alle  $i \in I$  gibt. Da das freie Produkt von den einbuchstabigen Wörtern erzeugt wird, folgt

$$f(g_1 \cdots g_k) = f_{i_1}(g_1) \cdots f_{i_k}(g_k) \in H,$$

wobei  $g_j \in G_{i_j}$  wie oben. Offensichtlich ist Kürzen mit  $f$  verträglich, da alle  $f_i$  Homomorphismen sind. Also ist  $f$  ebenfalls Homomorphismus.  $\square$

Im Satz von Seifert-van Kampen benötigen wir einen Quotienten des freien Produkts. Da man Quotienten von Gruppen nur nach Normalteilern bilden kann, erinnern wir uns an die Definition von Normalteilern.

Ein *Normalteiler*  $N$  einer Gruppe  $G$  ist eine Untergruppe mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass  $gng^{-1} \in N$  für alle  $g \in G$  und alle  $n \in N$ . Kerne von Gruppenhomomorphismen  $F: G \rightarrow H$  haben diese Eigenschaft, denn sei  $g \in G$ ,  $k \in \ker F$ , dann folgt

$$F(gkg^{-1}) = F(g) \cdot \underbrace{F(k)}_{=e} \cdot F(g)^{-1} = e \in H,$$

also  $gkg^{-1} \in \ker F$ .

Sei umgekehrt  $N$  ein Normalteiler, dann definieren wir eine Gruppenstruktur auf dem Quotienten

$$G/N = \{gN \mid g \in G\} \quad \text{mit} \quad gN = \{gn \mid n \in N\}$$

durch

$$(gN) \cdot (hN) = g(hNh^{-1}) \cdot (hN) = gh \cdot N \cdot N = (gh)N.$$

Die Normalteiler-Eigenschaft garantiert uns, dass dieses Produkt wohldefiniert ist. Die natürliche Abbildung  $G \rightarrow G/N$  mit  $g \mapsto gN$  ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern  $N$ .

2.40. DEFINITION. Es sei  $G$  eine Gruppe und  $M \subset G$  eine Teilmenge. Dann ist der von  $M$  erzeugte Normalteiler ( $M$ ) von  $G$  der kleinste Normalteiler  $N \subset G$ , so dass  $M \subset N$ .

Man kann sich überzeugen, dass Durchschnitte von Normalteilern wieder Normalteiler sind, so dass der Begriff des kleinsten Normalteilers in der obigen Definition sinnvoll ist. Alternativ dazu geben wir  $(M)$  explizit an.

2.41. BEMERKUNG. Es gilt

$$(M) = \{ g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1} \mid k \geq 0, g_1, \dots, g_k \in G \text{ und } m_1, \dots, m_k \in M \}. \quad (*)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die rechte Seite eine Untergruppe von  $M$  beschreibt, und sogar einen Normalteiler, da

$$g(g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1})g^{-1} = (gg_1)m_1^{\pm 1}(gg_1^{-1}) \cdots (gg_k)m_k^{\pm 1}(gg_k)^{-1}.$$

Umgekehrt enthält jeder Normalteiler, der  $M$  enthält, auch alle Produkte von Elementen der Form  $gm^{\pm 1}g^{-1}$ , also ist die rechte Seite von (\*) tatsächlich der kleinste Normalteiler, der  $M$  enthält.

Wir formulieren und beweisen jetzt den weiter oben angekündigten Satz.

2.42. SATZ (Seifert-van Kampen). Sei  $(X, x)$  ein punktierter Raum, und sei  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so dass

- (1) jede Menge  $U \in \mathcal{U}$  den Basispunkt  $x$  enthält, und
- (2) jeder Durchschnitt  $U \cap V$  für  $U, V \in \mathcal{U}$  wegzusammenhängend ist.

Dann ist die von den Homomorphismen  $\iota_{U*}: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  induzierte natürliche Abbildung

$$\varphi: \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

surjektiv. Falls darüberhinaus

- (3) jeder Durchschnitt  $U \cap V \cap W$  für  $U, V, W \in \mathcal{U}$  wegzusammenhängend ist,

dann wird der Kern der Abbildung  $\varphi$  gegeben durch

$$\ker \varphi = \left( \left\{ (\iota_{U \cap V \rightarrow U})_*[\gamma] \cdot (\iota_{U \cap V \rightarrow V})_*[\gamma]^{-1} \mid U, V \in \mathcal{U} \text{ und } [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x) \right\} \right). \quad (*)$$

Hier bezeichnen  $\iota_U: U \rightarrow X$  und  $\iota_{U \cap V \rightarrow U}: U \cap V \rightarrow U$  die Inklusionsabbildungen.

BEWEIS. Wir schreiben wieder  $\alpha\beta$  für die Verkettung beliebiger Wege mit passenden Anfangs- und Endpunkten wie im Beweis von Satz 2.15.

Um zu zeigen, dass die Abbildung  $\varphi$  surjektiv ist, betrachten wir eine Schleife  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ . Da  $(\gamma^{-1}(U))_{U \in \mathcal{U}}$  eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls  $[0, 1]$  ist, existiert nach dem Satz 1.55 von Lebesgue ein  $n > 0$ , so dass jeder Weg

$$\gamma_i(t) = \left( \gamma|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} \right) \left( \frac{t+i-1}{n} \right)$$

für  $1 \leq i \leq n$  ganz in einer der Mengen  $U_i \in \mathcal{U}$  verläuft. Nach (1) und (2) gibt es Wege  $\alpha_i$  von  $x$  nach  $\gamma(\frac{i}{n}) = \gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$  in  $U_i \cap U_{i+1}$ . Also schreiben wir  $\gamma$  als Verkettung

$$\gamma \sim \underbrace{\gamma_1 \alpha_1^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{U_1*}} \underbrace{\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{U_2*}} \cdots \underbrace{\alpha_{n-1} \gamma_n}_{\in \text{im } \iota_{U_n*}} \in \text{im } \varphi,$$

und es folgt Surjektivität.

Wir bezeichnen die rechte Seite von (\*) mit  $N \subset \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x)$ . Sei  $[\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x)$ , dann ist offensichtlich

$$[e] = [\gamma][\bar{\gamma}] = \underbrace{(\iota_{U \cap V \rightarrow U})_*[\gamma]}_{\in \text{im } \iota_{U*}} \cdot \underbrace{(\iota_{U \cap V \rightarrow V})_*[\bar{\gamma}]^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{V*}} \in \pi_1(X, x),$$

woraus sich  $N \subset \ker \varphi$  ergibt.

Sei umgekehrt  $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$  für Schleifen  $\gamma_i$  in  $U_i \in \mathcal{U}$ , dargestellt durch das entsprechende Wort  $w \in \ker \varphi$ . Dann existiert eine Homotopie  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  von der trivialen Schleife zu  $\gamma$ . Nach dem Satz von Lebesgue können wir das kompakte Einheitsquadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$  so in Waben zerlegen, dass jede Wabe  $W_i \subset [0, 1] \times [0, 1]$  von  $H$  ganz in eine der Mengen  $U_i \in \mathcal{U}$

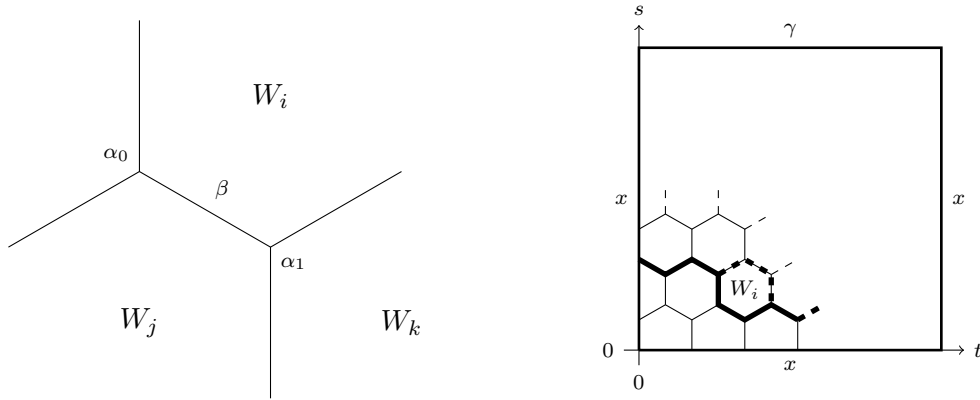


ABBILDUNG 2.3. Zerlegung des Einheitsquadrats in Waben

abgebildet wird. Nach (3) finden wir zu jedem Eckpunkt  $(t, s)$  einen Weg  $\alpha$  von  $x$  nach  $H(t, s)$ , der ganz im Durchschnitt der (maximal drei) offenen Mengen  $U_i, U_j, U_k \in \mathcal{U}$  zu den angrenzenden Waben  $W_i, W_j, W_k$  verläuft. Wir können jetzt jede Kante zwischen zwei Waben wie oben durch eine Schleife  $\alpha_0\beta\alpha_1^{-1}$  beschreiben, die ganz im Durchschnitt der  $U_i, U_j \in \mathcal{U}$  zu den angrenzenden Waben  $W_i, W_j$  verläuft.

Wir zerlegen die Homotopie  $H$  in eine Folge einzelner Homotopien  $H_i$  relativ zu  $x$ , die jeweils eine Wabe  $W_i$  überstreichen, siehe Abbildung 2.3. Zu Beginn der Homotopie wird der betrachtete Pfad beschrieben durch ein Wort aus Buchstaben der Form

$$\cdots \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)*} \underbrace{[\alpha_0\beta\alpha_1]}_{\sigma \text{ in } U_i \cap U_j} \cdots \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x),$$

dabei gehört  $U_j$  hier stets zu einer Wabe  $W_j$  „unterhalb“ des Pfades zu Beginn der Homotopie  $H_i$ . Fall die Kante  $\beta$  an die Wabe  $W_i$  angrenzt, müssen wir als erstes diesen Buchstaben durch einen Buchstaben in  $\pi_1(U_i, x)$  ersetzen. Dazu beachten wir, dass

$$w' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_i)*} [\sigma] w'' = \left( w' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_i)*} [\sigma] \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)*} [\sigma]^{-1} w'^{-1} \right) \left( w' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)*} [\sigma] w'' \right).$$

Dieses Ersetzen entspricht also gerade der Multiplikation von links mit einem Element von  $N$ , vergleiche Bemerkung 2.41.

Wenn wir alle Buchstaben, die zu Kanten der Wabe  $W_i$  gehören, durch Buchstaben in  $\pi_1(U_i, x)$  ersetzt haben, können wir die Homotopie  $H_i$  durchführen. Dabei wird ein Produkt von Schleifen in  $U_i$  durch ein in  $U_i$  homotopes Produkt ersetzt. Nach Kürzen verändert sich das zugehörige Wort im freien Produkt der  $\pi_1(U, x)$  also gar nicht.

Nach endlich vielen Schritten erreichen wir den ursprünglichen Weg  $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ , wobei  $\gamma$  aber möglicherweise durch ein anderes Wort repräsentiert wird, falls ein oder mehrere  $\gamma_i$  als Schleifen in anderen Umgebungen geschrieben wurden. Nochmaliges Multiplizieren mit Elementen von  $N$  behebt dieses Problem.

Da wir mit der trivialen Schleife, dargestellt durch das leere Wort, begonnen haben, haben wir also  $w \in \ker \varphi$  insgesamt als Produkt von Elementen von  $N$  geschrieben, also folgt  $\ker \varphi \subset N$  und daher  $\ker \varphi = N$ .  $\square$

2.43. BEISPIEL. Die Ziffer „8“ lässt sich als Vereinigung zweier Kreise schreiben. Sei „8“ =  $UVV$ , wobei  $U$  und  $V$  kleine offene Umgebungen der beiden Kreise seien, so dass die Kreise Deformations-Retrakte von  $U$  und  $V$  sind. Wähle  $x_0$  als Schnittpunkt der beiden Kreise, dann liefert Seifert-van Kampen, dass  $\pi_1(\text{„8“}, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

2.44. BEISPIEL. Ohne die erste Voraussetzung (1) läßt sich der Satz von Seifert-van Kampen nicht formulieren. Es folgen zwei Beispiele, die zeigen, dass die anderen beiden Voraussetzungen ebenfalls nötig sind.

- (1) Betrachte  $X = S^1 \subset \mathbb{C}$  als Vereinigung zweier zusammenziehbarer Mengen  $U_{\pm} = S^1 \setminus \{\pm i\}$ . Beide Mengen haben triviale Fundamentalgruppe, also ist auch  $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1)$  trivial. Auf der anderen Seite ist  $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$  nichttrivial, insbesondere ist die natürliche Abbildung  $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$  nicht surjektiv. Das liegt daran, dass  $U^+ \cap U^- = S^1 \setminus \{i, -i\}$  nicht zusammenhängend ist, also Voraussetzung (2) verletzt ist.
- (2) Betrachte  $Y = S^1 \cup [-1, 1] \subset \mathbb{C}$ , und setze  $U_x = Y \setminus \{x\}$  für  $x \in \{-i, 0, i\}$ . Dann sind die drei Mengen  $U_x$  jeweils homotopieäquivalent zu einem Kreis, haben also Fundamentalgruppe  $\mathbb{Z}$ . Der Durchschnitt je zweier dieser drei Mengen ist zusammenziehbar, also gilt  $N = \{e\}$  und

$$\pi_1(Y, 1) = (\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)) / N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

denn Voraussetzung (3) folgt aus Voraussetzung (2), solange wir nur zwei offene Mengen betrachten.

Andererseits gilt

$$(\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_0, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)) / N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

und  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , etwa haben beide Gruppen unterschiedliche Abelisierungen. Da  $U_i \cap U_0 \cap U_{-i}$  nicht wegzusammenhängend ist, ist Voraussetzung (3) für die Überdeckung  $\{U_i, U_0, U_{-i}\}$  verletzt.

2.45. BEMERKUNG. Der Spezialfall  $X = U \cup V$  im Satz 2.42 von Seifert-van Kampen ist besonders wichtig und etwas einfacher zu formulieren als der allgemeine Fall. Da der Beweis aber nicht einfacher wird, haben wir gleich den allgemeinen Fall betrachtet.

- (1) Seien  $G, H, K$  Gruppen und  $a: K \rightarrow G, b: K \rightarrow H$  Gruppenhomomorphismen, so definiert man das *amalgamierte Produkt* von  $G$  und  $H$  über  $K$  durch

$$G *_K H = G * H / (\{ a(k)b(k)^{-1} \mid k \in K \}).$$

Das amalgamierte Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft eines Pushouts in der Kategorie  $\mathcal{G}rp$ , vergleiche Folgerung 1.75.

Seien dazu  $i: G \rightarrow G *_K H$  und  $j: H \rightarrow G *_K H$  die natürlichen Homomorphismen, sei  $L$  eine Gruppe und seien  $g: G \rightarrow L, h: H \rightarrow L$  Homomorphismen mit  $g \circ a = h \circ b: K \rightarrow L$ , dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$f: G *_K H \rightarrow L \text{ mit } g = f \circ i \text{ und } h = f \circ j.$$

- (2) Sei  $X = U \cup V$  topologischer Raum mit  $U, V$  offen. Dann trägt  $X$  die Quotiententopologie zur natürlichen Abbildung  $U \sqcup V \twoheadrightarrow X$ . Also ist  $X$  ebenfalls ein Pushout nach Folgerung 1.75. Dazu fasst man  $U \cap V$  als Teilmenge von  $V$  auf und betrachtet die Inklusion  $f: U \cap V \hookrightarrow U$  (oder umgekehrt). Wenn wir einen Basispunkt  $x \in U \cap V$  festlegen, erhalten wir analog einen Pushout  $X = U \cup_{U \cap V} V$  in der Kategorie  $\mathcal{T}op_+$ .

- (3) Der Satz von Seifert-van Kampen besagt, dass der Funktor  $\pi_1$  den Pushout in  $\mathcal{Top}_+$  auf den Pushout in  $\mathcal{Grp}$  abbildet, falls  $U \cap V$  wegzusammenhängend ist. Denn, wie schon gesagt, reichen Voraussetzung (1) und (2) aus, solange man Überdeckungen aus zwei Mengen betrachtet.
- (4) Man beachte: Ein beliebiger Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  muss den Pushout in  $\mathcal{C}$  nicht auf den in  $\mathcal{D}$  abbilden, falls beide Pushouts existieren. Das zeigt bereits Beispiel 2.44 (1). Im allgemeinen erhält man nur einen Morphismus vom Pushout der Bilder unter  $\mathcal{F}$  in das Bild des Pushouts unter  $\mathcal{F}$ , siehe Übung 2.87.

2.46. BEISPIEL. Die Sphäre  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  ist offensichtlich wegzusammenhängend für  $n \geq 2$ . Wir betrachten  $S^n = U_+ \cup U_- \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $U_{\pm} = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \mp 1)\}$  wie in Beispiel 1.78 (2). Die stereographische Projektion liefert Homöomorphismen  $U_+ \cong \mathbb{R}^n \cong U_-$ , also sind  $U_{\pm}$  zusammenziehbar. Schließlich ist  $S^{n-1}$  ein Deformationsretrakt von  $U_+ \cap U_-$ . Mit  $x = (1, 0, \dots, 0)$  erhalten wir für  $n \geq 2$ , dass

$$\pi_1(S^n, x) = \pi_1(U_+, x) *_{\pi_1(U_+ \cap U_-, x)} \pi_1(U_-, x) = \{e\} *_{\pi_1(S^{n-1}, x)} \{e\} = \{e\},$$

also sind Sphären einfach zusammenhängend ab Dimension 2.

Man ist versucht, das obige Beispiel so zu begründen, dass man jede Schleife in  $S^n$  für  $n \geq 2$  von einem Punkt  $y \in S^n$ , der nicht getroffen wird, zum Basispunkt  $x$  „wegdrückt“. Beispiel 1.22 zeigt aber, dass man Schleifen konstruieren kann, die jeden Punkt in  $S^n$  treffen. Also braucht man ein komplizierteres Argument.

2.47. BEISPIEL. Zur Vorbereitung auf die Übungsaufgabe 2.83 zu den Borromäischen Ringen geben wir drei weitere Beispiele. Dabei betrachten wir die Fundamentalgruppen von Komplementen eines oder mehrerer Kreise im  $\mathbb{R}^3$ .

- (1) Betrachte  $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ . Wir addieren einen Punkt im Unendlichen, indem wir  $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$  via stereographische Projektion in  $S^3 \setminus S^1$  einbetten, hierbei wird  $S^1$  zu einem Großkreis, und der fehlende Punkt in  $S^3$  sei  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ . Es sei  $V$  die obere Halbkugel, dann ist  $S^2$  ein Deformationsretrakt von  $U \cap V$ . Also gilt nach Satz 2.42 mit  $x = U \cap V$ , dass

$$\pi_1(S^3 \setminus S^1, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) *_{\pi_1(S^2, x)} \pi_1(V, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x).$$

Jetzt bilden wir  $S^3 \setminus S^1$  durch stereographische Projektion an einem Punkt der  $S^1$  nach  $\mathbb{R}^3$  ab und erhalten einen Homöomorphismus  $S^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$ . Aber  $S^1$  ist ein Deformationsretrakt davon, so dass schließlich

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(S^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

- (2) Wir betrachten jetzt das Komplement zweier „unverlinkter“ Kreise im Raum, genauer  $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \times \{-1, 1\})$ . Mit Beispiel (1) und Seifert-van Kampen folgt

$$\begin{aligned} \pi_1(Y) &\cong \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-\infty, 1)) \setminus (S^1 \times \{-1\})) *_{\pi_1(\mathbb{R}^2 \times (-1, 1))} \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-1, \infty)) \setminus (S^1 \times \{1\})) \\ &\cong \mathbb{Z} *_{\{e\}} \mathbb{Z} \cong F_2. \end{aligned}$$

- (3) Wir betrachten im Gegensatz dazu das Komplement zweier „einfach verlinkter“ Kreise im  $\mathbb{R}^3$ , nämlich

$$Z = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, \cos \psi + 1, \sin \psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}).$$

Wie in (1) fügen wir einen Punkt im Unendlichen hinzu, dann hat  $Z$  die gleiche Fundamentalgruppe wie

$$S^3 \setminus (\{(\cos \varphi, \sin \varphi, 0, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, \cos \psi, \sin \psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}).$$



Ein Deformationsretrakt hiervon ist der Clifford-Torus

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \psi, \sin \psi) \mid \varphi, \psi \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1 \times S^1,$$

so dass

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \not\cong \pi_1(Y).$$

Also kann die Fundamentalgruppe des Komplementes erkennen, ob man einen oder zwei Kreise entfernt hat, und ob diese „verlinkt“ waren oder nicht. Auch für Knoten im  $\mathbb{R}^3$  ist die Fundamentalgruppe des Komplementes eine sehr mächtige Invariante. Allerdings kann man zwei auf verschiedene Weisen definierten Gruppen nicht immer ohne weiteres ansehen, ob sie isomorph sind oder nicht. Daher ist die Fundamentalgruppe des Komplements keine gute Invariante, um verschiedene Knoten voneinander zu unterscheiden.

Wir haben schon in der Übung 2.76 gesehen, dass die Fundamentalgruppe eines endlichen Produktes punktierter Räume gleich dem Produkt ihrer Fundamentalgruppen ist. Etwas ähnliches wird für Koprodukte punktierter topologischer Räume gelten.

2.48. DEFINITION. Das *Bouquet* oder *Wedge-Produkt* einer Familie  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  punktierter topologischer Räume ist der punktierte Raum

$$\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) = \left( \prod_{i \in I} X_i / \sim, x_0 \right)$$

mit der Quotiententopologie, wobei die Äquivalenzrelation „ $\sim$ “ erzeugt wird durch  $x_i \sim x_j$  für alle Paare  $i, j \in I$ , und  $x_0 = [x_i]$  für alle  $i \in I$ . Sei  $\iota_i: (X_i, x_i) \rightarrow (\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i), x_0)$  die natürliche Inklusion.

2.49. BEMERKUNG. Das Wedge-Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft eines Koproduktes in der Kategorie  $\mathcal{Top}_+$ . Dazu sei  $(Y, y)$  ein weiterer punktierter Raum und seien  $f_i: (X_i, x_i) \rightarrow (Y, y)$  punktierte Abbildungen, dann existiert zunächst einmal genau eine stetige Abbildung  $\bar{f}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$  mit  $f_i = \bar{f} \circ \bar{\iota}_i$ , wobei  $\bar{\iota}_i$  hier die Inklusion von  $X_i$  in die disjunkte Vereinigung bezeichne.

Sei  $q: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$  die Abbildung auf den Quotienten. Die Abbildung  $\bar{f}$  bildet alle Basispunkte  $x_i$  auf  $y$  ab, also ist die induzierte Abbildung  $f: \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) \rightarrow (Y, y)$  wohldefiniert, nach Satz 1.72 stetig, und wegen der Eindeutigkeit von  $\bar{f} = f \circ q$  auch eindeutig.

2.50. FOLGERUNG. Sei  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  eine Familie gut punktierter topologischer Räume, das heißt, dass jeder Punkt  $x_i$  eine zusammenziehbare offene Umgebung  $U_i \subset X_i$  besitzt. Dann gilt

$$\pi_1 \left( \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i), x_0 \right) = \prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i).$$

Also bildet der Funktor  $\pi_1$  unter entsprechenden Voraussetzungen auch Koprodukte in  $\mathcal{Top}_+$  auf Koprodukte in  $\mathcal{Grp}$  ab.

BEWEIS. Wir schreiben  $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) = \bigcup_{i \in I} V_i$  mit

$$V_j = (X_j, x_j) \vee \bigvee_{i \in I \setminus \{j\}} (U_i, x_i).$$

Da die  $U_i$  zusammenziehbar sind, ist  $X_j$  Deformationsretrakt von  $V_j$ . Außerdem ist

$$V_j \cap V_k = \bigvee_{i \in I} (U_i, x_i) = V_j \cap V_k \cap V_\ell$$

zusammenziehbar, falls mindestens zwei der Indizes  $j, k, \ell \in I$  verschieden sind. Aus dem Satz 2.42 von Seifert-van Kampen folgt die Behauptung.  $\square$

## 2.e. Die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes

Wir berechnen die Fundamentalgruppen von  $CW$ -Komplexen mit Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen. Es wird sich zeigen, dass jede Schleife zu einer Schleife im 1-Gerüst homotop ist, und dass man bereits am 2-Gerüst alle möglichen Homotopien erkennen kann. Insgesamt gilt also  $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X^2, x_0)$  für wegzusammenhängende  $CW$ -Komplexe mit  $x_0 \in X$ , wobei  $X^1$  die Erzeuger und  $X^2$  die Relationen in einer Präsentation von  $\pi_1(X, x_0)$  liefert. Umgekehrt taucht jede Gruppe als Fundamentalgruppe eines  $CW$ -Komplexes auf.

2.51. BEMERKUNG. Sei  $M$  eine Familie von *Erzeugern* von  $G$ , und sei  $R \subset *_{m \in M} \mathbb{Z}$  eine Menge von *Relationen* in der von den Elementen von  $M$  erzeugten freien Gruppe. Dann sei  $N = \langle R \rangle$  der von den Relationen erzeugte Normalteiler von  $F$ . Wir schreiben

$$G = F/N = \langle M \mid R \rangle,$$

diese Darstellung heißt auch eine *Präsentation* der Gruppe  $G$ . Jede Gruppe besitzt eine Präsentation. Zum Beispiel könnten wir  $M = G$  setzen, dann ist  $F$  die Menge aller Wörter in  $M$  (wobei wir die Gruppenstruktur von  $G$  vergessen haben). Dann wählen wir  $R = \ker(F \rightarrow G)$ , wobei wir jedes Wort in  $F$  auf das entsprechende Produkt in  $G$  abbilden.

Zur Erinnerung: Ein  $CW$ -Komplex  $X$  ist die Vereinigung seiner  $n$ -Gerüste  $X^n$ , versehen mit der schwachen Topologie. Dabei ist  $X^0$  diskret, und man konstruiert induktiv

$$X^n = X^{n-1} \cup \bigcup_{i \in I^n} e_i^n = X^{n-1} \cup_{\phi^n} \prod_{i \in I^n} D^n.$$

Unter einem *maximalen Baum* in einem wegzusammenhängenden  $CW$ -Komplex verstehen wir einen zusammenziehbaren Unterkomplex  $Y \subset X^1$  mit  $X^0 \subset Y$ . Wir werden im Laufe des Beweises des folgenden Satzes verstehen, dass ein maximaler Baum gleichzeitig ein maximaler zusammenziehbarer Unterkomplex von  $X^1$  ist.

2.52. SATZ. Sei  $X$  ein wegzusammenhängender  $CW$ -Komplex und  $x \in X^0$ .

(1) Dann existiert  $J \subset I^1$ , so dass

$$Y = X^0 \cup \bigcup_{j \in J} e_j^1$$

ein maximaler Baum in  $X$  ist.

(2) Für  $J$  wie in (1) gilt

$$\pi_1(X^1, x_0) \cong \prod_{i \in I/J} \mathbb{Z}.$$

(3) Es sei  $[\sigma] \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$  ein Erzeuger, dann gilt

$$\pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^1, x_0) / (\{\phi_{i*}^2[\sigma] \mid i \in I^2\}).$$

(4) Es gilt

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X^2, x_0) \cong \langle \{[\sigma_i] \mid i \in I^1 \setminus J\} \mid \{\phi_{i*}^2[\sigma] \mid i \in I^2\} \rangle.$$

Dieser Satz ist zwar nicht einfach zu formulieren, und auch der Beweis ist kompliziert, da der Satz von Seifert-van Kampen mit offenen Teilmengen arbeitet, während die natürlicherweise auftretenden Unterkomplexe im Beweis abgeschlossen sind — ein Großteil des Beweises besteht darin, dieses Problem zu umgehen. Dafür läßt sich die Berechnung der Fundamentalgruppe eines gegebenen  $CW$ -Komplexes mit Hilfe dieses Satzes auf rein algebraische Rechnungen mit Erzeugern und Relationen zurückführen. Das werden wir in Folgerung 2.53 und Beispiel 2.54 ausnutzen.

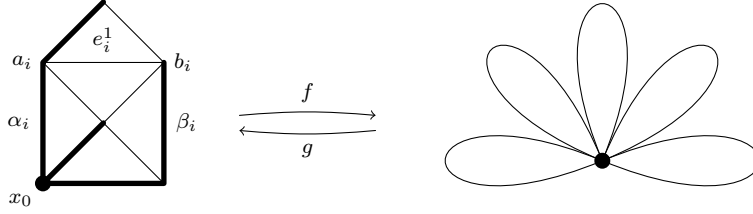


ABBILDUNG 2.4. Ziehe einen maximalen Baum zusammen

BEWEIS. Zu (1) definieren wir eine Metrik  $d$  auf  $X^0$  so, dass  $d(x, y)$  die Anzahl der Kanten  $e_i^1 \subset X^1$  angibt, die ein Weg von  $x$  nach  $y$  in  $X^1$  mindestens durchlaufen muss. Die Axiome einer Metrik lassen sich leicht überprüfen. Da  $X$  wegzusammenhängend ist, ist nach Folgerung 1.94 auch  $X^1$  wegzusammenhängend, so dass es stets Wege  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X^1$  von  $x$  nach  $y$  gibt. Aus der Kompaktheit von  $[0, 1]$  folgt mit Bemerkung 1.51 (2) und Satz 1.86, dass  $d(x, y) < \infty$  für alle  $x, y \in X^1$ .

Wir konstruieren  $Y = \bigcup_{k=0}^{\infty} Y_k$  induktiv. Dazu sei  $Y_0 = \{x_0\}$ . Gegeben  $Y_{k-1}$  für  $k \geq 1$ , so dass

$$Y_{k-1}^0 = Y_{k-1} \cap X^0 = \{x \in X^0 \mid d(x, x_0) \leq k-1\}$$

und  $J_{k-1}$  mit

$$Y_{k-1} = Y_{k-1}^0 \cup \bigcup_{j \in J_{k-1}} e_j^1,$$

finden wir von jedem  $x \in X^0$  mit  $d(x, x_0) = k$  mindestens eine Kante  $e_{i_x}^1$ , die  $x$  mit einem Punkt  $x' \in Y_{k-1}^0$  mit  $d(x', x_0) = k-1$  verbindet. Wir nehmen für jeden solchen Punkt genau eine entsprechende Kante zu  $Y_{k-1}$  hinzu und erhalten  $Y_k$ . Man beachte, dass es von jedem Punkt  $x \in Y_k^0$  dann induktiv genau einen kürzesten Weg von  $x$  nach  $x_0$  gibt, der über  $k$  Kanten führt.

Um zu zeigen, dass  $\{x_0\}$  Deformationsretrakt von  $Y$  und  $Y$  somit zusammenziehbar ist, konstruieren wir zunächst Abbildungen  $H_k: Y_k \times [0, 1] \rightarrow Y_k$  relativ zu  $Y_{k-1} \times [0, 1]$ , so dass  $H_k(y, 0) = y$  und  $H_k(y, 1) \in Y_{k-1}$  für alle  $y \in Y_k$ . Dazu ziehen wir gleichzeitig alle Kanten  $\bar{e}_{i_x}^1$  von  $x \in Y_k^0/Y_{k-1}^0$  nach  $x' \in Y_{k-1}^0$  auf ihren Endpunkt  $x'$  zusammen. Anschließend setzen wir alle  $H_k$  wie im Beweis von Satz 1.93 zu einer Abbildung  $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$  zusammen mit

$$H(y, s) = \begin{cases} y & \text{für } 0 \leq s \leq 2^{-k}, \text{ und} \\ H_{k'}((r_{k'+1} \circ \dots \circ r_k)(y), 2^{-k'}s - 1) & \text{für } 2^{-k'} \leq s \leq 2^{1-k'} \end{cases}$$

für alle  $y \in Y_k \setminus Y_{k-1}$ ,  $k \geq 0$ , wobei  $r_k = H(\cdot, 1): Y_k \rightarrow Y_{k-1}$  die oben konstruierten Retraktionen seien. Damit haben wir gezeigt, dass  $Y$  zusammenziehbar ist mit  $X^0 \subset Y$ , also in unserem Sinne ein maximaler Baum. Außerdem würde das Hinzunehmen jeder weiteren Kante zu  $Y$  einen Unterkomplex von  $X^1$  mit nichttrivialer Fundamentalgruppe liefern, so dass  $Y$  tatsächlich ein maximaler zusammenziehbarer Unterkomplex ist.

Zu (2) reicht es nach Folgerung 2.50 zu zeigen, dass  $X^1$  zu einem Bouquet von Kreisen homotopieäquivalent ist. Dazu definieren wir eine Abbildung

$$f: (X^1, x_0) \longrightarrow \bigvee_{i \in I^1 \setminus J} (S^1, 1),$$

die ganz  $Y$  auf den Basispunkt und jede Kante  $e_i^1$  mit  $i \notin J$  homöomorph auf den entsprechenden Kreis  $S^1 \setminus \{1\}$  rechts abbildet. Umgekehrt definieren wir

$$g: \bigvee_{i \in I^1 \setminus J} (S^1, 1) \longrightarrow (X^1, x_0)$$

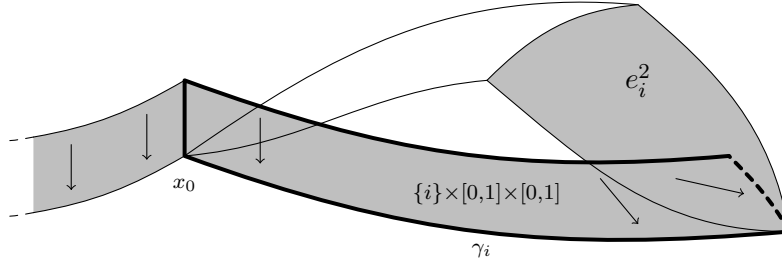


ABBILDUNG 2.5. Der Raum  $\bar{X}^n$

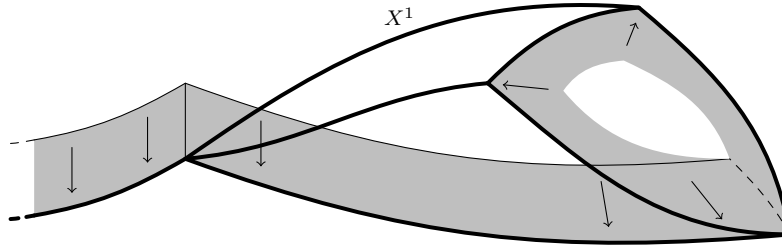


ABBILDUNG 2.6. Die Umgebung  $U_0$  von  $X^{n-1}$

so, dass jeder Kreis auf eine Schleife  $\alpha_i e_i^1 \bar{\beta}_i$  abgebildet wird; dabei seien  $\alpha_i, \beta_i$  die kürzesten Wege von  $x_0$  zu den Endpunkten  $a_i, b_i$  von  $e_i^1$ , siehe Abbildung 2.4.

Die Abbildung  $g \circ f: (X^1, x_0) \rightarrow (X^1, x_0)$  bildet ganz  $Y$  auf  $x_0$  und jede Kante  $\bar{e}_i^1$  auf die Schleife  $\alpha_i e_i^1 \bar{\beta}_i$  ab. Wir können die obige Homotopie  $H$  zu einer Homotopie zwischen  $\text{id}_{X^1}$  und  $g \circ f$  ausdehnen, indem wir  $e_i^1 \times \{s\}$  auf einen Weg von  $H(a_i, s)$  über  $e_i^1$  nach  $H(b_i, s)$  abbilden.

Umgekehrt zieht  $f \circ g: \bigvee_{i \in I^1 \setminus J}(S^1, 1) \rightarrow \bigvee_{i \in I^1 \setminus J}(S^1, 1)$  jeweils das erste und das letzte Drittel jedes Kreises auf den Basispunkt zusammen. Auch hier lässt sich eine Homotopie zur Identität angeben. Also sind  $(X^1, x_0)$  und  $\bigvee_{i \in I^1 \setminus J}(S^1, 1)$  homotopieäquivalent. Jetzt folgt (2) aus Folgerung 2.50, da  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ .

Auch die Schritte (3) und (4) basieren auf dem Satz von Seifert-van Kampen. Um induktiv von  $\pi_1(X^{n-1}, x_0)$  zu  $\pi_1(X^n, x_0)$  für  $n \geq 2$  zu gelangen, vergrößern wir  $X^n$  zu  $\bar{X}^n$ , siehe Abbildung 2.5. Dazu wählen wir für jedes  $i \in I^n$  einen Weg  $\gamma_i$  von  $x_0$  zum Bild  $x_i$  des Basispunktes von  $S^{n-1}$  unter der Verklebeabbildung  $\varphi_i$ . Wir verkleben  $I^n \times [0, 1] \times [0, 1]$  wie folgt mit  $X^n$ .

- (1) Wir identifizieren alle Strecken  $\{(i, 0)\} \times [0, 1]$  miteinander und kleben  $[(i, 0, 0)]$  an den Punkt  $x_0$ .
- (2) Wir verkleben  $\{i\} \times [0, 1] \times \{0\}$  entlang von  $\gamma_i: [0, 1] \times \{0\}$  mit  $X^{n-1}$ .
- (3) Wir kleben  $\{1\} \times [0, 1]$  auf eine Strecke in  $e_i^n$  vom Punkt  $x_i$  ins Innere der Zelle bis zum Radius  $1/2$ .

Dann ist  $X^n$  ein Deformationsretrakt von  $\bar{X}^n$ , indem wir jedes Quadrat  $\{i\} \times [0, 1] \times [0, 1]$  auf das Bild von  $\{i\} \times ([0, 1] \times \{0\}) \cup \{1\} \times [0, 1]$  zusammenziehen.

Wir betrachten die folgenden offenen Teilmengen. Es sei

$$U_0 = \bar{X}^n \setminus \bigcup_{i \in I^n} \Phi_i^n(D_{1/2}^n),$$

wobei  $D_{1/2}^n \subset D^n$  den abgeschlossenen Ball vom Radius  $\frac{1}{2}$  bezeichne, siehe Abbildung 2.6. Dann ist  $X^{n-1}$  ein Deformationsretrakt von  $U_0$ .

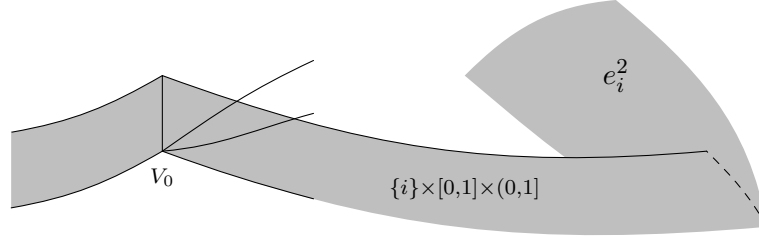


ABBILDUNG 2.7. Der Raum  $U_i$

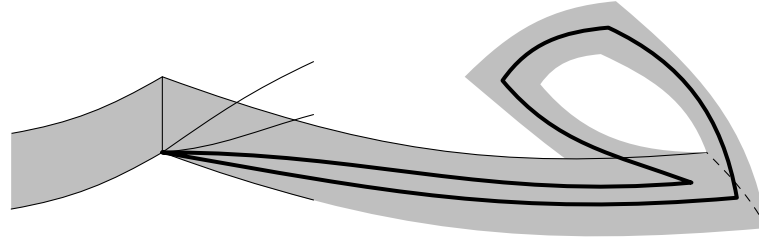


ABBILDUNG 2.8. Die Fundamentalgruppe von  $U_0 \cap U_i$

Nach Satz 1.93 existiert eine zusammenziehbare Umgebung von  $x_0$  in  $X^n \cap U_0$ . Es sei  $V_0 \subset \bar{X}^n$  ihr Urbild unter der Retraktion  $r_n: \bar{X}^n \rightarrow X^n$ , dann ist  $V_0$  ebenfalls zusammenziehbar. Für  $i \in I^n$  setze

$$U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0, 1] \times (0, 1)) \cup e_i^n .$$

Man überzeugt sich, dass  $U_i$  ebenfalls zusammenziehbar ist, siehe Abbildung 2.7.

Für  $i \neq j \in I^n$  ist  $U_i \cap U_j = V_0$  zusammenziehbar, also insbesondere wegzusammenhängend. Außerdem ist

$$U_0 \cap U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0, 1] \times (0, 1)) \cup \Phi_i^n(B^n \setminus D_{1/2}^n)$$

wegzusammenhängend mit Deformationsretrakt  $\Phi_i^n(S_{3/4}^{n-1})$ . Analog sieht man, dass auch dreifache Durchschnitte von  $\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{U_i \mid i \in I^n\}$  wegzusammenhängend sind.

Im Fall  $n = 2$  folgt

$$\pi_1(U_0 \cap U_i, x_0) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} ,$$

wobei ein Erzeuger  $[\sigma] \in \pi_1(S^1)$  auf eine Schleife abgebildet wird, die in  $U_0$  zu  $\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i$  homotop ist, siehe Abbildung 2.8. Behauptung (3) folgt jetzt aus Satz 2.42, da

$$\begin{aligned} \pi_1(X^2, x_0) &= \pi_1(\bar{X}^2, x_0) = \left( \pi_1(U_0, x_0) * \prod_{i \in I^2} \pi_1(U_i, x_0) \right) / (\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}) \\ &= \pi_1(X_1, x_0) / (\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}) . \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Erzeuger  $[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i]$  nach Satz 2.15 vom Weg  $\gamma_i$  abhängen. Da aber verschiedene Wege zueinander konjugierte Erzeuger liefern, hängt der erzeugte Normalteiler nach Bemerkung 2.41 nicht von der Wahl von  $\gamma_i$  ab.

Der Beweis von Behauptung (4) beginnt damit, dass  $U_0 \cap U_i \sim S^{n-1}$  für  $n \geq 3$  nach Beispiel 2.46 einfach zusammenhängend ist und somit  $\pi_1(X^n, x_0) \cong \pi_1(X^{n-1}, x_0)$  analog zur obigen Überlegung. Jetzt liefert die Inklusion  $\iota: X^n \hookrightarrow X$  Isomorphismen der Fundamentalgruppen. Denn sei  $\gamma$  eine Schleife in  $X$ , dann verläuft  $\gamma$  in einem Gerüst  $X^n$  nach Satz 1.86, also ist die Abbildung

$$\iota_*: \pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv. Falls  $\gamma$  nullhomotop ist, verläuft aus dem gleichen Grund eine Homotopie  $H$  zur trivialen Schleife ganz in einem  $X^n$  (wobei  $n$  jetzt größer sein kann), also ist  $\iota_*$  auch injektiv. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

2.53. FOLGERUNG. Sei  $G$  eine Gruppe, dann existiert ein CW-Komplex  $X$  mit  $\pi_1(X) \cong G$ .

BEWEIS. Sei  $G$  durch Erzeuger  $M \subset G$  und Relationen  $R$  gegeben. Wir konstruieren einen CW-Komplex  $X$ . Sei  $X^0 = \{x_0\}$  das 0-Skelett, bestehend aus einer 0-Zelle  $x_0$ .

Wir wählen  $I^1 = M$ , das heißt, für jeden Erzeuger  $m \in M$  sei  $e_m^1$  eine 1-Zelle, deren zwei Endpunkte notwendigerweise an  $x_0$  angeklebt sind. Dann ist  $\{x_0\} \subset X^1$  ein maximaler Baum, also ist  $F = \pi_1(X^1, x_0)$  die von den Schleifen  $\{e_m^1 \mid m \in M\}$  erzeugte freie Gruppe. Wir identifizieren den zu  $e_m^1$  gehörigen Erzeuger mit  $m \in M$ .

Wir wählen  $I^2 = R$ , und für jede Relation  $r = m_1 \cdots m_k \in R$  wählen wir eine 2-Zelle  $e_r^2$ , so dass die Verklebeabbildung  $\varphi_r^2: S^1 \rightarrow X^1$  gerade das Element  $m_1 \cdots m_k \in \pi_1(X^1, x_0)$  repräsentiert.

Aus Satz 2.52 folgt jetzt

$$\pi_1(X^2, x_0) = \langle M \mid R \rangle = G. \quad \square$$

2.54. BEISPIEL. Wir betrachten Flächen, genauer, kompakte, zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension 2.

- (1) Eine orientierbare Fläche  $X_g$  vom Geschlecht  $g \geq 0$  lässt sich als CW-Komplex mit einer Ecke  $\{x_0\}$ ,  $2g$  Kanten  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  und einer 2-Zelle schreiben. Die zugehörige Verklebeabbildung  $\varphi^2$  entspreche der Schleife  $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_g b_g \bar{a}_g \bar{b}_g$ , und wir erhalten die Präsentation

$$\pi_1(X_g, x_0) \cong \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

Für  $g = 0$  erhalten wir die Sphäre  $S^2$ , für  $g = 1$  den Torus  $T^2$ . Da die Relation ein Produkt von Kommutatoren ist, erhalten wir die Abelsierung

$$\pi_1(X_g, x_0)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

- (2) Eine nicht orientierbare Fläche  $Y_g$  vom Geschlecht  $g \geq 0$  lässt sich analog schreiben als CW-Komplex mit einer Ecke  $\{x_0\}$ ,  $g + 1$  Kanten  $a_0, \dots, a_g$  und einer 2-Zelle. Die Verklebeabbildung sei gegeben durch die Schleife  $a_0^2 \cdots a_g^2$ , also gilt

$$\pi_1(Y_g, x_0) \cong \langle a_0, \dots, a_g \mid a_0^2 \cdots a_g^2 \rangle.$$

Für  $g = 0$  erhalten wir  $\mathbb{R}P^2$ , für  $g = 1$  die Kleinsche Flasche. In diesem Fall erhalten wir die Abelsierung

$$\pi_1(Y_g, x_0)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g+1} / \langle (2, \dots, 2) \rangle \cong \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

wobei die rechte Darstellung zu den Erzeugern  $a_1, \dots, a_g$  und  $a_0 + \cdots + a_g$  gehört.

Wir sehen also, dass man die unterschiedlichen Flächen anhand ihrer Fundamentalgruppen unterscheiden kann.

## 2.f. Überlagerungen

Wir betrachten Überlagerungen  $\tilde{X} \rightarrow X$  eines gegebenen topologischen Raumes  $X$ , und vergleichen die Fundamentalgruppen von  $\tilde{X}$  und  $X$  miteinander.

Wir erinnern uns an die Definition 2.25 von Überlagerungen. Eine Überlagerung heißt universell, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

2.55. BEISPIEL. In Beispiel 2.26 hatten wir bereits eine universelle Überlagerung  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  kennengelernt. Andere zusammenhängende Überlagerungen von  $S^1 \subset \mathbb{C}$  sind von der Form

$$p_k: S^1 \longrightarrow S^1 \quad \text{mit} \quad z \longmapsto z^k$$

für  $0 < k \in \mathbb{Z}$ . Es gilt

$$\text{im } p_{k*} = k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1).$$

Wir werden später sehen, dass das bis auf Isomorphie alle zusammenhängenden Überlagerungen der  $S^1$  sind.

Unter einem *Lift* einer Abbildung  $F: Y \rightarrow X$  in eine Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  verstehen wir eine Abbildung  $\tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}$  mit  $F = p \circ \tilde{F}$ . Wenn wir von punktierten Räumen und Abbildungen  $(Y, y_0) \rightarrow (X, x_0) \leftarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  sprechen, erwarten wir von einem Lift ebenfalls, dass er  $y_0$  auf  $\tilde{x}_0$  abbildet.

Wir erinnern uns an den Homotopie-Liftungssatz 2.27 und insbesondere an den Beweis des Satzes 2.28. Dort hatten wir für  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  gesehen, dass wir jede Schleife in  $(X, x_0)$  zu einem Weg in  $\tilde{X}$  mit vorgegebenem Anfangspunkt eindeutig liften können, und dass relativ homotope Schleifen zu relativ homotopen Wegen liften. Das dortige Argument überträgt sich auf alle Überlagerungen.

2.56. SATZ. Sei  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Überlagerung, dann ist die Abbildung

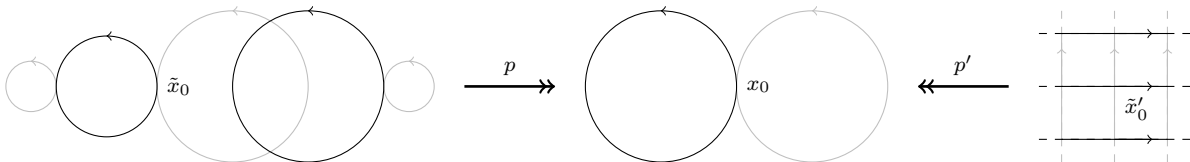
$$p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

injektiv, und für  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$  liegt  $[\gamma]$  genau dann im Bild von  $p_*$ , wenn  $\gamma$  einen Lift  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$  besitzt.

BEWEIS. Sei  $\tilde{\gamma}: S^1 \rightarrow \tilde{X}$  eine Schleife, so dass  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  relativ zu Anfangs- und Endpunkt nullhomotop ist. Dann lässt sich die Nullhomotopie mit Satz 2.27 zu einer relativen Nullhomotopie von  $\tilde{\gamma}$  liften. Also ist  $p_*$  injektiv.

Eine Schleife  $\gamma$ , deren Lift  $\tilde{\gamma}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$  wiederum eine Schleife ist, liegt im Bild von  $p_*$ , da  $p_*[\tilde{\gamma}] = [p \circ \tilde{\gamma}] = [\gamma]$ . Sei umgekehrt  $\gamma$  eine Schleife mit  $[\gamma] \in \text{im}(p_*)$ . Dann ist  $\gamma$  homotop zu einer Schleife der Form  $\gamma' = p \circ \tilde{\gamma}'$ . Liften der Homotopie liefert eine Homotopie zwischen dem Lift  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$  und  $\tilde{\gamma}'$ , also folgt  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{x}_0$ .  $\square$

2.57. BEISPIEL. Die „Acht“  $X = S^1 \vee S^1$  hat sehr viele paarweise nicht isomorphe Überlagerungen, siehe [H1]. Wir werden sehen, dass das Bild im  $p_*$  der Fundamentalgruppe  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  in  $\pi_1(X, x_0)$  die Überlagerung  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  bereits bis auf Isomorphie festlegt.



Wir wollen allgemeiner fragen, wann sich eine Abbildung  $F: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  zu einer Abbildung  $\tilde{F}: (Y, t_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  mit  $F = p \circ \tilde{F}$  liften lässt.

Wir erinnern uns an den Begriff „lokal wegzusammenhängend“ aus Definition 1.68. Falls  $Y$  lokal wegzusammenhängend ist, sind alle Wegzusammenhangskomponenten sowohl offen als auch abgeschlossen. Also ist  $Y$  in diesem Fall genau dann wegzusammenhängend, wenn  $Y$  zusammenhängend ist.

2.58. SATZ (Liftungssatz). Sei  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Überlagerung, und sei  $Y$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann lässt sich eine Abbildung  $F: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$

genau dann zu einer Abbildung  $\tilde{F}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  mit  $F = p \circ \tilde{F}$  liften, wenn

$$\text{im } F_* \subset \text{im } p_* \subset \pi_1(X, p). \quad (*)$$

In diesem Fall ist der Lift  $\tilde{F}$  durch  $\tilde{F}(y_0) = \tilde{x}_0$  eindeutig bestimmt.

Falls  $Y$  nicht zusammenhängend ist, müssen wir den Lift auf jeder Wegzusammenhangskomponente von  $Y$  einzeln konstruieren; eventuell benötigen wir dazu jeweils andere Basispunkte.

BEWEIS. Die Aussage „ $\implies$ “ ist klar, da aus der Existenz von  $\tilde{F}$  bereits

$$\text{im } F_* = \text{im}(p_* \circ \tilde{F}_*) \subset \text{im } p_*$$

folgt.

Sei umgekehrt (\*) erfüllt. Wir definieren einen Lift  $\tilde{F}$  wie folgt. Da  $Y$  wegzusammenhängend ist, können wir zu jedem  $y \in Y$  einen Pfad  $\sigma$  von  $y_0$  nach  $y$  angeben, und dazu wie im Beweis von Satz 2.28 einen Lift  $\tilde{\tau}$  von  $\tau = F \circ \sigma$  mit Anfangspunkt  $\tilde{\tau}(0) = x_0$ . Wir setzen  $\tilde{F}(y) = \tilde{\tau}(1)$ . Hieraus folgt auch bereits die Eindeutigkeit von  $\tilde{F}$ .

Um zu zeigen, dass  $\tilde{F}$  wohldefiniert ist, wählen wir einen weiteren Weg  $\sigma'$  von  $y_0$  nach  $y$  und konstruieren einen Lift  $\tilde{\tau}'$  von  $\tau' = F \circ \sigma'$  wie oben. Dann ist  $\tau'\tilde{\tau} \in \text{im } F_* \subset \text{im } p_*$  nach (\*), also existiert ein geschlossener Lift  $\tilde{\tau}'\tilde{\tau}$  nach Satz 2.56. Das heisst, ein Lift  $\tilde{\tau}$  von  $\tilde{\tau}$  startet bei  $\tilde{\tau}'(1)$  und führt zu  $\tilde{x}_0$ . Wegen der Eindeutigkeit des Lifts ist  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}'$ , und es folgt  $\tilde{\tau}(1) = \tilde{\tau}'(1)$ , was zu zeigen war.

Zur Stetigkeit von  $\tilde{F}$  sei  $y \in Y$ , und sei  $U$  eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von  $x = F(y)$  in  $X$ . Dann existiert eine Umgebung  $\tilde{U} \subset \tilde{X}$  von  $\tilde{x} = \tilde{F}(y)$ , so dass  $p: \tilde{U} \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist. Hierbei können wir offensichtlich  $U$  so wählen, dass  $\tilde{U}$  als Umgebung von  $\tilde{y}$  beliebig klein wird. Wegen Stetigkeit von  $F$  ist  $F^{-1}(U)$  offen, und es existiert eine wegzusammenhängende Umgebung  $V \subset F^{-1}(U)$  von  $y$ .

Sei  $\sigma$  ein Weg von  $y_0$  nach  $y$ . Sei  $\tilde{\tau}$  der Lift von  $\tau = F \circ \sigma$  wie oben, so dass also  $\tilde{\tau}(1) = \tilde{F}(y)$ . Sei  $y' \in V$ , und sei  $\alpha$  ein Weg von  $y$  nach  $y'$  in  $V$ . Da  $\beta = F \circ \alpha$  in  $U$  verläuft, hat  $\beta$  einen Lift  $\tilde{\beta} = (p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ \beta$  in  $\tilde{U}$ . Dann ist  $\tilde{\tau}\tilde{\beta}$  ein Lift von  $\tau\beta = F \circ (\sigma\alpha)$ , und es folgt

$$\tilde{F}(y') = (\tilde{\tau}\tilde{\beta})(1) = \tilde{\beta}(1) \in \tilde{U}.$$

Also gilt  $\tilde{F}(V) \subset \tilde{U}$ , und da  $\tilde{U}$  beliebig klein gewählt werden kann folgt die Stetigkeit von  $\tilde{F}$  bei  $y$ . Da  $y$  beliebig war, ist  $\tilde{F}$  stetig.  $\square$

2.59. BEMERKUNG. Der lokale Wegzusammenhang wurde nur eingesetzt, um die Stetigkeit von  $\tilde{F}$  nachzuweisen, er ist aber nötig für die Existenz des Liftes, siehe Übung 2.93. Zur Eindeutigkeit von  $\tilde{F}$  reicht Zusammenhang jedoch aus: Sei etwa  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Überlagerung, und sei  $Y$  zusammenhängend. Seien  $\tilde{F}, \tilde{F}': (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  Lifts von  $F$ . Dann ist die Menge

$$\{y \in Y \mid \tilde{F}(y) = \tilde{F}'(y)\} \subset Y$$

offen, abgeschlossen und nicht leer, also stimmen die Lifts auf ganz  $Y$  überein.

Eine Gruppenwirkung einer Gruppe  $G$  auf einem topologischen Raum  $X$  ist ein Homomorphismus von  $G$  in die Gruppe der Homöomorphismen von  $X$ . Unter Umständen trägt der Quotient  $X/G$ , dessen Punkte die Bahnen der  $G$ -Wirkung sind, wieder die Struktur eines topologischen Raumes, so dass die kanonische Abbildung  $X \rightarrow X/G$  eine Überlagerung ist. Wir beschreiben zunächst diese Konstruktion. Später überlegen wir uns, welche Überlagerungen von Gruppenwirkungen kommen.



2.60. DEFINITION. Eine (*Gruppen-*) *Wirkung* oder *Operation* einer Gruppe  $\Gamma$  auf einem topologischen Raum  $X$  ist ein Gruppenhomomorphismus  $\rho$  von  $\Gamma$  in die Gruppe  $\text{Aut } X$  der Homöomorphismen von  $X$ , schreibe  $\rho\gamma$  oder kurz  $\gamma: X \rightarrow X$  für das Bild von  $\gamma \in \Gamma$ .

Eine *Bahn* von  $\rho$  (oder auch kurz von  $\Gamma$ ) ist eine Teilmenge der Form

$$\rho_\Gamma(x) = \Gamma x = \{\rho_\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma\} \subset X$$

mit  $x \in X$ . Der *Quotient*

$$X/\Gamma = \{\Gamma x \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}X$$

ist die Menge aller Bahnen. Es bezeichne

$$p: X \longrightarrow X/\Gamma \quad \text{mit} \quad p(x) = \Gamma x$$

die Projektionsabbildung. Der Raum  $X/\Gamma$  trage die Quotiententopologie unter  $p$ .

Es folgen zwei Bedingungen an Gruppenwirkungen, die sicherstellen, dass die Projektionsabbildung eine Überlagerung ist.

2.61. DEFINITION. Eine Gruppenwirkung von  $\Gamma$  auf  $X$  heißt *frei*, wenn für alle  $x \in X$  und alle  $\gamma \in \Gamma$  aus  $\gamma(x) = x$  bereits  $\gamma = e$  folgt. Sie heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  in  $X$  besitzt, so dass  $\gamma(U) \cap U = \emptyset$  falls  $\gamma(x) \neq x$ .

Wenn  $\Gamma$  frei operiert, kann  $\gamma(x) = x$  nur für das neutrale Element gelten.

2.62. BEISPIEL. Wir geben verschiedene Beispiele von Gruppenwirkungen.

- (1) Es sei  $X = \mathbb{R}$ ,  $\Gamma = \mathbb{Z}$  und  $\gamma(x) = x + \gamma$ . Dann ist der Quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  homöomorph zu  $S^1 \subset \mathbb{C}$  wie in Beispiel 2.26 via

$$\mathbb{Z}x \longmapsto e^{2\pi i x}.$$

Diese Wirkung ist frei und eigentlich diskontinuierlich. Wähle dazu als Umgebung von  $x \in \mathbb{R}$  das Intervall  $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ , dann gilt  $(x + n - \frac{1}{2}, x + n + \frac{1}{2}) \cap (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) = \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

- (2) Es sei  $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ ,  $\Gamma = \mathbb{Z}$ ,  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  eingekürzter Bruch und  $\gamma(z) = e^{2\pi i r \gamma} \cdot z$ . Elemente  $\gamma \in q\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  wirken trivial, das heißt, es gilt  $\gamma(z) = z$  für alle  $z \in S^1$ . Daher ist diese Wirkung nicht frei. Sie ist aber eigentlich diskontinuierlich: zu  $z \in S^1$  wähle

$$U = \left\{ e^{2\pi i \varphi} \cdot z \mid \varphi \in \left( -\frac{1}{2q}, \frac{1}{2q} \right) \right\},$$

dann gilt  $U \cap \rho_n(U) = \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$ .

Die Faktorgruppe  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  wirkt ebenfalls auf  $S^1$ . Der Quotient ist homöomorph zu  $S^1$  via

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})z \longmapsto z^q \in S^1,$$

und die Abbildung  $S^1 \rightarrow S^1$  ist dieselbe wie in Beispiel 2.55. Diese Wirkung ist sowohl frei als auch eigentlich diskontinuierlich.

- (3) Es seien  $X, \Gamma$  wie in (2), aber  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann liegen alle Bahnen dicht in  $X$ . Da jede offene Menge alle Bahnen schneidet, ist  $X/\Gamma$  jetzt eine überabzählbare Menge mit der Klumpentopologie. Die Wirkung ist zwar frei, aber nicht eigentlich diskontinuierlich. Denn die Bahn von  $z \in S^1$  trifft jede noch so kleine Umgebung  $U$ : Zu jeder Umgebung  $U$  von  $z \in S^1$  existiert also  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  mit  $\rho_n(z) \in U$ , insbesondere  $U \cap \rho_n(U) \neq \emptyset$ .

2.63. PROPOSITION. *Es sei  $\rho$  eine freie und eigentlich diskontinuierliche Wirkung einer Gruppe  $\Gamma$  auf  $X$ . Dann ist die Projektionsabbildung  $p: X \rightarrow X/\Gamma$  eine Überlagerung.*

BEWEIS. Es sei  $y = \Gamma x \in X/\Gamma$ , und es sei  $U$  eine Umgebung von  $x$  wie in Definition 2.61. Es sei  $V = p(U) \in X/\Gamma$ , dann folgt aus Definition 2.61, dass

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U) \subset X .$$

Wir dürfen  $U$  als offen annehmen. Dann sind alle  $\gamma(U)$  offen, und  $A \subset p^{-1}(V)$  ist genau dann offen, wenn alle  $A \cap \gamma(U)$  offen sind. Also erhalten wir den gesuchten Homöomorphismus

$$p^{-1}(V) \cong \coprod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U) \cong \Gamma \times U ,$$

das heißt,  $V \subset X/\Gamma$  ist gleichmäßig überlagert. Da das für alle  $y \in X/\Gamma$  funktioniert, folgt unsere Behauptung.  $\square$

2.64. BEMERKUNG. Der Raum  $X/\Gamma$  trägt die Quotiententopologie. Nach Bemerkung 1.74 ist nicht klar, dass sich „schöne“ Eigenschaften von  $X$  auf den Quotienten vererben. Als Beispiel betrachte den normalen Raum  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Hierauf operiert  $\mathbb{Z}$  durch  $n(x,y) = (2^n x, 2^{-n} y)$ . Da  $(0,0) \notin X$ , ist diese Operation frei und eigentlich diskontinuierlich. Sei etwa  $(x,y) \in X$ , dann können wir als Umgebung  $U$  wie in Definition 2.61 von  $x$  die Menge  $(2^{-1/2}x, 2^{1/2}x) \times \mathbb{R}$  wählen, falls  $x \neq 0$ , oder die Menge  $\mathbb{R} \times (2^{-1/2}y, 2^{1/2}y)$ , falls  $y \neq 0$ .

Allerdings ist der Quotient nicht einmal Hausdorffsch. Die Punkte  $a = p(x,0)$  und  $b = p(0,y) \in X/\Gamma$  lassen sich nicht trennen, denn für noch so kleine Umgebungen  $U$  von  $a$  und  $V$  von  $b$  gibt es ein hinreichend großes  $n \in \mathbb{Z}$  so dass

$$U \ni p(x, 2^{-n}y) = p(2^{-n}x, y) \in V .$$

2.65. DEFINITION. Eine *Decktransformation* einer Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  ist ein Homöomorphismus  $F: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ , so dass  $p \circ F = p$ . Eine zusammenhängende Überlagerung heißt *normal*, wenn es zu je zwei  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$  mit  $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$  eine Decktransformation  $F$  mit  $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$  gibt.

Warnung: „normal“ hat hier nichts mit (T1) und (T4) zu tun, sondern mit dem Begriff des Normalteilers, siehe Folgerung 2.68.

2.66. BEMERKUNG. Die Decktransformationen einer gegebenen Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  bilden stets eine Gruppe  $\Gamma$ , die *Decktransformationsgruppe*. Sei  $\tilde{X}$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Da jede Decktransformation ein Lift von  $p: \tilde{X}_0 \rightarrow X$  mit  $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$  ist, operiert  $\Gamma$  wegen der Eindeutigkeit der Lifte frei. Indem wir Urbilder gleichmäßig überlagelter Umgebungen von Punkten in  $X$  betrachten, sehen wir, dass  $\Gamma$  auch eigentlich diskontinuierlich wirkt. Falls  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  normal ist, folgt  $X \cong \tilde{X}/\Gamma$ .

Seien umgekehrt  $X, \Gamma$  wie in Proposition 2.63 und  $X$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann ist  $p: X \rightarrow X/\Gamma$  eine normale Überlagerung, und  $\Gamma$  ist die Gruppe der Decktransformationen. Hier benutzen wir wieder die Eindeutigkeit im Liftungssatz 2.58, um zu zeigen, dass es keine weiteren Decktransformationen gibt.

2.67. BEISPIEL. Wir haben in Beispiel 2.62 schon gesehen, dass die zusammenhängenden Überlagerungen der  $S^1$  in Beispiel 2.55 normal sind. Das linke Bild in Beispiel 2.57 besitzt keine Decktransformationen außer der Identität, ist also nicht normal. Für das rechte Bild erhalten wir eine Decktransformationsgruppe  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$ , also ist dieses Beispiel normal. Dreht man aber nur je einen horizontalen und einen vertikalen Pfeil in dem Bild um, so erhält man eine neue Überlagerung ohne nichttriviale Decktransformationen.

2.68. FOLGERUNG (aus dem Liftungssatz 2.58). *Es sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Überlagerung, seien  $x_0 \in X$  und  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ , und sei  $\tilde{\gamma}$  ein Weg in  $\tilde{X}$  von  $\tilde{x}_0$  nach  $\tilde{x}_1$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1) *Es existiert eine Decktransformation  $F: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ .*
- (2) *Es gilt  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) \subset \pi_1(X, x_0)$ .*
- (3) *Für  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  gilt  $[\gamma]^{-1}p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\gamma] = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ .*

*Insbesondere ist  $p$  genau dann eine normale Überlagerung, wenn  $\text{im } p_*$  Normalteiler von  $\pi_1(X, x_0)$  ist. In diesem Fall ist  $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\text{im}(p_*)$  die Gruppe der Decktransformationen.*

BEWEIS. Da Decktransformationen invertierbar sind und die Abbildung  $p$  liften, folgt die Äquivalenz von (1) und (2) unmittelbar aus Satz 2.58.

Wie im Satz 2.15 liefert  $\sigma \mapsto \bar{\gamma}\sigma\gamma$  einen Isomorphismus von  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  mit  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ . Es folgt

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = [\gamma]^{-1}p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\gamma],$$

und daraus die Äquivalenz von (2) und (3). Da sich je zwei Wege  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$  von  $\tilde{x}_0$  nach  $\tilde{x}_1$  bis auf Homotopie nur bis auf Verkettung mit der Schleife  $\tilde{\gamma}_2\bar{\gamma}_1$  am Punkt  $\tilde{x}_0$  unterscheiden, kommt es nicht auf die Wahl von  $\tilde{\gamma}$  an.

Wenn  $\text{im } p_*$  ein Normalteiler ist, gilt (3), wegen (1) existieren alle Decktransformationen, und  $p$  ist normal. Sei umgekehrt  $p$  normal, also gilt (1). Da es zwischen je zwei Punkten in  $p^{-1}(x_0)$  einen Weg  $\tilde{\gamma}$  gibt, folgt aus (3), dass  $\text{im } p_*$  ein Normalteiler ist.

Um eine Wirkung von  $\pi_1(X, x_0)$  auf  $\tilde{X}$  zu konstruieren, betrachten wir zu  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  die nach dem Liftungssatz 2.58 eindeutige Decktransformation  $\rho_{[\gamma]}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ , die den Basispunkt  $\tilde{x}_0$  auf den Endpunkt  $\tilde{\gamma}(1)$  des Lifts  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$  abbildet.

Wir müssen zeigen, dass  $\rho$  einen Gruppenhomomorphismus liefert. Sei dazu  $[\gamma_1] \in \pi_1(X, x_0)$ , und sei  $\tilde{\gamma}_1$  der Lift von  $\gamma_1$  mit  $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{x}_0$ . Dann folgt  $\rho_{[\gamma_1]}(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}_1(1)$ . Außerdem ist  $\tilde{\gamma}' = \rho_{[\gamma]} \circ \tilde{\gamma}$  ein Lift von  $\gamma$  mit  $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}_1(1)$ , also ist die Verkettung  $\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}'$  ein Lift von  $\gamma_1\gamma$  mit  $\widetilde{\gamma_1\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ . Es folgt

$$\rho_{[\gamma_1]}(\rho_{[\gamma]}(\tilde{x}_0)) = \rho_{[\gamma_1]}(\tilde{\gamma}(1)) = \tilde{\gamma}'(1) = \widetilde{\gamma_1\gamma}(1) = \rho_{[\gamma_1\gamma]}(\tilde{x}_0).$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Liftungssatz 2.58 folgt  $\rho_{[\gamma_1]} \circ \rho_{[\gamma]} = \rho_{[\gamma_1\gamma]}$ , und wir erhalten eine Gruppenwirkung.

Da nach Satz 2.56 gerade die Elemente von  $\text{im } p_*$  zu Schleifen in  $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  liften, folgt  $\ker \rho = \text{im } p_*$ , so dass die Gruppe  $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\text{im } p_*$  frei und wegen Bemerkung 2.66 auch eigentlich diskontinuierlich auf  $\tilde{X}$  operiert, mit  $X \cong \tilde{X}/\Gamma$ .  $\square$

## 2.g. Die universelle Überlagerung

Nach Satz 2.56 bestimmt jede Überlagerung  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Untergruppe im  $p_*$  der Fundamentalgruppe von  $(X, x_0)$ . Wir wollen zeigen, dass es für geeignete Räume  $X$  umgekehrt zu jeder Untergruppe  $G \subset \pi_1(X, x_0)$  bis auf Isomorphie genau eine zusammenhängende Überlagerung  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  mit  $\text{im } p_* = G$  gibt. Dazu erinnern wir uns, dass eine Überlagerung nach Definition 2.25 universell heißt, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Eine universelle Überlagerung  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  haben wir in Beispiel 2.26 bereits kennengelernt.

Wir werden später sehen, dass die universelle Überlagerung von  $X$  jede zusammenhängende Überlagerung von  $X$  überlagert, daher der Name. Außerdem kann man jede beliebige (auch nicht zusammenhängende) Überlagerung mit Hilfe der universellen Überlagerung konstruieren.

2.69. DEFINITION. Ein topologischer Raum  $X$  heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt, so dass  $\text{im}(\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = 0$ .

2.70. SATZ. Jeder zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende und semilokal einfach zusammenhängende topologische Raum  $X$  mit  $x_0 \in X$  hat eine universelle Überlagerung.

2.71. BEMERKUNG. Die Voraussetzung „semilokal einfach zusammenhängend“ wirkt technisch. Tatsächlich ist sie notwendig, siehe Übung 2.94. Sei nämlich  $\tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung, sei  $U \subset X$  eine wegzusammenhängende, gleichmäßig überlagerte Umgebung von  $x \in X$ , sei  $\tilde{U}$  eine Zusammenhangskomponente von  $p^{-1}(U)$ , sei  $\tilde{x} \in \tilde{U}$  und  $x = p(\tilde{x})$ . Dann folgt  $\text{im}(\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = \{e\}$  aus den folgenden kommutativen Diagrammen.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \longrightarrow & \tilde{X} & & \pi_1(\tilde{U}, \tilde{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{e\} \\ p|_{\tilde{U}} \downarrow \cong & & \downarrow p & \implies & (p|_{\tilde{U}})_* \downarrow \cong & & p_* \downarrow \\ U & \longrightarrow & X & & \pi_1(U, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \end{array}$$

BEWEIS von Satz 2.70. Angenommen, es gebe eine universelle Überlagerung. Dann wissen wir nach Satz 2.56, dass eine Schleife  $\gamma$  in  $X$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$  genau dann zu einer Schleife in der universellen Überlagerung liftet, wenn sie in  $X$  nullhomotop ist. Wie immer folgt, dass zwei Wege  $\sigma, \sigma'$  von  $x_0$  nach  $x \in X$  genau dann Lifts  $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$  mit  $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}'(0) = \tilde{x}_0$  und gleichem Endpunkt  $\tilde{x} = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}'(1)$  haben werden, wenn  $\sigma$  und  $\sigma'$  homotop sind. Also definieren wir

$$\tilde{X} = \{ \sigma : [0, 1] \rightarrow X \mid \sigma(0) = x_0 \} / \sim \quad \text{und} \quad p([\sigma]) = \sigma(1),$$

wobei „ $\sim$ “ hier Homotopie relativ zu  $\{0, 1\}$  bezeichne.

Zur Topologie von  $\tilde{X}$  sei zunächst  $U \subset X$  offen und  $x \in U$ , dann hat  $x$  nach Voraussetzung eine wegzusammenhängende offene Umgebung  $V \subset U$  mit  $\text{im}(\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = 0$ . Also bildet

$$\mathcal{B} = \{ V \in \mathcal{O}_X \mid V \text{ wegzusammenhängend und } \text{im}(\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = 0 \}$$

eine Basis von  $\mathcal{O}_X$ .

Für  $V \in \mathcal{B}$  und einen Weg  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\sigma(0) = x_0$  und  $\sigma(1) \in V$  setze

$$U(V, \sigma) = \{ [\sigma\beta] \mid \beta \text{ Weg in } V \text{ mit } \beta(0) = \sigma(1) \} \subset \tilde{X}.$$

Dann ist die Abbildung

$$U(V, \sigma) \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad [\sigma\beta] \longmapsto \beta(1) \quad (*)$$

eine Bijektion, denn Surjektivität folgt, da  $V$  wegzusammenhängend ist, und Injektivität, da für zwei Wege  $\beta, \beta'$  mit gleichem Anfangspunkt  $x$  und gleichem Endpunkt die Schleife  $\beta'\beta^{-1}$  in  $V$  ja in  $X$  zusammenziehbar ist, somit also auch  $[\sigma\beta] = [\sigma\beta'] \in \tilde{X}$ .

Wir definieren also eine Topologie auf  $\tilde{X}$  durch Angabe einer Basis

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{ U(V, \sigma) \mid V \in \mathcal{B} \text{ und } \sigma \text{ Weg in } X \text{ mit } \sigma(0) = x_0 \text{ und } \sigma(1) \in V \}.$$

Aus (\*) folgt jetzt sofort die Stetigkeit von  $p$  und die Überlagerungseigenschaft, da alle  $V \in \mathcal{B}$  gleichmäßig überlagert sind.

Es gilt  $\text{im} p_* = 0$ , denn sei  $\tilde{\gamma}$  eine Schleife in  $\tilde{X}$ , dann zerlegen wir  $[0, 1]$  in Teilintervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , so dass jedes Teilintervall in eine der Mengen  $U(V_i, \sigma_i) \in \tilde{\mathcal{B}}$  abgebildet wird. Wir erhalten eine Nullhomotopie von  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ , indem wir ausnutzen, dass  $\sigma_i \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \sim \sigma_{i+1}$  gilt (Bild). Aus Satz 2.56 folgt  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$  da offensichtlich  $\text{im} p_* = 0$ .  $\square$

2.72. BEMERKUNG. Auf der soeben konstruierten universellen Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  operiert die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)$  durch  $[\gamma] \cdot [\sigma] = [\gamma\sigma]$ . Außerdem folgt aus obigem Beweis, dass  $\tilde{X}/\pi_1(X, x_0) \cong X$ . Beides erhalten wir aber auch direkt aus Folgerung 2.68, da die Gruppe  $\text{im} p_* = \{e\}$  trivial und insbesondere ein Normalteiler von  $\pi_1(X, x_0)$  ist.

Die universelle Überlagerung erfüllt eine universelle Eigenschaft und ist daher bis auf eindeutige Isomorphie von punktierten Überlagerungen eindeutig bestimmt.

2.73. FOLGERUNG. *Es sei  $(X, x_0)$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und es sei  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine universelle Überlagerung.*

- (1) *Es sei  $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine weitere Überlagerung. Dann existiert genau eine Abbildung  $r: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (Y, y_0)$  mit  $p = q \circ r$ , und  $r$  ist ebenfalls eine universelle Überlagerung von  $Y$ .*
- (2) *Sei insbesondere  $p': (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine weitere universelle Überlagerung, dann existiert ein eindeutiger Homöomorphismus  $F: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$ , so dass  $p = p' \circ F$ .*

BEWEIS. Da  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Liftes  $r$  von  $p$  aus Satz 2.58, da  $\{e\} = \text{im } p_* \subset \text{im } q_*$ . Um zu sehen, dass  $r$  eine Überlagerung ist, wählen wir zu  $y \in Y$  eine wegzusammenhängende Umgebung  $U$  von  $x = q(y)$ , die sowohl von  $p$  als auch von  $q$  gleichmäßig überlagert wird. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten von  $p^{-1}(U)$  und  $q^{-1}(U)$  jeweils homöomorph zu  $U$  via  $p$  beziehungsweise  $q$ . Sei  $V \subset Y$  die Wegzusammenhangskomponente von  $q^{-1}(U)$ , die  $y$  enthält. Da  $p = q \circ r$ , und da stetige Abbildungen zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbilden, ist  $r^{-1}(V) \subset p^{-1}(U)$  eine disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von  $p^{-1}(U)$ . Also ist  $r$  eine Überlagerung von  $Y$ , und da  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist, sogar eine universelle.

Die zweite Aussage zeigt man mit dem üblichen universellen Trick.  $\square$

Es seien  $X, \tilde{X}$  und  $Y$  wie oben. Aus Satz 2.56 und Folgerung 2.68 ergibt sich sofort, dass

$$Y \cong \tilde{X}/\pi_1(Y, y_0) \cong \tilde{X}/\text{im } q_* .$$

Auf diese Weise kann man eine Kategorie aller punktierten zusammenhängenden Überlagerungen von  $(X, x_0)$  konstruieren und zeigen, dass sie zur Kategorie aller Untergruppen von  $\pi_1(X, x_0)$  äquivalent ist. Dabei ist ein Äquivalenz von Kategorien  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor, so dass

- (1) zu jedem  $B \in \text{obj}(\mathcal{B})$  ein  $A \in \text{obj}(\mathcal{A})$  mit  $\mathcal{F}A = B$  existiert, das heißt, so dass  $\mathcal{F}$  auf Objekten bis auf Isomorphie surjektiv ist, und
- (2) für alle  $A, C \in \text{obj}(\mathcal{A})$  die Abbildung  $\mathcal{F}: \text{hom}_{\mathcal{A}}(A, C) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}C)$  eine Bijektion ist, das heißt, so dass  $\mathcal{F}$  auf Morphismen bijektiv ist.

In unserem Fall betrachten wir eine Kategorie, deren Objekte gerade Untergruppen  $G, H, \dots$  von  $\pi_1(X, x_0)$  und deren Morphismen gerade die Inklusionsabbildungen sind, also

$$\text{hom}(H, G) = \begin{cases} \{H \hookrightarrow G\} & \text{falls } H \subset G, \text{ und} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem betrachten wir eine Kategorie, deren Objekte gerade punktierte, zusammenhängende Überlagerungen  $p: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ ,  $q: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$  von  $(X, x_0)$ ,  $\dots$ , und deren Morphismen  $F: p \rightarrow q$  gerade punktierte Überlagerungen  $r: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  mit  $p = q \circ r$  sind. Als Funktoren erhalten wir zum einen die Zuordnung

$$\pi_1(X, x_0) \supset G \longmapsto \tilde{X}/G \quad \text{und} \quad (H \hookrightarrow G) \longmapsto (\tilde{X}/H \twoheadrightarrow \tilde{X}/G \text{ mit } Hx \mapsto Gx) ,$$

zum anderen die Zuordnung

$$p \longmapsto \text{im } p_* \subset \pi_1(X, x_0) \quad \text{und} \quad (p \twoheadrightarrow q) \longmapsto (\text{im } p_* \hookrightarrow \text{im } q_*) ;$$

für eine Äquivalenz von Kategorien hätte es gereicht, nur einen dieser zwei Funktoren anzugeben.

Einen ähnlichen Sachverhalt lernt man in der Algebra kennen. Dort klassifizieren die Untergruppen der Galois-Gruppe genau die Zwischenkörper in einer Galois-Körpererweiterung. Die Rolle der universellen Überlagerung spielt der algebraische Abschluss eines perfekten Körpers, siehe unten.

Allgemeiner kann man auch beweisen, dass die Kategorie aller Überlagerungen äquivalent ist zur Kategorie aller Gruppenwirkungen von  $\pi_1(X, x_0)$  auf (diskreten) Mengen. Diese Kategorie umfasst die Kategorie der Untergruppen von  $\pi_1(X, x_0)$ , wobei man einer Untergruppe  $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$  die Menge der Rechtsnebenklassen  $M = \pi_1(X, x_0)/\Gamma$  zuordnet. Um aus einer diskreten Menge  $M$  mit  $\pi_1(X, x_0)$ -Wirkung eine Überlagerung zu konstruieren, betrachtet man den Quotienten

$$\tilde{X} \times_{\Gamma} M = (\tilde{X} \times M)/\Gamma,$$

wobei  $\gamma$  auf  $\tilde{X} \times M$  durch  $\gamma(\tilde{x}, m) = (\gamma\tilde{x}, \gamma m)$  wirkt. Die Bahnen der  $\Gamma$ -Wirkung auf  $M$  entsprechen genau den Zusammenhangskomponenten der Überlagerung  $\tilde{X} \times_{\Gamma} M$ . Die obige Zuordnung lässt sich zu einem Funktor ausbauen, von dem man wieder zeigen kann, dass er eine Äquivalenz von Kategorien liefert.

Zum Schluss dieses Kapitels geben wir ein „Wörterbuch“ zur Übersetzung zwischen Sachverhalten aus der Galois-Theorie und der Überlagerungstheorie an.

<i>Galois-Theorie</i>	<i>Überlagerungstheorie</i>
Perfekter Körper $K$	Zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender, punktierter topologischer Raum $(X, x_0)$
Algebraische Erweiterung $L \supset K$	Zusammenhängende, punktierte Überlagerung $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$
Algebraischer Abschluss $\bar{K}$	Universelle Überlagerung $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$
Absolute Galoisgruppe $G = G(\bar{K}/K)$	Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$
abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$	Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$
Fixkörper von $H$	Quotient $(\tilde{X}/\Gamma, \Gamma\tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$
Normale Erweiterung $L \supset K$	Normale Überlagerung $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$
Relative Galoisgruppe $G(L/K)$	Decktransformationsgruppe $\pi_1(X, x_0)/(\text{im } q_*)$

Die Parallelen sind klar erkennbar. Entscheidender Unterschied: alle „Pfeile“ in der Kategorie der algebraischen Erweiterungen verlaufen genau andersherum als in der Kategorie der punktierten Überlagerungen. Das liegt daran, dass die entsprechenden Äquivalenzen von Kategorien in der Galois-Theorie kontravariante Funktoren sind. Wenn wir anstelle der topologischen Räume  $X$  die Algebra der stetigen Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten, sind wir in einer ähnlichen Situation wie bei den Körpern. Wie Sie umgekehrt im Falle von Zahlkörpern zu einer „geometrischen“ Beschreibung kommen, lernen Sie in der arithmetischen Geometrie.

## 2.h. Übungen zu Kapitel 2

*Übungen zu Abschnitt 2.a.*

2.74. ÜBUNG. Sei  $(X, A)$  ein Paar und  $Y$  ein Raum. Zeigen Sie: Homotopie relativ zu  $A$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ .

2.75. ÜBUNG. Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume, und seien  $F: X \rightarrow Y$  und  $G: Y \rightarrow Z$  Homotopieäquivalenzen, dh., es existieren Abbildungen  $P, Q$  mit  $P \circ F \sim \text{id}_X$ ,  $F \circ P \sim \text{id}_Y \sim Q \circ G$  und  $G \circ Q \sim \text{id}_Z$ . Konstruieren Sie Homotopien

$$(P \circ Q) \circ (G \circ F) \sim \text{id}_X \quad \text{und} \quad (G \circ F) \circ (P \circ Q) \sim \text{id}_Z.$$

Insbesondere ist Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation.

Übungen zu Abschnitt 2.b.

2.76. ÜBUNG. Seien  $X, Y$  topologische Räume, seien  $x \in X$  und  $y \in Y$  Punkte. Finden Sie einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

2.77. ÜBUNG. Sei  $X$  ein topologischer Raum. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen, in dem Sie jeweils geeignete Homotopien angeben.

- (1) Jede Abbildung  $S^1 \rightarrow X$  ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
- (2) Jede Abbildung  $F: S^1 \rightarrow X$  lässt sich zu einer Abbildung  $\bar{F}: D^2 \rightarrow X$  mit  $\bar{F}|_{\partial D^2} = F$  ausdehnen.
- (3) Die Fundamentalgruppen  $\pi_1(X, x)$  sind für alle  $x \in X$  trivial.
- (4) Je zwei Wege zwischen zwei Punkten  $x, y \in X$  sind homotop.

2.78. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raumes  $X$  genau dann abelsch ist, wenn für alle  $x, y \in X$  der Isomorphismus

$$\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y), \quad [\gamma] \mapsto [\gamma_0^{-1} \gamma \gamma_0]$$

nicht vom Weg  $\gamma_0$  von  $x$  nach  $y$  abhängt.

2.79. ÜBUNG. (1) Sei  $\circ$  eine Verknüpfung auf einer Menge  $G$  und  $e \in G$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $(G, \circ, e)$  ist eine Gruppe.
  - (b) Es gibt eine Kategorie  $\mathcal{G}$  in der jeder Morphismus invertierbar ist (siehe Bemerkung 2.6) mit  $\text{obj}(\mathcal{G}) = \{*\}$ ,  $\text{hom}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$  mit Verknüpfung  $\circ$  und  $\text{id}_* = e$ .
- (2) Seien  $G, H$  Gruppen,  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  Kategorien wie in (1) und sei  $F: G \rightarrow H$  eine Abbildung. Dann sind äquivalent:
- (a)  $F$  ist ein Gruppenhomomorphismus.
  - (b) Es gibt einen Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $\mathcal{F}* = *$  und  $\mathcal{F} = F: \text{hom}_{\mathcal{G}}(*, *) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{H}}(*, *)$ .

Übungen zu Abschnitt 2.c.

2.80. ÜBUNG. Seien  $T$  (Toast),  $S$  (Schinken) und  $A$  (Ananas) drei kompakte, paarweise disjunkte Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$ . Zeigen Sie, dass es eine Schnittebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  gibt, die jede der drei Teilmengen  $T, S$  und  $A$  in zwei Teile von gleichem Volumen zerlegt.

*Hinweis:* Zu jedem  $v \in S^2$  existiert (mindestens) ein  $d = d_v$ , so dass die Hyperebene

$$\{x \mid \langle x, v \rangle = d\}$$

das gesamte Sandwich  $T \cup S \cup A$  in zwei gleichgroße Teile teilt. Überlegen Sie sich, dass die Funktionen  $t, s$  und  $a: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$t(v) = \text{vol}\{x \in T \mid \langle x, v \rangle \leq d_v\}$$

und  $s, a$  analog nicht von der Wahl von  $d_v$  wie oben, sondern nur von  $v$  abhängen, und in  $v$  stetig sind. Folgern Sie dann die Behauptung mit dem Satz von Borsuk-Ulam.

2.81. ÜBUNG. Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra wie folgt. Sei  $P = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n z^0: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Polynom. Zeigen Sie: Für  $R > \max\{1, \sum_{i=1}^n |a_i|\}$  ist der Pfad

$$\gamma: S^1 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \gamma(z) := \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}$$

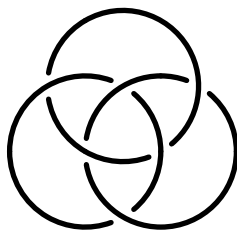
in  $S^1$  homotop zu  $\gamma_0: S^1 \rightarrow S^1, \gamma_0(z) = z^n$ . Folgern Sie:  $P$  hat mindestens eine Nullstelle  $z_0$  mit  $|z_0| \leq R$ .

Übungen zu Abschnitt 2.d.

2.82. ÜBUNG. Seien  $G, H$  Gruppen. Zeigen Sie:

- (1) Das Zentrum  $Z(G * H) = \{z \in G * H \mid zw = wz \text{ für alle } w \in G * H\}$  von  $G * H$  ist die triviale Gruppe  $\{e\} = \{\emptyset\} \subset G * H$ ;
- (2) alle Torsionselemente (Elemente  $w \in G * H$  mit  $w^N = e$  für ein  $N > 0$ ) sind von der Form  $w = vgv^{-1}$  oder  $w = vhv^{-1}$  mit  $v \in G * H$  und  $g \in G$  bzw.  $h \in H$  mit  $g^N = e$  bzw.  $h^N = e$ .

2.83. ÜBUNG. Zeigen Sie mit Hilfe von Beispiel 2.47 (2), dass die Borromäischen Ringe  $R_1, R_2, R_3 \subset \mathbb{R}^3$  sich im umgebenden  $\mathbb{R}^3$  nicht trennen lassen. Bestimmen Sie dazu die Äquivalenzklasse  $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (R_1 \cup R_2), \gamma(0)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  eines Weges  $\gamma$ , der  $R_3$  parametrisiert.



2.84. ÜBUNG. Es sei

$$X = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{n}(\cos \varphi + 1, \sin \varphi) \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, dass  $X$  überabzählbare Fundamentalgruppe hat, indem Sie für jede  $\mathbb{Z}$ -wertige Folge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Schleife angeben, die den Kreis mit Radius  $\frac{1}{n}$  genau  $a_n$ -mal umläuft.

2.85. ÜBUNG. Es sei  $G$  eine Gruppe. Für  $g, h \in G$  schreibe  $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1} \in G$ . Dann definiert man die Abelisierung von  $G$  als

$$G^{\text{ab}} = G / (\{[g, h] \mid g, h \in G\}).$$

Es sei  $p: G \rightarrow G^{\text{ab}}$  die Projektion auf den Quotienten. Zeigen Sie:

- (1) Die Gruppe  $G^{\text{ab}}$  ist abelsch (kommutativ).
- (2) Sei  $H$  eine abelsche Gruppe und  $f: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus, dann gibt es genau einen Homomorphismus  $\bar{f}: G^{\text{ab}} \rightarrow H$ , so dass  $f = \bar{f} \circ p$ .

2.86. ÜBUNG. Seien  $G, H$  Gruppen,  $p: G \rightarrow G^{\text{ab}}, q: H \rightarrow H^{\text{ab}}$  wie in Aufgabe 2.85, und  $f: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

- (1) Es gibt genau einen Homomorphismus  $f^{\text{ab}}: G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$ , so dass  $q \circ f = f^{\text{ab}} \circ p$ .
- (2) Dadurch wird Abelisierung zu einem Funktor von der Kategorie aller Gruppen in die der abelschen Gruppen.
- (3) Folgern Sie, dass die freien Gruppen  $F_k$  und  $F_l$  für  $k \neq l$  nicht isomorph sind.

2.87. ÜBUNG. Es seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  zwei Kategorien, in denen es alle Produkte „ $\times$ “, Koproducte „ $\sqcup$ “ und Pushouts „ $\cup$ “ gibt, und sei  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften Morphismen in  $\mathcal{D}$ , und zwar

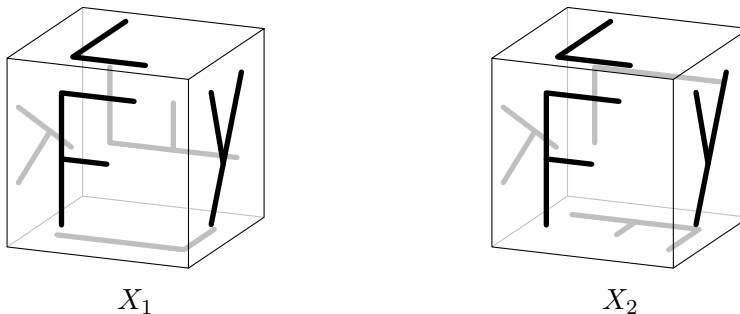
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A \times B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(B), \\ \mathcal{F}(A) \sqcup \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \sqcup B), \\ \mathcal{F}(A) \cup_{\mathcal{F}(C)} \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \cup_C B), \end{aligned}$$



für alle Objekte  $A, B, C$  von  $\mathcal{C}$  und Morphismen  $f: C \rightarrow A, g: C \rightarrow B$ .

*Übungen zu Abschnitt 2.e.*

2.88. ÜBUNG. Man betrachte den Würfel  $[0, 1]^3$  und erzeuge  $X_1, X_2$ , indem man je zwei Seiten gemäß der beiden Skizzen identifiziert. Finden Sie eine CW-Struktur für *einen* der Räume  $X_i$  mit je zwei 0-Zellen, vier 1-Zellen, drei 2-Zellen und einer 3-Zelle, und beweisen Sie *entweder*, dass  $\pi_1(X_1, x) = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  zur Gruppe der ganzen Einheits-Quaternionen isomorph ist, *oder* dass  $\pi_1(X_2, x) = \mathbb{Z}_8$  zyklisch von der Ordnung 8 ist.



*Anleitung:* Färben Sie in der Skizze jeweils die Ecken und die Kanten, die miteinander identifiziert werden, gleich ein, und geben Sie den Kanten eine Richtung. Orientieren Sie sich dazu an den Buchstaben auf den Seiten. Ein maximaler Baum besteht aus einer Kante zwischen den Ecken. Die verbleibenden gerichteten Kanten liefern drei Erzeuger, die drei Flächen je eine Relation. Versuchen Sie, die so erhaltene Präsentation soweit wie möglich zu vereinfachen.

- 2.89. ÜBUNG. (1) Geben Sie eine CW-Zerlegung von  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  an, so dass  $S^n \cap \mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$  aus zwei  $k$ -Zellen besteht für alle  $0 \leq k \leq n$ .  
 (2) Die Gruppe  $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$  operiert auf  $S^n$  durch Multiplikation. Zeigen Sie, dass der Quotient  $S^n/\mathbb{Z}_2$  genau der reell projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  aus Aufgabe 1.130 ist.  
 (3) Berechnen Sie  $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [1 : 0 : \dots : 0])$  für  $n \geq 2$ .

2.90. ÜBUNG. Seien  $X_1, X_2 \cong S^1 \times S^1$  zwei Tori. Erzeugen Sie  $X$ , indem Sie  $X_1$  und  $X_2$  entlang eines Kreises  $S^1 \times \{1\}$  miteinander verkleben.

- (1) Finden Sie eine CW-Struktur auf  $X$  und berechnen Sie so  $\pi_1(X)$ .  
 (2) Stellen Sie  $X$  als topologisches Produkt aus zwei bekannten Räumen dar, und berechnen Sie so  $\pi_1(X)$ .

*Übungen zu Abschnitt 2.f.*

2.91. ÜBUNG. Seien  $p: \tilde{X} \rightarrow X, p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$  und  $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$  Überlagerungen. Zeigen Sie:

- (1) sei  $A \subset X$  eine Unterraum und  $\tilde{A} = p^{-1}A \subset \tilde{X}$ , dann ist  $p|_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow A$  eine Überlagerung;  
 (2) die natürliche Abbildung  $p_1 \times p_2: \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  ist eine Überlagerung.

2.92. ÜBUNG. Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung, wobei  $X$  zusammenhängend sei. Zeigen Sie:

- (1) die Mengen  $p^{-1}(\{x\}) \subset \tilde{X}$  sind für alle  $x \in X$  gleichmächtig;  
 (2) der Raum  $\tilde{X}$  ist genau dann kompakt, wenn  $X$  kompakt ist und  $p^{-1}(\{x_0\})$  endlich ist für ein  $x_0 \in X$ .

2.93. ÜBUNG. Wir betrachten den topologischen Raum

$$Y := \left\{ \left( 2 + \sin \frac{\pi}{t} \right) e^{2\pi i t} \mid \varphi \in (0, 1] \right\} \cup [1, 3] \subset \mathbb{C} .$$

- (1) Skizzieren Sie  $Y$ , und zeigen Sie, dass  $\pi_1(Y) = 0$ .

- (2) Beweisen Sie, dass die Radialprojektion  $F: Y \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$  dennoch keinen Lift  $\tilde{F}: Y \rightarrow \mathbb{R}$  zulässt.

*Übungen zu Abschnitt 2.g.*

2.94. ÜBUNG. Sei  $X \subset \mathbb{R}^2$  die Vereinigung aller Kreise um  $(\frac{1}{n}, 0)$  mit Radius  $\frac{1}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  wie in Übung 2.84, und  $X$  trage die vom  $\mathbb{R}^2$  induzierte Unterraumtopologie. Skizzieren Sie  $X$  und zeigen Sie, dass  $X$  keine einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt.

2.95. ÜBUNG. Überlagerungstheorie benötigt keine Trennungseigenschaften. Sei  $X = ((-1, 1) \times \{1, -1\}) / \sim$  der Ihnen wohlbekannte, nicht Hausdorffsche Raum aus Beispiel 1.29, wobei die Äquivalenzrelation „ $\sim$ “ erzeugt werde von  $(t, 1) \sim (t, -1)$  für alle  $t \neq 0$ .

- (1) Zeigen Sie, dass  $X$  zusammenhängend und lokal zusammenziehbar ist.
- (2) Bestimmen Sie die universelle Überlagerung von  $X$ .
- (3) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von  $X$ .

2.96. ÜBUNG. Bestimmen Sie wie in Folgerung 2.53 einen CW-Komplex mit Fundamentalgruppe isomorph zur unendlichen Diedergruppe, präsentiert durch

$$\langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

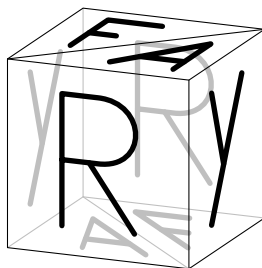
und seine universelle Überlagerung. Sie dürfen Beispiel 2.54 (2) zu Hilfe nehmen.

2.97. ÜBUNG. Bestimmen Sie alle zusammenhängenden punktierten Überlagerungen der beiden Räume  $X_1$  und  $X_2$  aus Übung 2.88 bis auf punktierte Überlagerungs-Homöomorphismen, und geben Sie gegebenenfalls die Gruppe der Decktransformationen an.

2.98. ÜBUNG. Verkleben Sie die acht Seiten des unten skizzierten Polytopes wie angegeben, und zeigen Sie, dass der entstehende topologische Raum  $X$  die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(X, x_0) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

besitzt. Finden Sie eine universelle Überlagerung. Wie kann man eine Überlagerung von  $X$  konstruieren, die nicht normal ist?



## Homotopiegruppen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Fundamentalgruppe aus der Topologie und erhalten höhere Homotopiegruppen. Wir lernen einige Berechnungsmethoden kennen, unter anderem die lange exakten Sequenzen für Paare und für Faserungen.

Als Beispiel zeigen wir, dass eine stetige Abbildung der  $n$ -dimensionalen Sphäre  $S^n$  in sich durch ihren Abbildungsgrad in  $\mathbb{Z}$  eindeutig bestimmt wird, mit anderen Worten gilt  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ . Als Anwendung beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz 0.2. Höhere Homotopiegruppen  $\pi_{n+k}(S^n)$  der Sphären lassen sich geometrisch als sogenannte gerahmte Bordismusgruppen  $k$ -dimensionaler Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^{n+}$  interpretieren.

Da wir zur Berechnung der Homotopiegruppen nur wenige Werkzeuge haben, führen wir außerdem stabile Homotopiegruppen ein. Die höheren stabilen Homotopiegruppen der Sphären sind zwar leichter zu bestimmen als die  $\pi_k(S^n)$ , sind aber dennoch bis zum heutigen Tage noch nicht vollständig bekannt.

### 3.a. Höhere Homotopiegruppen

Wir betrachten zunächst die Kategorie  $\mathcal{Top}_+$  der punktierten topologischen Räume aus Definition 2.19. Da wir in diesem Kapitel fast nur punktierte Räume betrachten, schreiben wir statt  $(X, x_0)$  auch manchmal nur kurz  $X$ . Eine Homotopie zwischen zwei punktierten Abbildungen  $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  ist eine Homotopie relativ zu  $\{x_0\}$ , siehe Definitionen 2.2 und 2.8. Falls eine solche Homotopie existiert, nennen wir  $f$  und  $g$  homotop in  $\mathcal{Top}_+$  und schreiben wieder kurz  $f \sim g$ . Wie in Bemerkung 2.3 erhalten wir eine Äquivalenzrelation, die mit der Verkettung von stetigen Abbildungen verträglich ist.

Indem wir als Morphismen zwischen punktierten Räumen nicht einzelne punktierte stetige Abbildungen, sondern punktierte Homotopieklassen betrachten, erhalten wir die punktierte Homotopiekategorie  $\mathcal{HTop}_+$ , siehe Definition 2.19. Wir schreiben dafür kurz

$$[X, Y] = [(X, x_0), (Y, y_0)] = \text{hom}_{\mathcal{HTop}_+}((X, x_0), (Y, y_0)) .$$

In Satz 2.21 haben wir bereits gesehen, dass die Fundamentalgruppe einen kovarianten Funktor  $\pi_1: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$  definiert. Wir wollen jetzt weitere Funktoren  $\pi_n$  auf  $\mathcal{HTop}_+$  definieren. Für  $n = 0$  erhalten wir nur punktierte Mengen, für  $n \geq 2$  erhalten wir abelsche Gruppen.

Es seien  $A \subset X$  topologische Räume, dann bezeichne  $X/A \in \mathcal{Top}_+$  den Quotientenraum mit Basispunkt  $A/A$ . Er trage die Quotiententopologie aus Definition 1.71, die zugrundeliegende Äquivalenzrelation hat dann also  $A$  als eine Äquivalenzklasse, alle Punkte von  $X \setminus A$  hingegen bilden je einpunktige Äquivalenzklassen. Falls  $A = \emptyset$  und  $X$  kompakt ist, definieren wir

$$X/\emptyset = X_+ \cong X \sqcup \{*\} \in \mathcal{Top}_+ ,$$

wir fügen also zu  $X$  einen zusätzlichen Basispunkt  $*$  mit der Topologie der disjunkten Vereinigung (Definition 1.39) hinzu. Übrigens ist der Funktor  $\cdot_+ : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Top}_+$  linksadjungiert zum vergesslichen Funktor  $\mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Top}$ , das heißt, für einen unpunktigten Raum  $X$  und einen punktierten Raum  $Y$  gilt

$$\text{hom}_{\mathcal{Top}_+}(X_+, Y) = \text{hom}_{\mathcal{Top}}(X, Y) .$$

Es sei  $I = [0, 1]$  das Einheitsintervall und  $I^k$  der  $k$ -dimensionale Einheitswürfel, dann bezeichne

$$\partial I^k = I^k \setminus (0, 1)^k$$

den (*geometrischen*) *Rand* des Einheitswürfels. Im Falle  $k = 0$  ist  $\partial(I^0) = \partial \text{pt} = \emptyset$  leer, dabei ist  $\text{pt}$  ein fester einpunktiger Raum. Nach Übung 3.105 gibt es für alle  $k$  einen Homöomorphismus

$$I^k / \partial I^k \cong S^k .$$

Den Basispunkt, also die Äquivalenzklasse des Randes  $\partial I^k$ , identifizieren wir mit dem Nordpol.

3.1. DEFINITION. Für einen punktierten Raum  $X$  und  $k \geq 0$  definieren wir die  $k$ -te *Homotopiegruppe*

$$\pi_k(X) = ([I^k / \partial I^k, X], 0) ,$$

dabei sei  $0 \in \pi_k(X)$  die Homotopieklasse der konstanten Abbildung  $c(t_1, \dots, t_k) = x_0$ . Sei  $F: X \rightarrow Y$  eine punktierte Abbildung, dann definieren wir  $\pi_k F: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$  durch

$$\pi_k F([f]) = [F \circ f] .$$

Sei schließlich  $k \geq 1$  und  $a = [f], b = [g] \in \pi_k(X)$ , dann definieren wir  $ab = [fg] \in \pi_k(X)$ , wobei

$$(fg)(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} f([2t_1, t_2, \dots, t_k]) & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ g([2t_1 - 1, t_2, \dots, t_k]) & \text{falls } t_1 \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Aus Bemerkung 2.3 folgt, dass die Verknüpfung und die Abbildung  $\pi_k F$  wohldefiniert sind. Für  $k = 0$  erhalten wir keine Gruppe, da wir keine Verknüpfung definiert haben, so dass wir hier eigentlich nur 0-te *Homotopiemenge* sagen dürften. Für  $\pi_k F$  schreibt man oft auch kurz  $F_*$ , und für  $ab$  schreibt man meist  $a + b$ , wenn  $k \geq 2$ .

3.2. BEMERKUNG. Wir können  $\pi_k(X)$  auch wie folgt beschreiben.

- (1) Für  $k = 0$  ist  $I^0 / \partial I^0 \cong S^0$  ein diskreter Raum aus zwei Punkten  $*$  (Basispunkt, Nordpol) und  $0$  (Südpol). Die Menge der punktierten Abbildungen  $f: S^0 \rightarrow X$  entspricht genau den Punkten  $x \in X$ , wobei  $f(*) = x_0$  und  $f(0) = x$ . Eine Homotopie  $h$  zwischen solchen Abbildungen bildet  $\{*\} \times I$  konstant auf  $x_0$  ab, und

$$\gamma = h|_{\{0\} \times I}: I \rightarrow X \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = h(0, t)$$

beschreibt einen Weg von  $f(0)$  nach  $g(0)$ . Umgekehrt liefert jeder Weg  $\gamma: I \rightarrow X$  von  $f(0)$  nach  $g(0)$  eine punktierte Homotopie  $h$  zwischen  $f$  und  $g$  mit

$$h(s, t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } s = 0, \text{ und} \\ x_0 & \text{falls } s = *. \end{cases}$$

Somit ist  $\pi_0(X)$  gerade die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ , und  $0 \in \pi_0(X)$  bezeichnet die Wegzusammenhangskomponente des Basispunktes  $x_0$ .

- (2) Für  $k = 1$  ist eine punktierte Abbildung  $f: S^1 \rightarrow X$  gerade eine Schleife am Basispunkt  $x_0$ , und  $0$  bezeichnet die konstante Schleife. Die Verkettung entspricht der üblichen Verkettung von Schleifen. Also ist  $\pi_1(X)$  genau die Fundamentalgruppe von  $X$  aus Abschnitt 2.b.
- (3) Da es für alle  $k$  einen Homöomorphismus  $I^k / \partial I^k \rightarrow (S^k, *)$  gibt, gibt es eine natürliche Bijektion

$$\pi_k(X) \cong [S^k, X] .$$

3.3. DEFINITION. Es seien  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  Kategorien und  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  kovariante (kontravariante) Funktoren. Eine *natürliche Transformation*  $\tau: F \rightarrow G$  ordnet jedem Objekt  $X$  von  $\mathcal{C}$  einen Morphismus  $\tau_X: F(X) \rightarrow G(X)$  in  $\mathcal{D}$  so zu, dass für jeden Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(X) \xrightarrow{Ff} F(Y) & & F(X) \xleftarrow{Ff} F(Y) \\ \tau_X \downarrow & & \tau_X \downarrow \\ G(X) \xrightarrow{Gf} G(Y) & \text{beziehungsweise} & G(X) \xleftarrow{Gf} G(Y) \end{array}$$

kommutiert. Wenn  $\tau_X$  für alle  $X$  ein Iso-/Mono-/Epimorphismus ist, spricht man entsprechend von einem *natürlichen* Iso-/Mono-/Epimorphismus.

Oftmals wird das Adjektiv „natürlich“ benutzt, ohne die beteiligten Funktoren im einzelnen zu spezifizieren. In der obigen Bemerkung 3.2 (3) erhalten wir beispielsweise einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Funktoren  $\pi_k$  und  $[S^k, \cdot]: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Set}_+$ .

3.4. BEISPIEL. Der einpunktige Raum  $\text{pt}$  ist initiales (kofinales) und terminales (finales) Objekt in der Kategorie  $\mathcal{Top}_+$ . Das heißt, zu jedem punktierten Raum  $(X, x_0)$  gibt es genau eine punktierte Abbildung  $\text{pt} \rightarrow X$ , nämlich  $*$   $\mapsto x_0$  ( $\text{pt}$  ist *initial*), und genau eine Abbildung  $X \rightarrow \text{pt}$ , nämlich die konstante Abbildung ( $\text{pt}$  ist *terminal*).

Insbesondere sei  $X = S^k$ . Wegen Bemerkung 3.2 (3) gilt

$$\pi_k(\text{pt}) \cong [S^k, \text{pt}] = \{e\} = 0.$$

Für unser nächstes Zwischenergebnis benötigen wir drei weitere Kategorien. Die Kategorie  $\mathcal{Set}_+$  der *punktierten Mengen* hat als Objekte Paare  $(A, a_0)$  aus einer Menge  $A$  mit einem ausgezeichneten Element  $a_0 \in A$ . Manchmal schreiben wir wieder kurz  $A$  für  $(A, a_0)$ . Wie bei den punktierten Räumen definieren wir

$$\text{hom}_{\mathcal{Set}_+}(A, B) = \text{hom}_{\mathcal{Set}_+}((A, a_0), (B, b_0)) = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_0) = b_0\}.$$

Außerdem sei  $\mathcal{Grp}$  die Kategorie der Gruppen, mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen, und  $\mathcal{Ab}$  sei die Kategorie der abelschen Gruppen, wiederum mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

Wir erhalten Funktoren

$$\mathcal{Ab} \longrightarrow \mathcal{Grp} \longrightarrow \mathcal{Set}_+.$$

Da jede abelsche Gruppe insbesondere eine Gruppe ist, ist der erste Funktor eine Einbettung. Die Kategorie  $\mathcal{Ab}$  ist sogar eine *volle Unterkategorie* von  $\mathcal{Grp}$ , das heißt, für zwei Objekte  $A, B \in \mathcal{Ab}$  gilt

$$\text{Hom}_{\mathcal{Ab}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{Grp}}(A, B).$$

Der zweite Funktor  $\mathcal{Grp} \rightarrow \mathcal{Set}_+$  ordnet jeder Gruppe  $A$  mit neutralem Element  $e$  die punktierte Menge  $(A, e)$  zu. Da jeder Gruppenhomomorphismus die neutralen Elemente aufeinander abbildet, ist er auch ein Morphismus punktierter Mengen.

3.5. PROPOSITION. *Die Homotopiegruppen haben folgende Eigenschaften.*

- (1) Für alle  $k \geq 0$  ist  $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Set}_+$  ein Funktor.
- (2) Für alle  $k \geq 1$  ist  $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$  ein Funktor.
- (3) Für alle  $k \geq 2$  ist  $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Ab}$  ein Funktor.

Damit sind die wichtigsten elementaren Eigenschaften der  $\pi_k$  bereits zusammengefasst. Insbesondere sind die Homotopiegruppen homotopieinvariant, verträglich mit punktierten Abbildungen, und für  $k \geq 2$  sogar abelsche Gruppen.

BEWEIS. Der Beweis von (1) und (2) ist ähnlich wie bei der Fundamentalgruppe, siehe Satz 2.14 und Satz 2.21.

Wir beginnen mit (1) für  $k \geq 0$  beliebig, dabei hilft Bemerkung 3.2 (1), den Fall  $k = 0$  besser zu verstehen. Seien  $F: X \rightarrow Y$  und  $f_0 \sim f_1: I^k/\partial I^k \rightarrow X$  punktiert homotope punktierte Abbildungen. Wie in Bemerkung 2.3 (2) sind dann auch  $F \circ f_0$  und  $F \circ f_1: I^k/\partial I^k \rightarrow Y$  punktiert homotop, so dass

$$\pi_k F([f_0]) = [F \circ f_0] = [F \circ f_1] = \pi_k F([f_1]) .$$

Wir erhalten also in der Tat eine Abbildung

$$\pi_k F: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y) .$$

Es gilt offensichtlich  $\pi_k \text{id}_X = \text{id}_{\pi_k(X)}$ . Für  $F: X \rightarrow Y$ ,  $G: Y \rightarrow Z$  und  $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$  folgt außerdem

$$\pi_k(G \circ F)([f]) = [G \circ F \circ f] = \pi_k G([F \circ f]) = \pi_k G(\pi_k F([f])) ,$$

also gilt auch  $\pi_k(G \circ F) = (\pi_k G) \circ (\pi_k F)$ , und  $\pi_k$  ist insbesondere ein Funktor von der Kategorie  $\mathcal{Top}_+$  in die Kategorie  $\mathcal{Set}_+$  der punktierten Mengen.

Seien jetzt  $F_0 \sim F_1: X \rightarrow Y$  punktiert homotop, und sei  $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$  eine punktierte Abbildung. Dann sind  $F_0 \circ f$ ,  $F_1 \circ f$  nach Bemerkung 2.3 (2) punktiert homotop, also gilt

$$\pi_k F_0([f]) = [F_0 \circ f] = [F_1 \circ f] = \pi_k F_1([f]) .$$

Somit ist  $\pi_k$  mit Homotopie verträglich und liefert daher eine Abbildung

$$\pi_k: \text{hom}_{\mathcal{HTop}_+}(X, Y) = [X, Y] \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{Set}_+}(\pi_k(X), \pi_k(Y)) .$$

Also ist  $\pi_k$  sogar ein Funktor von der Kategorie  $\mathcal{HTop}_+$  in die Kategorie  $\mathcal{Set}_+$  der punktierten Mengen. Damit ist (1) gezeigt.

Zu (2) sei  $k \geq 1$ . Punktierte Homotopien  $H_1, H_2: (I^k/\partial I^k) \times I \rightarrow X$  zwischen  $f_1$  und  $g_1$  beziehungsweise  $f_2$  und  $g_2: I^k/\partial I^k \rightarrow X$  lassen sich zusammensetzen zu einer Homotopie  $H$  zwischen  $f_1 f_2$  und  $g_1 g_2$  mit

$$H([t_1, \dots, t_k], s) = \begin{cases} H_1([2t_1, t_2, \dots, t_k], s) , & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ H_2([2t_1 - 1, t_2, \dots, t_k], s) , & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Genauso wie in Definition 3.1 behandeln wir also die Variable  $t_1$  so, wie die Variable  $t$  in Definition 2.13 und im Beweis von Satz 2.14. Mit dem gleichen Trick lassen sich die Homotopien aus dem Beweis von Satz 2.14 zum Beweis der Gruppenaxiome auf die hiesige Situation übertragen.

Außerdem gilt wie im Beweis von Satz 2.21 für  $F: X \rightarrow Y$  und  $f, g: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ , dass

$$\pi_k F([f]) \pi_k F([g]) = (F \circ f)(F \circ g) = F \circ (fg) = \pi_k F([fg]) ,$$

also ist  $\pi_k F$  ein Gruppenhomomorphismus. Die Funktoraxiome

$$\pi_k \text{id}_X = \text{id}_{\pi_k(X)} \quad \text{und} \quad \pi_k(F \circ G) = \pi_k F \circ \pi_k G$$

folgen bereits aus (1), also ist (2) bewiesen.

Zum Beweis von (3) benötigen wir die Variablen  $t_1$  und  $t_2$ . Wir definieren eine punktierte Homotopie  $H$  zwischen  $fg$  und  $gf$  durch

$$H([t_1, \dots, t_k], s) = \begin{cases} f([2t_1, \frac{t_2}{1-2s}, t_3, \dots, t_k]) & \text{für } s \in [0, \frac{1}{4}], \quad t_1 \in [0, \frac{1}{2}], \quad t_2 \in [0, 1-2s], \\ g([2t_1 - 1, \frac{t_2-2s}{1-2s}, t_3, \dots, t_k]) & \text{für } s \in [0, \frac{1}{4}], \quad t_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \quad t_2 \in [2s, 1], \\ f([2(t_1 - s) + \frac{1}{2}, 2t_2, \dots]) & \text{für } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \quad t_1 \in [s - \frac{1}{4}, s + \frac{1}{4}], \quad t_2 \in [0, \frac{1}{2}], \\ g([2(t_1 + s) - \frac{3}{2}, 2t_2 - 1, \dots]) & \text{für } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \quad t_1 \in [\frac{3}{4} - s, \frac{5}{4} - s], \quad t_2 \in [\frac{1}{2}, 1], \\ f([2t_1 - 1, \frac{t_2}{2s-1}, t_3, \dots, t_k]) & \text{für } s \in [\frac{3}{4}, 1], \quad t_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \quad t_2 \in [0, 2s - 1], \\ g([2t_1, \frac{t_2+2s-2}{2s-1}, t_3, \dots, t_k]) & \text{für } s \in [\frac{3}{4}, 1], \quad t_1 \in [0, \frac{1}{2}], \quad t_2 \in [2 - 2s, 1], \\ x_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass  $\pi_k(X)$  abelsch ist für  $k \geq 2$ . Nach (2) ist  $\pi_k F: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$  für alle stetigen Abbildungen  $F: X \rightarrow Y$  ein Homomorphismus, der nach (1) nur von der punktierten Homotopieklasse von  $F$  abhängt, also erhalten wir einen Funktor  $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Ab}$ .  $\square$

3.6. BEMERKUNG. Nach Bemerkung 2.6 sind Isomorphismen in der Homotopiekategorie  $\mathcal{HTop}_+$  gerade punktierte Homotopieäquivalenzen. Ein topologischer Raum ist nach Beispiel 2.5 genau dann zusammenziehbar, wenn er zum einpunktigen Raum  $\text{pt}$  homotopieäquivalent ist. Da ein Funktor isomorphe Objekte auf isomorphe Objekte abbildet, folgt aus Beispiel 3.4, dass

$$X \text{ zusammenziehbar} \quad \implies \quad \pi_k(X) = 0 \text{ für alle } k \geq 0.$$

Wir werden später im Satz von Whitehead sehen, dass für eine große Klasse topologischer Räume auch die Umkehrung gilt.

3.7. PROPOSITION. Für alle  $k \geq 1$  liefert jede relative Homotopieklasse  $[\gamma]$  von Pfaden von  $x_0$  nach  $x_1$  einen Isomorphismus

$$[\gamma]: \pi_k(X, x_1) \rightarrow \pi_k(X, x_0) \quad \text{mit} \quad [\gamma] \cdot [f] = [\gamma \cdot f],$$

$$\text{wobei} \quad \gamma \cdot f = \begin{cases} f(2t_1 - \frac{1}{2}, \dots, 2t_k - \frac{1}{2}) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t_1, \dots, t_k \leq \frac{3}{4}, \text{ und} \\ \gamma(2 - 4 \max\{|t_1 - \frac{1}{2}|, \dots, |t_k - \frac{1}{2}|\}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere wirkt die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$  durch Gruppenautomorphismen auf  $\pi_k(X)$ .

Für  $k = 1$  erhalten wir innere Automorphismen von  $\pi_1(X)$ , siehe Bemerkung 2.16.

BEWEIS. Mit ähnlichen Methoden wie im vorangegangenen Beweis überprüft man die folgenden Aussagen.

- (1) Die Abbildung  $\gamma \cdot f$  ist stetig.
- (2) Relativ homotope Pfade  $\gamma_0, \gamma_1$  von  $x_0$  nach  $x_1$  und punktiert homotope Abbildungen  $f_0, f_1: I^k/\partial I^k \rightarrow (X, x_1)$  liefern punktiert homotope Abbildungen  $\gamma_0 \cdot f_0, \gamma_1 \cdot f_1$ . Wenn wir Schleifen an  $x_0$  betrachten, erhalten wir also eine wohldefinierte Abbildung  $\pi_1(X) \times \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(X)$ .
- (3) Es gilt  $\gamma_0 \cdot (\gamma_1 \cdot f) \sim (\gamma_0 \gamma_1) \cdot f$ , und für den konstanten Pfad  $e$  gilt  $e \cdot f \sim f$ . Wenn wir Schleifen an  $x_0$  betrachten, ist die obige Abbildung also eine Gruppenwirkung.
- (4) Die obige Operation ist mit der Gruppenstruktur auf  $\pi_k(X)$  verträglich.  $\square$

Wir wollen uns jetzt die Menge  $\text{hom}_{\mathcal{HTop}}(S^n, X) = [S_+^n, X]$  der freien Homotopieklassen von Abbildungen von  $S^n$  nach  $X$  anschauen.

3.8. FOLGERUNG (aus Proposition 3.7). *Es sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum und  $k \geq 1$ . Dann steht die Menge  $[S_+^n, X]$  der freien Homotopieklassen nicht punktierter Abbildungen  $S^n \rightarrow X$  in natürlicher Bijektion zur Menge  $\pi_k(X)//\pi_1(X)$  der Orbits der  $\pi_1(X)$ -Wirkung auf  $\pi_k(X)$ .*

Wir schreiben hier  $\pi_k(X)//\pi_1(X)$  um deutlich zu machen, dass es sich nicht um den Quotienten nach einer Untergruppe handelt.

BEWEIS. Fixiere  $x_0 \in X$ . Es sei  $f: S^k \rightarrow X$  gegeben, dann wählen wir einen Weg  $\gamma$  in  $X$  von  $x_0$  zu  $f(e_1)$  und erhalten nach Proposition 3.7 ein Element  $[\gamma \cdot f] \in \pi_k(X, x_0)$ . Für einen weiteren Weg  $\gamma'$  gilt dann

$$[\gamma' \cdot f] = [\gamma' \bar{\gamma}] \cdot [\gamma \cdot f],$$

der Orbit von  $[\gamma \cdot f]$  unter der  $\pi_1(X, x_0)$ -Wirkung hängt also nicht von der Wahl von  $\gamma$  ab.

Sei  $h$  eine freie Homotopie zwischen  $f$  und  $g: S^n \rightarrow X$ , dann setzen wir  $\gamma(t) = h(e_1, t)$ . Mithilfe von  $h$  lässt sich eine punktierte Homotopie zwischen  $f$  und  $\gamma \cdot g$  konstruieren, so dass der obige Orbit auch nicht von der freien Homotopieklassen von  $f$  abhängt. Also ist die obige Zuordnung wohldefiniert. Sie ist auch natürlich im Sinne von Definition 3.3, denn sei  $F: X \rightarrow Y$  stetig, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [S_+^n, X] & \longrightarrow & \pi_k(X)//\pi_1(X) \\ F \circ \downarrow & & \downarrow F_* \\ [S_+^n, Y] & \longrightarrow & \pi_k(Y)//\pi_1(Y). \end{array}$$

Surjektivität ist klar, da wir jede punktierte Abbildung als nicht punktierte Abbildung auffassen können. Zur Injektivität bleibt zu zeigen, dass  $f, g: S^k \rightarrow X$  frei homotop sind, wenn  $[\gamma \cdot f] = [\gamma' \cdot g]$  für geeignete Wege  $\gamma, \gamma'$  gilt. Aber das folgt, da  $\gamma \cdot f$  stets frei homotop zu  $f$  ist.  $\square$

3.9. DEFINITION. Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum und  $k \geq 1$ . Wir definieren den  $k$ -ten Schleifenraum von  $(X, x_0)$  durch

$$\Omega^k(X) = \Omega^k(X, x_0) = \{ f: I^k \rightarrow X \mid \partial I^k \subset f^{-1}(x_0) \} \subset C(I^k, X),$$

wobei  $C(I^k, X)$  die kompakt-offene und  $\Omega^k(X, x_0)$  die Unterraumtopologie trage. Als Basispunkt von  $\Omega^k(X, x_0)$  fixieren wir die konstante Abbildung auf  $x_0$ .

3.10. BEMERKUNG. Es gilt (Übung 3.107, siehe Bemerkung 2.17):

- (1) für  $k, \ell \geq 0$  gilt  $\Omega^k(\Omega^\ell(X)) \cong \Omega^{k+\ell}(X)$ ;
- (2) für  $k, \ell \geq 0$  gilt  $\pi_k(\Omega^\ell(X)) \cong \pi_{k+\ell}(X)$ .

### 3.b. Die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares

Ein *punktiertes Paar*  $(X, A)$  besteht aus einem punktierten topologischen Raum  $X$  mit Basispunkt  $x_0$  und einer Teilmenge  $A \subset X$ , so dass  $x_0 \in A$ . Eine *Abbildung* zwischen punktierten Paaren  $(X, A), (Y, B)$  ist eine punktierte Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ , so dass  $f(A) \subset B$ . Die punktierten Paare mit ihren Abbildungen bilden eine Kategorie

$$\mathcal{P}air_+.$$

Zwei Abbildungen  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  punktierter Paare heißen (*als Abbildungen punktierter Paare*) *homotop*, wenn es eine punktierte Homotopie  $h: X \times I \rightarrow Y$  zwischen ihnen gibt, so dass

$$A \times I \subset h^{-1}(B). \tag{3.1}$$

Die punktierten Paare mit Homotopieklassen von Abbildungen bilden eine Kategorie

$$\mathcal{H}P}air_+.$$



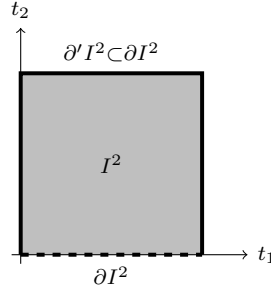


ABBILDUNG 3.1. Das Tripel  $\partial'I^2 \subset \partial I^2 \subset I^2$

Für  $k \geq 1$  bezeichne

$$\partial'I^k = \partial I^k \setminus ((0, 1)^{k-1} \times \{0\})$$

den Rand von  $I^k$  ohne eine (offene) Seite, siehe Abbildung 3.1. Da wir im Folgenden manche Abbildungen auf  $(0, 1)^{k-1} \times \{0\}$  nicht festlegen, nennen wir  $I^{k-1} \times \{0\}$  die „offene Seite“ von  $I^k$ .

3.11. DEFINITION. Für ein punktiertes Paar  $(X, A)$  und  $k \geq 1$  definieren wir

$$\pi_k(X, A) = ([I^k/\partial'I^k, \partial I^k/\partial'I^k], (X, A), 0),$$

dabei bezeichne wieder 0 die konstante Abbildung auf  $x_0 \in A$ . Seien  $a = [f]$ ,  $b = [g] \in \pi_k(X, A)$  und  $k \geq 2$ , dann definieren wir  $ab = [fg] \in \pi_k(X, A)$  wie in Definition 3.1. Außerdem bezeichnen wir die Homotopieklasse der konstanten Abbildung  $c(t_1, \dots, t_k) = x_0$  mit  $0 = [c] \in \pi_k(X, A)$ . Sei schließlich  $F: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung punktierter Paare, dann definieren wir  $\pi_k F: \pi_k(X, A) \rightarrow \pi_k(Y, B)$  durch

$$\pi_k F([f]) = [F \circ f].$$

Für  $k = 0$  setzen wir

$$\pi_0(X, A) = \pi_0(X/A) = \pi_0(X)/\pi_0(A),$$

wobei der rechte Quotient als Quotient punktierter Mengen zu verstehen ist. Für eine Abbildung  $F$  punktierter Paare sei  $\pi_0 F: \pi_0(X, A) \rightarrow \pi_0(Y, B)$  die von  $\pi_0 F: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  induzierte Abbildung.

Man beachte, dass wir aufgrund der Sonderrolle der Koordinate  $t_k$  in der Definition von  $\partial'I^k$  eine gesonderte Definition für  $\pi_0$  benötigen und im Falle  $k = 1$  keine Gruppenstruktur erhalten. Wie in Bemerkung 2.3 folgt wieder, dass die Verknüpfung und die Abbildung  $\pi_k F$  wohldefiniert sind. Für  $\pi_k F$  schreibt man oft auch kurz  $F_*$ , und für  $ab$  schreibt man meist  $a + b$ , wenn  $k \geq 3$ .

3.12. BEMERKUNG. Wenn in der obigen Definition  $A = \{x_0\}$  gilt, dann wird  $\partial I^k/\partial'I^k$  auf  $x_0$  abgebildet. Nach der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie in Satz 1.72 entsprechen solche Abbildungen  $f: I^k/\partial'I^k \rightarrow (X, x_0)$  genau den Abbildungen aus Definition 3.1. Es folgt

$$\pi_k(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_k(X, x_0)$$

sogar für alle  $k \geq 0$ , aber für  $k = 1$  fehlt der linken Seite die Gruppenstruktur.

3.13. BEMERKUNG. Nach Übung 3.105 gibt es für alle  $k \geq 1$  einen Homöomorphismus

$$(I^k/\partial'I^k, \partial I^k/\partial'I^k) \cong (D^k, S^{k-1}).$$

Dabei liegt der Basispunkt auf dem Rand  $S^{k-1}$  der Einheitskreisscheibe. Wir erhalten also für  $k \geq 1$  natürliche Bijektionen

$$\pi_k(X, A, x_0) = [(D^k, S^{k-1}, *), (X, A, x_0)].$$

3.14. PROPOSITION. *Die relativen Homotopiegruppen haben folgende Eigenschaften.*

- (1) Für alle  $k \geq 0$  ist  $\pi_k: \mathcal{H}\text{Pair}_+ \rightarrow \text{Set}_+$  ein Funktor.
- (2) Für alle  $k \geq 2$  ist  $\pi_k: \mathcal{H}\text{Pair}_+ \rightarrow \text{Grp}$  ein Funktor.
- (3) Für alle  $k \geq 3$  ist  $\pi_k: \mathcal{H}\text{Pair}_+ \rightarrow \text{Ab}$  ein Funktor.

BEWEIS. Völlig analog zum Beweis von Proposition 3.5, wobei wir aber, da die Variable  $t_k$  eine Sonderrolle spielt,  $k \geq 2$  in (2) und  $k \geq 3$  in (3) fordern müssen.  $\square$

3.15. PROPOSITION. *Für alle  $k \geq 1$  liefert jede relative Homotopieklasse  $[\gamma]$  von Pfaden in  $A$  von  $x_0$  nach  $x_1$  einen Isomorphismus*

$$[\gamma]: \pi_k(X, A, x_1) \rightarrow \pi_k(X, A, x_0) \quad \text{mit} \quad [\gamma].[f] = [\gamma.f],$$

$$\text{wobei} \quad \gamma.f = \begin{cases} f(2t_2 - \frac{1}{2}, \dots, 2t_{k-1} - \frac{1}{2}, 2t_k) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t_1, \dots, t_{k-1} \leq \frac{3}{4}, \quad t_k \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(2 - 4 \max\{|t_1 - \frac{1}{2}|, \dots, |t_{k-1} - \frac{1}{2}|, |\frac{t_k}{2}|\}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Insbesondere wirkt die Fundamentalgruppe  $\pi_1(A)$  durch Gruppenautomorphismen auf  $\pi_k(X, A)$ .*

BEWEIS. Analog zum Beweis von Proposition 3.7.  $\square$

3.16. BEMERKUNG. Für  $k \geq 1, \ell \geq 0$  gilt (Übung 3.108, siehe Bemerkung 3.10)

$$\pi_k(\Omega^\ell(X), \Omega^\ell(A)) \cong \pi_{k+\ell}(X, A).$$

Für  $k = 0$  ist die Behauptung falsch, wie man am Beispiel  $(D^1, S^0)$  mit  $\ell = 1$  sehen kann.

Wir definieren exakte Sequenzen hier in  $\text{Set}_+$ . Sei  $f: (A, a_0) \rightarrow (B, b_0)$  eine punktierte Abbildung, dann definieren wir ihren *Kern* als

$$\ker f = f^{-1}\{b_0\} \subset A.$$

Außerdem sei  $0 = \text{pt} = \{*\}$  eine feste einpunktige Menge. Mit dieser Notation sieht alles genauso aus wie in der Kategorie der Gruppen oder  $R$ -Moduln, die wir später noch betrachten werden. Allerdings folgt in  $\text{Set}_+$  aus  $\ker f = \{*\}$  noch nicht, dass  $f$  injektiv ist.

3.17. DEFINITION. Eine *Sequenz* in  $\text{Set}_+$  ist eine Familie  $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$  punktierter Abbildungen zwischen punktierten Mengen. Eine *Sequenzabbildung* von  $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})$  nach  $(g_i: N_i \rightarrow N_{i-1})$  vom Grad  $d \in \mathbb{Z}$  ist eine Familie punktierter Abbildungen  $(k_i: M_i \rightarrow N_{i+d})_{i \in \mathbb{Z}}$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & M_{i-1} & \xleftarrow{f_i} & M_i & \xleftarrow{f_{i+1}} & M_{i+1} & \longleftarrow & \cdots \\ & & k_{i-1} \downarrow & & k_i \downarrow & & k_{i+1} \downarrow & & \\ \cdots & \longleftarrow & N_{i+d-1} & \xleftarrow{g_{i+d}} & N_{i+d} & \xleftarrow{g_{i+d+1}} & N_{i+d+1} & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

kommutiert, das heißt, es gilt  $k_{i-1} \circ f_i = g_{i+d} \circ k_i$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ .

Eine Sequenz  $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})$  heißt *exakt an der Stelle  $M_i$* , wenn  $\ker f_i = \text{im } f_{i+1} \subset M_i$  gilt. Sie heißt (*lange*) *exakte Sequenz*, wenn sie an allen Stellen exakt ist. Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longleftarrow A' \longleftarrow A \longleftarrow A'' \longleftarrow 0.$$

Völlig analog definieren wir Sequenzen und exakte Sequenzen in den Kategorien  $\text{Grp}$  und  $\text{Ab}$ .

Kurze exakte Sequenzen denken wir uns nach links und rechts fortgesetzt durch  $0 = \{*\}$  beziehungsweise durch die einelementige Gruppe. Wir werden Diagramme zu Sequenzen teils wie oben mit Pfeilen von rechts nach links darstellen, teils aber auch die Richtung der Pfeile umdrehen:

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

3.18. BEMERKUNG. Wenn in einer exakten Sequenz von Gruppen eine der Abbildungen konstant auf  $e$  abbildet, dann erlaubt es Rückschlüsse über die benachbarten Gruppen und Abbildungen, siehe Übung 3.109. Das passiert insbesondere dann, wenn eine der Gruppen trivial ist.

Es sei  $(X, A, x_0)$  ein punktiertes Paar. Dann haben wir natürliche Inklusionen in  $\mathcal{Top}_+$  beziehungsweise  $\mathcal{Pair}_+$ ,

$$i: (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0) \quad \text{und} \quad j: (X, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (X, A, \{x_0\}) .$$

3.19. SATZ (Homotopiesequenz eines Paares). *Es sei  $(X, A, x_0)$  ein punktiertes Paar. Für  $k \geq 1$  und  $[f] \in \pi_k(X, A, x_0)$  mit  $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$  definiere  $\partial[f] = [\partial f] \in \pi_{k-1}(A, x_0)$  durch*

$$\partial f = f|_{(I^{k-1} \times \{0\})/(\partial I^{k-1} \times \{0\})}: I^{k-1}/\partial I^{k-1} \rightarrow A .$$

Dann erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \{*\} \longleftarrow \pi_0(X, A) \xleftarrow{j_*} \pi_0(X) \xleftarrow{i_*} \pi_0(A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X, A) \xleftarrow{j_*} \pi_1(X) \xleftarrow{i_*} \pi_1(A) \xleftarrow{\partial} \cdots$$

Die Gruppe  $\pi_1(A, x_0)$  operiert durch Sequenzabbildungen, wobei sie auf  $\pi_0(X)$ ,  $\pi_0(A)$  und  $\pi_0(X, A)$  trivial operiere.

Von rechts kommend bis  $\pi_1(X)$  handelt es sich dabei um eine exakte Sequenz von Gruppen, bis  $\pi_2(X)$  sogar um eine exakte Sequenz abelscher Gruppen. Die Abbildung  $\partial$  nennt man auch den *Verbindungshomomorphismus*. Die Sequenz setzt sich durch  $\{*\}$  unendlich weit nach links fort. Eine Verallgemeinerung für Tripel findet sich in Übung 3.112.

BEWEIS. Zunächst einmal ist die Einschränkung  $\partial f$  wie gefordert eine punktierte Abbildung. Außerdem ist  $\partial$  mit punktierten Homotopien von Abbildungen von Paaren verträglich und respektiert die Gruppenstruktur, falls  $k \geq 2$ . Also ist die Abbildung  $\partial: \pi_k(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}(A, x_0)$  wohldefiniert.

Sei  $F: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, A, y_0)$  eine Abbildung punktierter Paare, dann induziert  $F$  eine Sequenzabbildung von der Sequenz des Paares  $(X, A, x_0)$  in die des Paares  $(Y, A, y_0)$ . Somit ist die Sequenz natürlich, das heißt,  $i_*$ ,  $j_*$  und  $\partial$  sind natürliche Transformationen zwischen Funktoren  $\mathcal{HPair}_+ \rightarrow \mathcal{Set}_+$  im Sinne von Definition 3.3.

Schließlich sind die Gruppenwirkungen aus den Propositionen 3.7 und 3.15 ebenfalls mit  $i_*$ ,  $j_*$  und  $\partial$  verträglich; dabei wirkt  $g \in \pi_1(A)$  als  $i_*g$  auf  $\pi_k(X)$ .

Zur Exaktheit sind sechs Inklusionen zu beweisen. Wir überprüfen nur zwei davon, der Rest ist Übung 3.110. Zu einer Abbildung  $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$  wie in Definition 3.1 oder  $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$  wie in Definition 3.11 bezeichne dabei  $\bar{f}$  die entsprechende Abbildung auf  $I^k$ . Wenn wir umgekehrt nur  $\bar{f}$  angeben, so lässt sich mit der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie aus Satz 1.72 (2) die Stetigkeit der zugehörigen Abbildung  $f$  überprüfen. Im Folgenden sei stets  $k \geq 1$ .

„im  $j_* \subset \ker \partial$ “. Gegeben sei  $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ . Da  $I^{k-1} \times \{0\} \subset \partial I^k$ , ist  $\partial(j \circ \bar{f}) = f|_{I^{k-1} \times \{0\}}$  die konstante Abbildung auf den Basispunkt, also  $\partial j_*[f] = 0 \in \pi_{k-1}(A)$ .

„ $\ker \partial \subset \text{im } j_*$ “. Es sei  $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$  gegeben, und es sei  $h: (I^{k-1}/\partial I^{k-1}) \times I \rightarrow A$  eine Nullhomotopie von  $\partial f$  in  $A$ . Betrachte  $\bar{g}: I^k \rightarrow X$  mit

$$\bar{g}(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \bar{h}(t_1, \dots, t_{k-1}, 1 - 2t_k) & \text{für } t_k \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \bar{f}(t_1, \dots, t_{k-1}, 2t_k - 1) & \text{für } t_k \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Betrachte die Homotopie  $\bar{k}: I^k \times I \rightarrow X$  zwischen  $j \circ \bar{g}$  und  $\bar{f}$  mit

$$\bar{k}(t_1, \dots, t_k, s) = \bar{g}\left(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{s + (2-s)t_k}{2}\right) .$$

Da  $\bar{g}$  ganz  $\partial'I^k$  auf  $x_0$  abbildet, bildet sie  $\partial'I^k \times I$  auf  $x_0$  ab. Da  $h$  Werte in  $A$  annimmt, erhalten wir

$$\bar{k}(t_1, \dots, t_{k-1}, 0, s) = \bar{g}\left(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{s}{2}\right) = \bar{h}(t_1, \dots, t_{k-1}, 1 - s) \in A.$$

Somit  $j_*[g] = [f] \in \pi_k(X, A)$ . □

Das folgende Lemma ist sehr hilfreich im Umgang mit exakten Sequenzen.

3.20. LEMMA (Vierer- und Fünferlemma). *Gegeben sei eine Sequenzabbildung*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longleftarrow & B & \longleftarrow & C & \longleftarrow & D & \longleftarrow & E \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & d \downarrow & & e \downarrow \\ A' & \longleftarrow & B' & \longleftarrow & C' & \longleftarrow & D' & \longleftarrow & E' \end{array}$$

in  $\text{Set}_+$ . Beide Zeilen seien exakt. Außerdem seien  $B', C, C'$  Gruppen und die Abbildungen dazwischen Gruppenhomomorphismen. Dann gilt:

- (1) seien  $b, d$  surjektiv und  $a$  injektiv. Dann ist  $c$  surjektiv;
- (2) seien  $b, d$  injektiv und  $e$  surjektiv. Dann ist  $c$  injektiv;
- (3) seien  $b, d$  bijektiv,  $a$  injektiv und  $e$  surjektiv. Dann ist  $c$  bijektiv.

BEWEIS. Man beweist (1) und (2) durch Diagrammjagd. Es folgt (3). □

3.21. FOLGERUNG. *Es sei  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung von Paaren. Wenn  $f$  und  $f|_A$  Homotopieäquivalenzen sind, dann ist  $f_*: \pi_k(X, A) \rightarrow \pi_k(Y, B)$  Isomorphismus für alle  $k$ .* □

### 3.c. Faserungen

Die lange exakte Sequenz aus Satz 3.19 ist in der vorliegenden Form noch nicht wirklich hilfreich, um Homotopiegruppen zu bestimmen. Hier formulieren wir sie um in eine lange exakte Sequenz für Serre-Faserungen. Später werden wir noch eine (nicht so lange, aber noch wichtigere) exakte Sequenz für Kofaserungen kennenlernen.

3.22. DEFINITION. Eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  hat die *Homotopieliftungseigenschaft* bezüglich eines Raumes  $X$ , wenn zu jeder Abbildung  $\tilde{f}: X \rightarrow E$  und jeder Abbildung  $h: X \times I \rightarrow B$  mit

$$h(\cdot, 0) = p \circ \tilde{f}: X \rightarrow B$$

ein Lift  $\tilde{h}: X \times I \rightarrow E$  existiert mit

$$p \circ \tilde{h} = h \quad \text{und} \quad \tilde{h}(\cdot, 0) = \tilde{f}: X \rightarrow E.$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \times\{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Die Abbildung  $p$  heißt *Serre-Faserung*, wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich  $X = I^k$  für alle  $k \geq 0$  besitzt. Sie heißt *Hurewicz-Faserung*, wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft sogar bezüglich aller topologischen Räume  $X$  besitzt.

Wenn die Abbildung  $p$  überdies punktiert ist, nennen wir sie eine punktierte Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserung, und  $p^{-1}(b_0) \subset E$  ihre *Faser*.

3.23. BEMERKUNG. Nach Übung 3.113 sind die Paare  $(I^k, I^{k-1} \times \{0\})$  und  $(I^k, \partial'I^k)$  homöomorph. Also ist eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  genau dann eine Serre-Faserung, wenn für alle  $k \geq 1$  und alle Abbildungen  $f: I^k \rightarrow B$  und  $\tilde{g}: \partial'I^k \rightarrow E$  mit

$$f|_{\partial'I^k} = p \circ \tilde{g}: \partial'I^k \rightarrow B$$

eine Abbildung  $\tilde{f}: I^k \rightarrow E$  existiert mit

$$p \circ \tilde{f} = f \quad \text{und} \quad \tilde{f}|_{\partial'I^k} = \tilde{g}.$$

Das gleiche geht selbstverständlich auch, wenn man eine andere offene Seite aus  $\partial'I^k$  entfernt.

$$\begin{array}{ccc} \partial'I^k & \xrightarrow{\tilde{g}} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ I^k & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

3.24. PROPOSITION. *Es sei  $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  eine Serre-Faserung, und es sei  $F = p^{-1}(b_0) \subset E$ . Dann induziert  $p$  für alle  $k > 0$  einen Isomorphismus*

$$p_*: \pi_k(E, F, e_0) \rightarrow \pi_k(B, \{b_0\}, b_0) \cong \pi_k(B, b_0).$$

Für  $k = 0$  ist diese Aussage falsch: es kann durchaus Wegzusammenhangskomponenten von  $B$  geben, deren Urbild leer ist.

BEWEIS. Zur Surjektivität betrachte eine punktierte Abbildung  $f: I^k/\partial'I^k \rightarrow (B, b_0)$ . Die Abbildung  $\tilde{g}: \partial'I^k \rightarrow \{e_0\} \subset E$  sei konstant. Dann liefert Bemerkung 3.23, angewandt auf  $\tilde{f}: I^k \rightarrow B$ , das gesuchte Urbild  $\tilde{f}$ , denn  $\tilde{f}|_{\partial'I^k} = \tilde{g}$  ist die konstante Abbildung, und auf der „offenen Seite“  $I^{k-1} \times \{0\}$  nimmt  $\tilde{f}$  Werte in  $F = p^{-1}(e_0)$  an.

Zur Injektivität seien  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1: (I^k/\partial'I^k, \partial'I^k/\partial'I^k) \rightarrow (E, F)$  mit  $p_*[\tilde{f}_0] = p_*[\tilde{f}_1]$  gegeben. Dann bilden  $p \circ \tilde{f}_i$  den gesamten Rand nach  $b_0$  ab. Es sei  $h: (I^k/\partial'I^k) \times I$  eine punktierte Homotopie zwischen  $p \circ \tilde{f}_0$  und  $p \circ \tilde{f}_1$  in  $B$ . Definiere  $\tilde{g}: \partial'I^{k+1} \setminus ((0, 1)^{k-1} \times \{0\} \times (0, 1)) \rightarrow E$  durch

$$\tilde{g}(t_1, \dots, t_{k+1}) = \begin{cases} \tilde{f}_i(t_1, \dots, t_k) & \text{falls } t_{k+1} = i \in \{0, 1\}, \text{ und} \\ e_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, siehe Abbildung 3.2. Nach Bemerkung 3.23, angewandt auf  $\tilde{h}$ , existiert eine Abbildung  $\tilde{h}$ , die  $\tilde{g}$  fortsetzt, und auf der „offenen Seite“  $t_k = 0$  Werte in  $F$  annimmt, da  $\tilde{h}$  dort auf  $b_0$  abbildet. Also ist  $\tilde{h}$  eine punktierte Homotopie von Paaren zwischen  $\tilde{f}_0$  und  $\tilde{f}_1$ , was zu zeigen war.  $\square$

Es ist nicht ungewöhnlich, dass Injektivität ähnlich wie Surjektivität bewiesen wird: „Injektivität ist Surjektivität für Homotopien“.

3.25. SATZ (Homotopiesequenz für Serre-Faserungen). *Es sei  $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  eine punktierte Serre-Faserung, und es sei  $i: F = p^{-1}(b_0) \rightarrow E$  die Inklusion der Faser. Dann existiert für alle  $k \geq 1$  ein Verbindungshomomorphismus  $\partial: \pi_k(B) \rightarrow \pi_{k-1}(F)$ , so dass die Sequenz*

$$\pi_0(B) \xleftarrow{p_*} \pi_0(E) \xleftarrow{i_*} \pi_0(F) \xleftarrow{\partial} \pi_1(B) \xleftarrow{p_*} \pi_1(E) \longleftarrow \dots$$

exakt und natürlich ist.

Im Gegensatz zur Homotopiesequenz 3.19 eines Paares bricht diese Sequenz bei  $\pi_0(B)$  ab.

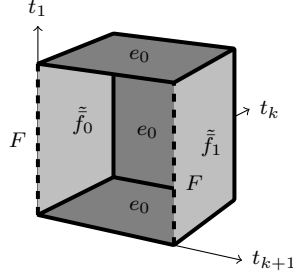


ABBILDUNG 3.2. Der Definitionsbereich von  $\tilde{g}$

BEWEIS. Mit Proposition 3.24 erhalten wir eine Sequenzabbildung

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(F, e_0) & \xleftarrow{\partial'} & \pi_k(E, F, e_0) & \xleftarrow{j_*} & \pi_k(E, e_0) & \longleftarrow & \dots \\ & & \parallel & & p_* \downarrow \cong & & \parallel & & \\ \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(F, e_0) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(B, b_0) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(E, e_0) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

hierbei sei  $\partial'$  der Verbindungshomomorphismus aus Satz 3.19. In der Tat kommutiert das rechte Quadrat, da  $p \circ j = \text{id}_{(B, \{b_0\})} \circ p$ . Das linke Quadrat nehmen wir als Definition für den Verbindungshomomorphismus  $\partial = \partial' \circ (p_*)^{-1}$ . Da die obere Sequenz exakt ist, ist es die untere auch.

Da nicht notwendigerweise  $\pi_0(E, F) \cong \pi_0(B)$  gilt, bleibt Exaktheit bei  $\pi_0(E, e_0)$  zu prüfen. Sei zunächst  $f: S^0 \rightarrow (F, e_0)$  gegeben, dann bildet  $p \circ i \circ f$  konstant auf  $b_0$  ab, also gilt  $\text{im } i_* \subset \ker p_*$ . Sei umgekehrt  $f: S^0 \rightarrow (E, e_0)$  mit  $[f] \in \ker p_*$  gegeben, dann existiert eine punktierte Nullhomotopie von  $p \circ f$  in  $B$ , also ein Pfad von  $p(f(0))$  nach  $b_0$ . Mit der Homotopieliftungseigenschaft erhalten wir einen Pfad von  $f(0)$  nach  $F$ , also eine punktierte Homotopie von  $f$  zu einem Element in  $\text{im } i_*$ .

Zur Natürlichkeit betrachte ein kommutatives Diagramm punktierter Serre-Faserungen

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & D \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Seien  $F = p^{-1}(b_0)$  und  $G = q^{-1}(c_0)$  die Fasern, dann bildet  $g|_F$  die Faser  $F$  auf  $G$  ab. Betrachte jetzt die zugehörigen langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(E) & \xleftarrow{i_*} & \pi_{k-1}(F) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(B) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(E) & \longleftarrow & \dots \\ & & g_* \downarrow & & g|_{F*} \downarrow & & f_* \downarrow & & g_* \downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(D) & \xleftarrow{i_*} & \pi_{k-1}(G) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(C) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(D) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Die äußeren Quadrate kommutieren, da die entsprechenden punktierten Abbildungen ebenfalls kommutieren. Nach Definition des Verbindungshomomorphismus kommutiert das innere Quadrat, da die Sequenz aus Satz 3.19 natürlich ist.  $\square$

3.26. FOLGERUNG (aus dem Liftungssatz 2.58). *Es sei  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Überlagerung. Dann ist die Abbildung*

$$p_* = \pi_k p: \pi_k(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_k(X, x_0)$$

*ein Isomorphismus für alle  $k \geq 2$ . Außerdem haben wir eine exakte Sequenz*

$$\pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(\tilde{X}) \longleftarrow \pi_0(p^{-1}(x_0)) \longleftarrow \pi_1(X) \xleftarrow{\pi_1 p} \pi_1(\tilde{X}) \longleftarrow 0.$$

Die Injektivität von  $\pi_1 p$  kennen wir bereits aus Satz 2.56.

BEWEIS. Nach dem Homotopieliftungssatz 2.27 sind alle Überlagerungen Hurewicz-Faserungen, also erst recht Serre-Faserungen. Dabei ist die Faser  $F = p^{-1}(x_0)$  einer Überlagerung diskret, und  $S^k$  ist zusammenhängend für  $k \geq 1$ , folglich sind alle stetigen punktierten Abbildungen  $S^k \rightarrow F$  konstant. Es folgt  $\pi_k(F) = 0$  für alle  $k \geq 1$ . Mit Satz 3.25 und Bemerkung 3.18 folgen die Behauptungen.  $\square$

3.27. BEISPIEL. Die universelle Überlagerung von  $S^1$  ist  $\mathbb{R}$  nach Beispiel 2.26, also zusammenziehbar. Wegen den Bemerkungen 3.2 (1) und 3.6, Satz 2.28 und Folgerung 3.26 gilt daher

$$\pi_k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 1, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.28. BEISPIEL. Es sei  $E = B \times F$  ein Produkt punktierter Räume und  $p: E \rightarrow B$  die Projektion auf den ersten Faktor. Dann ist  $p$  nach Übung 3.114 eine Hurewicz-, also auch eine Serre-Faserung. Es gilt  $\pi_k(E) = \pi_k(B) \times \pi_k(F)$ , siehe Übung 3.106. Also hat die Homotopiesequenz die Form

$$\dots \longleftarrow \pi_{k-1}(F) \xleftarrow{\partial} \pi_k(B) \xleftarrow{p_*} \underbrace{\pi_k(B) \times \pi_k(F)}_{\cong \pi_k(E)} \xleftarrow{i_*} \pi_k(F) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(B) \longleftarrow \dots$$

Die Abbildung  $p_*$  ist die Projektion auf  $\pi_k(B)$ , und  $i_*(a) = (0, a) \in \pi_k(B) \times \pi_k(F)$  für alle  $a \in \pi_k(F)$ . Die Sequenz ist offensichtlich bei  $\pi_k(E)$  exakt. Da  $p_*$  surjektiv und  $i_*$  injektiv ist, folgt aus der Exaktheit an den anderen Stellen, dass

$$\ker \partial = \text{im } p_* = \pi_k(B) \quad \text{und} \quad \text{im } \partial = \ker i_* = 0,$$

also ist der Verbindungshomomorphismus  $\partial = 0$  für alle  $k$ .

3.29. BEMERKUNG. Allgemeiner sei  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung. Unter einem *Schnitt* von  $p$  verstehen wir ein Rechtsinverses von  $p$ , also eine Abbildung  $s: B \rightarrow E$  mit  $p \circ s = \text{id}_B$ . Mit anderen Worten ist  $\text{im } s \subset E$  in diesem Fall ein Retrakt von  $E$ . Im obigen Beispiel  $E = B \times F$  liefert jeder Punkt  $f \in F$  einen Schnitt  $s_f$  mit  $s_f(b) = (b, f)$ .

Wenn  $p$  einen Schnitt besitzt, gibt es in der Homotopiesequenz 3.25 ein Rechtsinverses  $s_*$  von  $p_*$ . Wie wir in Übung 5.87 sehen werden, hat die Homotopiesequenz 3.25 dann genau die gleiche Gestalt wie im obigen Beispiel. Also können wir  $\partial$  als *Hindernis* gegen die Existenz eines Schnittes auffassen.

3.30. DEFINITION. Ein *Faserbündel* mit *typischer Faser*  $F$  ist eine stetige Abbildung  $p: E \rightarrow B$ , so dass jeder Punkt  $b$  eine Umgebung  $U \subset B$  besitzt, für die ein Homöomorphismus  $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ p \searrow & \cong & \swarrow \text{pr}_U \\ & U & \end{array}$$

kommutiert, wobei  $\text{pr}_U$  die Projektion auf den ersten Faktor bezeichne. Dann heißt  $E$  der *Totalraum*,  $B$  die *Basis*, und  $\varphi$  eine *lokale Trivialisierung* oder *Bündelkarte* von  $p: E \rightarrow B$ .

Ein Produkt wie in Beispiel 3.28 heißt auch *triviale Faserbündel*, daher die Terminologie.

3.31. PROPOSITION. *Es sei  $p: E \rightarrow B$  eine Abbildung, und jeder Punkt  $b \in B$  besitze eine Umgebung  $U \subset B$ , so dass  $p: p^{-1}(U) \rightarrow U$  eine Serre-Faserung ist. Dann ist  $p$  ebenfalls eine Serre-Faserung.*

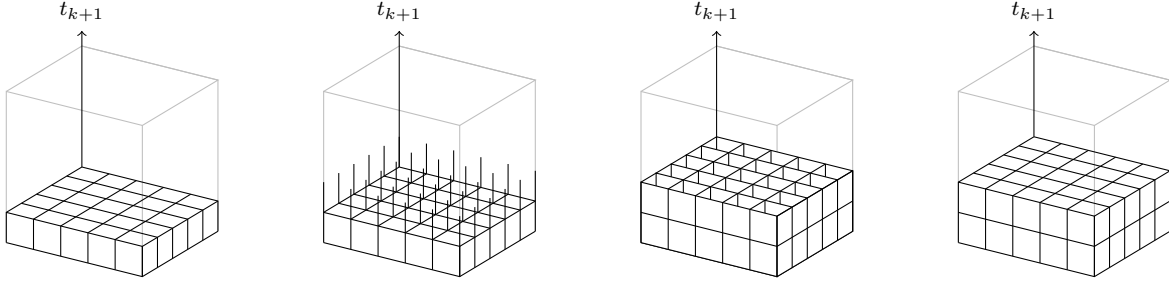


ABBILDUNG 3.3. Schichtweise Konstruktion von  $\tilde{h}$

3.32. FOLGERUNG. Jedes Faserbündel  $p: E \rightarrow B$  ist eine Serre-Faserung.  $\square$

BEWEIS VON PROPOSITION 3.31. Es sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $B$  durch Mengen  $U$ , über denen  $p$  eine Serre-Faserung ist. Es sei  $X = I^k$  für  $k \geq 0$ , und  $h: X \times I \rightarrow B$  und  $\tilde{f}: X \rightarrow E$  seien Abbildungen wie in Definition 3.22. Dann ist  $\{h^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$  eine offene Überdeckung von  $I^{k+1}$ . Nach dem Satz 1.55 von Lebesgue können wir  $I^{k+1}$  für ein geeignetes  $N \gg 1$  in  $N^{k+1}$  Würfel der Kantenlänge  $\frac{1}{N}$  unterteilen, so dass jeder dieser Würfel ganz in einer der Mengen  $h^{-1}(U)$  mit  $U \in \mathcal{U}$  enthalten ist.

Um  $\tilde{h}$  zu konstruieren, setzen wir  $\tilde{f}$  von  $I^k \times \{0\}$  Schicht für Schicht auf  $I^{k+1}$  fort. Wir konstruieren in jeder Schicht  $\tilde{h}$  zunächst auf den Strecken über allen Ecken, dann auf den Quadraten über allen Kanten, und so weiter, und zum Schluss auf den  $k+1$ -dimensionalen Würfeln selbst, siehe Abbildung 3.3. Dabei müssen wir in jedem Schritt von einer Menge der Form  $\partial I^i$  auf  $I^i$  fortsetzen. Dazu benutzen wir Bemerkung 3.23 und die Tatsache, dass wir stets über einer der offenen Mengen  $U \subset B$  arbeiten, für die  $p^{-1}(U) \rightarrow U$  eine Serre-Faserung ist.  $\square$

3.33. BEISPIEL. Der komplex projektive Raum  $\mathbb{C}P^n$  ist definiert als Quotientenraum

$$\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

wobei  $(z_0, \dots, z_n) \sim (w_0, \dots, w_n)$  genau dann, wenn es  $a \in \mathbb{C}^\times$  mit  $a \cdot (z_0, \dots, z_n) = (w_0, \dots, w_n)$  gibt, siehe Übung 1.129. Man schreibt für die Äquivalenzklassen auch gern  $(z_0 : \dots : z_n) = q(z_0, \dots, z_n)$ . Der  $\mathbb{C}P^n$  wird überdeckt von den  $n+1$  Teilmengen  $U_0, \dots, U_n$  mit

$$U_k = \{(z_0 : \dots : z_n) \mid z_k \neq 0\} = \text{im}(q|_{\mathbb{C}^k \times \{0\} \times \mathbb{C}^{n-k}}).$$

Wir betrachten die sogenannte Hopf-Faserung

$$p: S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{q} \mathbb{C}P^n.$$

Über jedem  $U_k$  erhalten wir als lokale Trivialisierung den Homöomorphismus

$$\varphi: p^{-1}(U_k) \rightarrow U_k \times S^1 \quad \text{mit} \quad \varphi(z_0, \dots, z_n) = \left( (z_0 : \dots : z_n), \frac{z_k}{|z_k|} \right)$$

und 
$$\varphi^{-1}((z_0 : \dots : z_n), w) = \frac{w(z_k^{-1}z_0, \dots, 1, \dots, z_k^{-1}z_n)}{\|(z_k^{-1}z_0, \dots, 1, \dots, z_k^{-1}z_n)\|}.$$

Also ist die Hopf-Faserung ein Faserbündel mit typischer Faser  $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$ .

Es gilt  $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$  (Riemannsche Zahlenkugel). Also erhalten wir als Spezialfall insbesondere die klassische Hopf-Faserung  $S^3 \rightarrow S^2$  mit Faser  $S^1$ . Die zugehörige exakte Homotopiesequenz 3.25 hat die Form

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(S^1)}_{=0 \text{ für } k \neq 2} \xleftarrow{\partial} \pi_k(S^2) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^3) \xleftarrow{i_*} \underbrace{\pi_k(S^1)}_{=0 \text{ für } k \neq 1} \longleftarrow \cdots$$

Also gilt  $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3)$  für alle  $k \geq 3$ .



3.34. BEISPIEL. Der *quaternionisch projektive Raum*  $\mathbb{H}P^n$  ist definiert als Quotient

$$\mathbb{H}P^n = (\mathbb{H}P^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

wobei  $(q_0, \dots, q_n) \sim (r_0, \dots, r_n)$  genau dann, wenn es  $a \in \mathbb{H}^\times$  mit  $a \cdot (q_0, \dots, q_n) = (r_0, \dots, r_n)$  gibt. Mit den gleichen Argumenten wie oben erhalten wir die *quaternionische Hopf-Faserung*

$$p: S^{4n+3} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{H}P^n$$

als Faserbündel mit typischer Faser  $S^3 \subset \mathbb{H}^\times$ .

Es gilt  $S^4 \cong \mathbb{H}P^1$ , also existiert ein Faserbündel  $p: S^7 \rightarrow S^4$  mit typischer Faser  $S^3$ . Die zugehörige Homotopiesequenz hat die Gestalt

$$\dots \longleftarrow \pi_{k-1}(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_k(S^4) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^7) \xleftarrow{i_*} \pi_k(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(S^4) \longleftarrow \dots$$

### 3.d. Der Ausschneidungssatz

Für kleine  $k$  ist es manchmal möglich, die  $k$ -te Homotopiegruppe eines Raumes aus den  $k$ -ten Homotopien von Unterräumen (genauer, von Unterraum-Paaren) zusammensetzen, ähnlich wie im Satz 2.42 von Seifert und van Kampen. Einen direkter Vergleich mit diesem Ergebnis nehmen wir später vor.

3.35. DEFINITION. Ein Raum  $X \neq \emptyset$  heißt  *$n$ -zusammenhängend*, wenn  $\pi_k(X, x) = 0$  für alle  $x \in X$  und alle  $0 \leq k \leq n$ .

Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $X \neq \emptyset$  heißt  *$n$ -zusammenhängend*, wenn für alle  $x \in X$  die induzierte Abbildung  $f_*: \pi_k(X, x) \rightarrow \pi_k(Y, f(x))$  ein Isomorphismus ist für alle  $0 \leq k < n$  und surjektiv für  $k = n$ .

Ein Paar  $(X, A)$  mit  $A \neq \emptyset$  heißt  *$n$ -zusammenhängend*, wenn die Inklusion  $A \hookrightarrow X$  eine  $n$ -zusammenhängende Abbildung ist.

Eine Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Paaren mit  $A, B \neq \emptyset$  heißt  *$n$ -zusammenhängend*, wenn für alle  $x \in A$  und alle  $0 \leq k < n$  die induzierte Abbildung  $f_*: \pi_k(X, A, x) \rightarrow \pi_k(Y, B, f(x))$  ein Isomorphismus ist, und eine Surjektion für  $k = n$ .

Für einen Raum bedeutet 0-zusammenhängend das gleiche wie wegzusammenhängend, siehe Bemerkung 3.2 (1), und 1-zusammenhängend bedeutet wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend nach Bemerkung 3.2 (2). Ein Paar  $(X, A)$  ist 0-zusammenhängend, wenn jede Wegzusammenhangskomponente von  $X$  einen Punkt von  $A$  enthält.

3.36. BEMERKUNG. Für einen Raum  $X$  sind äquivalent:

- (1) der Raum  $X$  ist  $n$ -zusammenhängend;
- (2) für alle  $k \leq n$  lässt sich jede Abbildung  $S^k \rightarrow X$  zu einer Abbildung  $D^{k+1} \rightarrow X$  fortsetzen;
- (3) für alle  $k \leq n$  lässt sich jede Abbildung  $\partial I^{k+1} \rightarrow X$  zu einer Abbildung  $I^{k+1} \rightarrow X$  fortsetzen.

Die Äquivalenz von (2) und (3) ist offensichtlich, da die Paare  $(D^{k+1}, S^k)$  und  $(I^{k+1}, \partial I^{k+1})$  homöomorph sind.

Zur Äquivalenz von (1) und (2) sei  $f: S^k = I^k / \partial I^k \rightarrow X$  gegeben. Eine Nullhomotopie  $h$  von  $f$  ist eine Fortsetzung von  $f$  auf  $I^{k+1} / \partial' I^{k+1}$  und umgekehrt, und das Paar  $(I^{k+1} / \partial' I^{k+1}, I^k / \partial I^k)$  ist homöomorph zu  $(D^{k+1}, S^k)$ .

3.37. BEMERKUNG. Für ein Paar  $(X, A)$  und  $n \geq 0$  sind äquivalent:

- (1) das Paar  $(X, A)$  ist  $n$ -zusammenhängend;
- (2) für alle  $k \leq n$  und alle  $x \in A$  gilt  $\pi_k(X, A, x) = 0$ ;

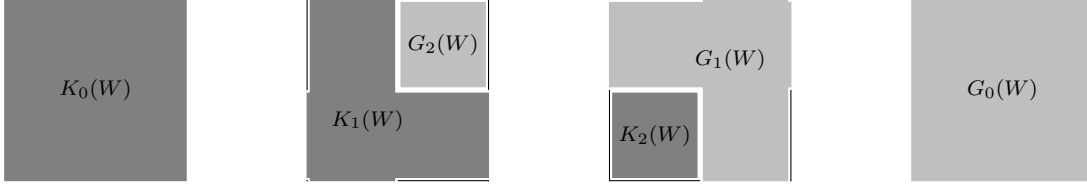


ABBILDUNG 3.4. Die Mengen  $K_r(W)$  und  $G_r(W)$

- (3) für alle  $1 \leq k \leq n$  ist jede Abbildung  $(I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, A)$  als Abbildung von Paaren homotop zu einer Abbildung  $(I^k, \partial I^k) \rightarrow (A, A)$ , und jeder Punkt in  $X$  lässt sich durch einen Weg mit  $A$  verbinden;
- (4) für alle  $k \leq n$  lässt sich jede Abbildung  $(\partial' I^{k+1}, \partial I^k \times \{0\}) \rightarrow (X, A)$  zu einer Abbildung  $(I^{k+1}, I^k \times \{0\}) \rightarrow (X, A)$  fortsetzen.

Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares  $(X, A)$ .

Zu (2)  $\Rightarrow$  (3) überlegt man sich, dass die Paare  $(I^k, \partial I^k)$ ,  $(D^k, S^{k-1})$  und  $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k)$  paarweise homöomorph sind.

Wie in Bemerkung 3.23 existiert ein Homöomorphismus  $g: I^{k+1} \rightarrow I^{k+1}$ , der  $\partial' I^{k+1}$  auf  $I^k \times \{0\}$  abbildet und umgekehrt. Zu (3)  $\Rightarrow$  (4) sei  $h: (I^{k+1}, \partial' I^{k+1}) \rightarrow (X, A)$  die Homotopie aus (3) zu  $f \circ g^{-1}|_{I^k \times \{0\}}$ . Dann ist  $h \circ g$  die gesuchte Fortsetzung.

Für (4)  $\Rightarrow$  (2) betrachte  $f: (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \rightarrow (X, A)$ . Da das Paar  $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k)$  zu  $(\partial' I^{k+1}, \partial I^k \times \{0\})$  homöomorph ist, ist  $f$  relativ zum Rand  $\partial I^k/\partial' I^k$  homotop zu einer Abbildung  $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \rightarrow (A, A)$ , liegt also im Bild von  $\pi_k(A, A, x) = 0$ .

**3.38. SATZ (Ausschneidungssatz, Blakers-Massey).** *Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $U, V \subset X$  offen mit  $X = U \cup V$  und  $U \cap V \neq \emptyset$ . Das Paar  $(U, U \cap V)$  sei  $p$ -zusammenhängend, und  $(V, U \cap V)$  sei  $q$ -zusammenhängend mit  $p, q \geq 0$ , dann ist  $i: (U, U \cap V) \rightarrow (X, V)$  eine  $(p+q)$ -zusammenhängende Abbildung von Paaren.*

Der Name rührt daher, dass wir die abgeschlossene Menge  $V \setminus U$  aus  $X$  „ausschneiden“ können, ohne die ersten  $p+q-1$  Homotopiegruppen zu verändern. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir später einige nichttriviale Homotopiegruppen ausrechnen und viele wichtige Resultate beweisen.

Wir kopieren den Beweis von Puppe, siehe [tD2, Abschnitt 6.9]. Als erstes bringen wir die Repräsentanten von Homotopieklassen oder Homotopien zwischen ihnen in eine spezielle Form (Propositionen 3.39, 3.40), siehe Abbildung 3.6. Anschließend können wir den Anteil mit Werten in  $V \setminus U$  wegdeformieren (Proposition 3.41).

Dazu betrachten wir achsenparallele Würfel der Form

$$W(a, \delta, J) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_i, a_i + \delta] \text{ für } i \in J, \text{ und } x_i = a_i \text{ sonst} \} \subset \mathbb{R}^n$$

für  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\delta > 0$  und  $J \subset \{1, \dots, n\}$ . Für  $W = W(a, \delta, J)$  und  $0 \leq r$  definieren wir Teilmengen  $K_r(W)$  und  $G_r(W) \subset W$  — wie in Abbildung 3.4 angedeutet — durch

$$\begin{aligned} K_r(W) &= \{ x \in W \mid x_i \in (a_i, a_i + \frac{\delta}{2}) \text{ für mindestens } r \text{ verschiedene } i \in J \}, \\ G_r(W) &= \{ x \in W \mid x_i \in (a_i + \frac{\delta}{2}, a_i + \delta) \text{ für mindestens } r \text{ verschiedene } i \in J \}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Inbesondere gilt  $K_r(W) = G_r(W) = \emptyset$  falls  $r > \dim W = \#J$ . Unter den Seiten von  $W(a, \delta, J)$  verstehen wir alle Würfel  $W(a', \delta, J')$  mit  $J' \subset J$  und mit  $a'_i \in \{a_i, a_i + \delta\}$  für alle  $i \in J \setminus J'$  und  $a'_i = a_i$  sonst. Die Vereinigung aller echten Seiten  $W$  heißt wieder der (*geometrische*) Rand  $\partial W$  von  $W$ .

3.39. PROPOSITION. *Es seien  $r \leq \dim W$ ,  $f: W \rightarrow X$  und  $A \subset X$  gegeben, so dass*

$$f^{-1}(A) \cap W' \subset K_r(W')$$

*für alle Seiten  $W'$  von  $W$  gilt. Dann ist  $f$  homotop relativ zum Rand  $\partial W$  zu einer Abbildung  $g: W \rightarrow X$  mit  $g^{-1}(A) \subset K_r(W)$ . Eine entsprechende Aussage gilt, wenn man  $K_r$  überall durch  $G_r$  ersetzt.*

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei  $W = I^k$  ein Einheitswürfel. Wir definieren eine Abbildung  $h = h_1: I^k \rightarrow I^k$  homotop zur Identität und ersetzen  $f$  durch die homotope Abbildung  $f \circ h$ . Dazu fixieren wir  $x = (\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4})$ . Für jeden Strahl  $s$  am Punkt  $x$  sei  $y$  der Schnittpunkt von  $s$  mit  $\partial[0, \frac{1}{2}]^k$ , und  $z$  sei der Schnittpunkt von  $s$  mit  $\partial I^k$ . Dann bilde  $h_1$  die Strecke  $xy$  affin auf die Strecke  $xz$ , und die Strecke  $yz$  konstant auf den Punkt  $z$  ab, siehe Abbildung 3.5. Diese Abbildung ist stetig, eine Homotopie zur Identität wird gegeben durch  $h_t = (1-t)\text{id}_W + t h_1$ , und man sieht leicht, dass  $g = f \circ h_1$  die gestellte Bedingung erfüllt.  $\square$

Wir betrachten jetzt eine Abbildung  $f: I^k \rightarrow X$ . Nach dem Satz 1.55 können wir  $I^k$  für ein geeignetes  $N$  so in  $N^k$  Würfeln der Kantenlänge  $\frac{1}{N}$  zerlegen, dass jeder dieser Würfel entweder in  $f^{-1}(U)$  oder in  $f^{-1}(V)$  liegt.

3.40. PROPOSITION. *Das Paar  $(U, U \cap V)$  sei  $p$ -zusammenhängend, und  $(V, U \cap V)$  sei  $q$ -zusammenhängend für  $p, q \geq 0$ . Dann existiert zu jeder Abbildung  $f: I^k \rightarrow X$  eine Homotopie  $h$  von  $f$  zu  $g: I^k \rightarrow X$ , die für alle Seiten  $W$  von Würfeln der obigen Zerlegung folgendes erfüllt:*

- (1) falls  $W \subset f^{-1}(U \cap V)$ , gelte  $h(x, t) = f(x)$  für alle  $x \in W$ ,  $t \in I$ ;
- (2) falls  $W \subset f^{-1}(U)$ , gelte  $h(x, t) \subset U$  für alle  $x \in W$ ,  $t \in I$ , und  $g^{-1}(U \setminus V) \cap W \subset K_{p+1}(W)$ ;
- (3) falls  $W \subset f^{-1}(V)$ , gelte  $h(x, t) \subset V$  für alle  $x \in W$ ,  $t \in I$ , und  $g^{-1}(V \setminus U) \cap W \subset G_{p+1}(W)$ .

BEWEIS. Wir konstruieren  $h$  der Reihe nach für alle Ecken der Würfel  $W$ , dann für alle Kanten, und so weiter, und zum Schluss für die Würfel  $W$  selbst.

Sei also zunächst  $W = \{x\}$  eine Ecke. Falls  $f(x) \in U \cap V$ , definieren wir  $h|_{W \times I}$  durch (1). Sei also  $f(x) \in U \setminus V$ . Da  $\pi_0(U, U \cap V) = 0$ , finden wir einen Weg von  $x$  zu einem Punkt in  $U \cap V$ ; dieser sei unsere Homotopie. Genauso verfahren wir, falls  $f(x) \in V \setminus U$ .

Sei jetzt  $W$  ein Würfel der Dimension  $n \geq 1$ . Nach Induktion ist  $h$  auf  $\partial W \times I$  bereits konstruiert und wird auf  $W \times \{1\}$  durch  $f|_W$  gegeben. Falls  $W \subset f^{-1}(U \cap V)$ , definieren wir  $h|_{W \times I}$  wieder durch (1). Gelte also  $W \subset f^{-1}(U)$ , aber nicht  $W \subset f^{-1}(V)$ . Wir unterscheiden zwei Fälle.

Falls  $n \leq p$ , gilt  $\pi_n(U, U \cap V) = 0$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $h(x, t) \in U$  und  $h(x, 1) \in U \cap V$  für alle  $x \in \partial W$  und alle  $t \in I$ . Wir setzen  $f|_{W \times \{0\}}$  und  $h|_{\partial W \times I}$  gemäß Bemerkung 3.37 (4) zu einer Abbildung  $h: W \times I \rightarrow U$  so fort, dass  $h(x, 1) \in U \cap V$  für alle  $x \in W$ . Es folgt

$$g^{-1}(U \setminus V) = \emptyset = K_{p+1}(W) .$$

Falls  $n > p$ , konstruieren wir  $h$  und  $g$  mit Hilfe von Proposition 3.39. Analog verfahren wir, falls  $W \subset f^{-1}(V)$ , aber nicht  $W \subset f^{-1}(U)$ .  $\square$

3.41. PROPOSITION. *Es sei  $k \leq p+q$  und  $f: (I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, U)$  eine Abbildung mit  $I^{k-1} \times \{0\} \subset f^{-1}(V)$ . Dann existiert eine Homotopie  $h: I^{k+1} \rightarrow X$  von  $f$  zu einer Abbildung  $g: I^k \rightarrow U$  mit folgenden Eigenschaften.*

- (1) Wenn  $f$  eine Seite  $W \subset \partial I^k$  von  $I^k$  nach  $U \cap V$  abbildet, gelte  $h(x, t) = f(x)$  für alle  $t \in I$  und alle  $x \in W$ .
- (2) Für alle  $t \in I$  und alle  $x \in \partial I^k$  gelte  $h(x, t) \in U$ .
- (3) Für alle  $t \in I$  und alle  $x \in I^{k-1} \times \{0\}$  gelte  $h(x, t) \in V$ .

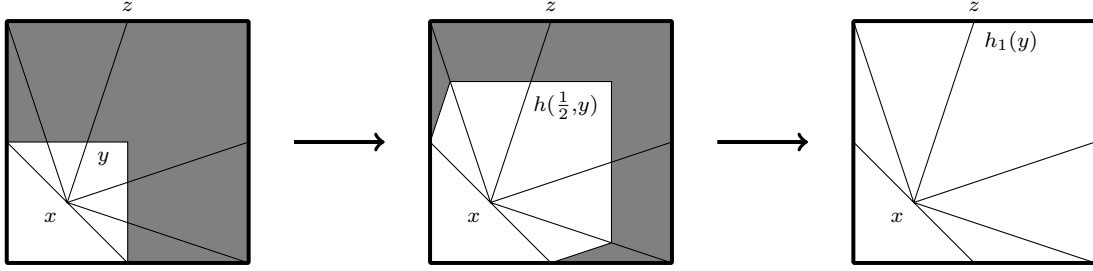


ABBILDUNG 3.5. Die Homotopie  $h_1$

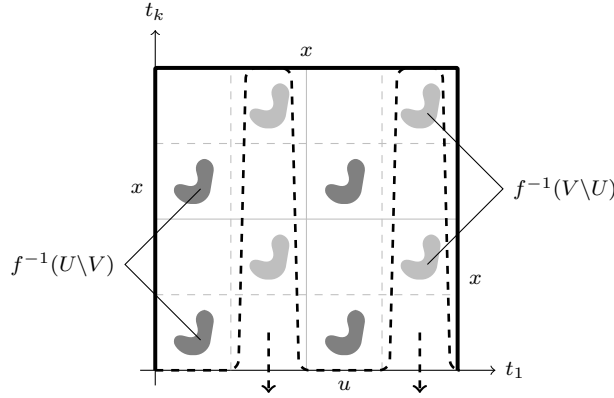


ABBILDUNG 3.6. Die Urbilder von  $V \setminus U$  und  $U \setminus V$  in  $I^k$

BEWEIS. Wir wenden Proposition 3.40 an und erhalten eine zu  $f$  homotope Abbildung  $I^k \rightarrow X$ . Die Bedingungen (1)–(3) in Proposition 3.40 stellen sicher, dass diese Homotopie die obigen Eigenschaften (1)–(3) erfüllt. Wir dürfen daher ohne Einschränkung für alle  $W$  annehmen, dass

$$f^{-1}(U \setminus V) \subset K_{p+1}(W) \quad \text{und} \quad f^{-1}(V \setminus U) \subset G_{p+1}(W).$$

Betrachte jetzt die orthogonale Projektion  $p: I^k \rightarrow I^{k-1} \times \{0\}$ . Sei  $W'$  das Bild unter  $p$  eines Würfels  $W$  der obigen Zerlegung. Da wir die Kontrolle über eine Koordinate verlieren, gilt

$$K_{p+1}(W) \subset p^{-1}(K_p(W')) \quad \text{und} \quad G_{q+1}(W) \subset p^{-1}(G_q(W')).$$

Da  $k-1 < p+q$ , sind die Mengen  $K_p(W')$  und  $G_q(W')$  nach Konstruktion (3.2) disjunkt, siehe Abbildung 3.4. Wegen Proposition 3.40 (2) und (3) sind dann auch die kompakten Mengen

$$A = \{p(x) \mid x \in f^{-1}(U \setminus V)\} \quad \text{und} \quad B = \{p(x) \mid x \in f^{-1}(V \setminus U)\}$$

disjunkt. Da  $\partial I^k$  auf  $U$  abgebildet wird, ist insbesondere  $B$  auch disjunkt zu  $\partial I^{k-1}$ . Nach Urysohns Lemma 1.30 existiert eine stetige Funktion  $u: I^{k-1} \rightarrow I$  mit  $u|_{A \cup \partial I^{k-1}} = 0$  und  $u|_B = 1$ .

Insbesondere liegt  $f^{-1}(U \setminus V)$  oberhalb des Graphen von  $u$  in  $I^k$ , und  $f^{-1}(V \setminus U)$  unterhalb, siehe Abbildung 3.6. Wir konstruieren eine Homotopie relativ zu  $\partial I^k$  durch

$$h(x_1, \dots, x_k, t) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + (1 - x_k)tu(x_1, \dots, x_{k-1})).$$

Diese Homotopie bildet ganz  $\partial I^k \times I$  nach  $V$  ab, und die Abbildung  $g = h(\cdot, 1)$  nimmt Werte in  $U$  an. Zusammen mit der Homotopie aus Proposition 3.40 ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

BEWEIS DES AUSSCHNEIDUNGSSATZES 3.38. Sei  $k = 0$ . Jede Wegzusammenhangskomponente von  $U$  und  $V$  enthält Punkte von  $U \cap V$ , da  $p, q \geq 0$ . Es folgt

$$\pi_0(X, V) = \{*\} = \pi_0(U, U \cap V).$$

Zur Surjektivität der Abbildung

$$i_*\pi_k(U, U \cap V, x) \rightarrow \pi_k(X, V, x)$$

seien  $1 \leq k \leq p + q$  und  $f: (I^k/\partial I^k, \partial I^k/\partial I^k) \rightarrow (X, V)$  gegeben. Wir wenden Proposition 3.41 auf  $\bar{f}: I^k \rightarrow X$  an. Es folgt  $[f] = [g] \in \pi_k(X, V)$  und  $[g] \in \text{im}(i_*)$ . Damit ist Surjektivität von  $i_*$  bewiesen.

Der Beweis der Injektivität verläuft ähnlich. Sei  $2 \leq k \leq p + q$ , und seien  $f_0, f_1 \in \pi_{k-1}(U, U \cap V, x)$  mit  $i_*f_0 = i_*f_1$  repräsentiert durch  $\bar{f}_j: (I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \rightarrow (U, U \cap V)$ , so dass  $\partial I^{k-1} \subset \bar{f}_j^{-1}(\{x\})$  für  $j = 0, 1$ . Dann existiert eine Homotopie  $\bar{h}: (I^k, \partial I^{k-1} \times I) \rightarrow (X, V)$  zwischen  $\bar{f}_0$  und  $\bar{f}_1$ , wobei ganz  $\partial I^{k-1} \times I$  auf  $x$  abgebildet wird. Insbesondere bildet  $\bar{h}$  die Seite  $\partial I^{k-2} \times \{0\} \times I$  nach  $V$  ab, alle anderen Seiten von  $I^k$  werden nach  $U$  abgebildet. Wir wenden Proposition 3.41 auf  $\bar{h}$  an und erhalten eine neue Abbildung  $\bar{k}: I^k \rightarrow U$ . Dabei wird zunächst  $f_j$  durch eine in  $(U, U \cap V)$  punktierte homotope Abbildung  $g_j = k(\cdot, j)$  ersetzt, und  $k$  ist eine punktierte Homotopie zwischen  $g_0$  und  $g_1$  in  $(U, U \cap V)$ . Es folgt  $[f_0] = [g_0] = [g_1] = [f_1] \in \pi_{k-1}(U, U \cap V)$ , und wir erhalten die Injektivität von  $i_*$  in den Graden  $0, \dots, p + q - 1$ . Zusammen mit der obigen Surjektivität ist  $i: (U, U \cap V) \rightarrow (X, V)$  also eine  $(p + q)$ -zusammenhängende Abbildung von Paaren.  $\square$

### 3.e. Der Satz von Brouwer und Hopf

In diesem Abschnitt berechnen wir einige Homotopiegruppen von Sphären. Die Homotopiegruppen der  $S^1$  kennen wir bereits aus Beispiel 3.27.

Für  $n \geq 1$  bezeichne  $e_1 \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  den Basispunkt. Wir zerlegen  $S^n = U \cup V$  mit  $U = S^n \setminus \{-e_2\}$  und  $V = S^n \setminus \{e_2\}$ ; beide Teilmengen sind zusammenziehbar. Mit Bemerkung 3.6 liefert die lange exakte Sequenz des Paares  $(S^n, V)$  Isomorphismen

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(V)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(S^n, V) \xleftarrow{\cong} \pi_k(S^n) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(V)}_{=0} \longleftarrow \cdots \quad (3.3)$$

für alle  $k$ . Der Durchschnitt  $U \cap V$  ist homotopieäquivalent zu einer  $S^{n-1}$ . Mit Folgerung 3.21 schließen wir, dass die jeweiligen Inklusionen der „oberen“ und „unteren“ Hemisphären in die  $S^n$  für alle  $k$  Isomorphismen

$$\pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \quad \text{und} \quad \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(V, U \cap V) \quad (3.4)$$

induzieren. Der Raum  $D^n$  ist zusammenziehbar. Die Homotopiesequenz 3.19 des Paares  $(D^n, S^{n-1})$  liefert also Isomorphismen

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(D^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_{k-1}(S^{n-1}) \xleftarrow{\cong} \pi_k(D^n, S^{n-1}) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(D^n)}_{=0} \longleftarrow \cdots \quad (3.5)$$

für alle  $k$ .

3.42. SATZ (Brouwer, Hopf). *Für alle  $n \geq 1$  gilt:*

- (1) *der Raum  $S^n$  ist  $(n - 1)$ -zusammenhängend;*
- (2) *das Paar  $(D^n, S^{n-1})$  ist  $(n - 1)$ -zusammenhängend;*
- (3) *es gilt*

$$\pi_n(S^n) \cong \pi_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \cong \mathbb{Z},$$

*dabei werden beide Gruppen von der jeweiligen Identität erzeugt;*

(4) die Abbildung

$$\pi_{k-1}(S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{\partial^{-1}} \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \xrightarrow{i_*} \pi_k(S^n, V) \xrightarrow[\cong]{j_*^{-1}} \pi_k(S^n)$$

ist ein Isomorphismus für alle  $1 \leq k < 2n - 2$ , und surjektiv, falls  $1 \leq k = 2n - 2$ .

In (3) haben wir  $I^n/\partial I^n$  gemäß Bemerkung 3.2 (3) mit  $S^n$  und  $(I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n)$  gemäß Bemerkung 3.13 mit  $(D^n, S^{n-1})$  identifiziert.

Aussage (1) kann man auch elementar (ohne Ausschneidung) beweisen, allerdings ist der Beweis immer noch etwas aufwändig. Dazu stellt man ein Element von  $\pi_k(S^n)$  mit  $k < n$  durch eine punktierte Abbildung  $f: I^k/\partial I^k \rightarrow S^n$  dar. Diese Abbildung kann surjektiv sein, siehe Beispiel 1.22. Indem man  $f$  im Inneren von  $I^k$  geschickt glättet, erhält man eine punktiert homotope Abbildung, die einen Punkt in  $S^n$  nicht trifft, ohne Einschränkung den Südpol  $x$ . Dann zieht man  $S^n \setminus \{x\}$  auf den Nordpol zusammen und erhält so eine Nullhomotopie von  $f$ .

BEWEIS. Wir beweisen zunächst (1), (2) und (4) durch Induktion über  $n$ . Für  $n = 1$  gelten die Behauptungen, denn  $S^1$  ist zusammenhängend, es gilt  $\pi_0(D^1, S^0) = \{*\}$ , und Aussage (4) ist leer.

Sei jetzt  $n > 1$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\pi_k(S^{n-1}) = 0$  für  $k \leq n - 2$ . Aus (3.3) folgt  $\pi_k(D^n, S^{n-1}) = 0$  für alle  $k \leq n - 1$ , also ist  $(D^n, S^{n-1})$  ein  $(n - 1)$ -zusammenhängendes Paar nach Bemerkung 3.37, und (2) ist gezeigt.

Wegen (3.4) sind auch die Paare  $(U, U \cap V)$  und  $(V, U \cap V)$  jeweils  $(n - 1)$ -zusammenhängend. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 ist  $(U, U \cap V) \rightarrow (S^n, V)$  eine  $(2n - 2)$ -zusammenhängende Abbildung. Es folgt Behauptung (4).

Für  $n \geq 2$  ist  $2n - 2 \geq n$ , und für  $k < n$  erhalten wir

$$0 = \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \cong \pi_k(S^n, V) \cong \pi_k(S^n).$$

Damit sind (1), (2) und (4) für alle  $n$  gezeigt.

Für  $n = 1$  folgt (3) aus Satz 2.28. Für  $n = 2$  betrachten wir die Homotopiesequenz der Hopf-Faserung aus Beispiel 3.33. Wegen (1) hat sie die Form

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_1(S^3)}_{=0} \xleftarrow{i_*} \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\cong \mathbb{Z}} \xleftarrow{\partial} \pi_2(S^2) \xleftarrow{p_*} \underbrace{\pi_2(S^3)}_{=0} \longleftarrow \cdots$$

Mit (4) und (3.5) erhalten wir die Isomorphismen in (3) induktiv für alle  $n$ .

Wir konstruieren induktiv Homöomorphismen

$$\varphi_k: I^k/\partial I^k \xrightarrow{\cong} S^k \quad \text{und} \quad \psi_k: (I^k/\partial I^k, \partial I^k/\partial I^k) \xrightarrow{\cong} (D^k, S^{k-1})$$

wie in den Bemerkung 3.2 (3), und zeigen, dass  $[\text{id}_{S^n}] = [\varphi_n]$  und  $[\text{id}_{(D^{n+1}, S^n)}] = [\psi_{n+1}]$  jeweils Erzeuger von  $\pi_n(S^n)$  beziehungsweise  $\pi_{n+1}(D^{n+1}, S^n)$  sind. Für  $\pi_1(S^1)$  folgt das aus Satz 2.28.

Sei also  $n \geq 2$  und  $[\varphi_{n-1}]$  Erzeuger von  $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ . Dann können wir  $\psi_n$  konstruieren, indem wir

$$\psi_n|_{(I^{n-1} \times \{0\})/(\partial I^{n-1} \times \{0\})} = \varphi_{n-1}$$

auf  $(I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n)$  fortsetzen. Nach Satz 3.19 und (3.5) ist dann  $[\psi_n] = \partial^{-1}[\varphi_{n-1}]$  Erzeuger von  $\pi_n(D^n, S^{n-1})$ .

Mit dem Ausschneidungssatz 3.38 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z} \cong \pi_n(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_n(U, U \cap V) \longrightarrow \pi_n(S^n, V) \cong \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

(für  $n = 2$  ist diese Abbildung wegen (4) zunächst nur surjektiv, aber die einzigen surjektiven Gruppen-Endomorphismen von  $\mathbb{Z}$  sind  $a \mapsto \pm a$ , also bijektiv). Das Bild von  $[\psi_n]$  ist Erzeuger von  $\pi_n(S^n)$ .

Das Bild von  $[\psi_n]$  in  $\pi_n(S^n, V)$  entspricht einer Abbildung, die das Innere von  $I^n$  homöomorph auf die Hemisphäre  $\{x \in S^n \mid x_2 > 0\}$  abbildet. In  $\pi_n(S^n, \{e_1\}) \cong \pi_n(S^n)$  entspricht das einer Abbildung, die das Innere von  $I^n$  homöomorph auf  $S^n \setminus \{e_1\}$  abbildet; diese sei unsere neue Abbildung  $\varphi_n$ .  $\square$

3.43. BEISPIEL. Wir betrachten die Hopf-Faserungen aus den Beispielen 3.33 und 3.34.

- (1) Da  $\pi_1(S^{2n+1}) = 0$  für  $n \geq 1$  nach Satz 3.42 (1), ist die Inklusion  $i: S^1 \rightarrow S^{2n+1}$  der Faser in der Hopf-Faserung  $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  homotop zur konstanten Abbildung; es folgt  $\pi_k i = 0$  für alle  $k$ . Somit zerfällt die lange exakte Sequenz in eine Folge kurzer exakter Sequenzen der Form

$$0 \longleftarrow \pi_{k-1}(S^1) \xleftarrow{\partial} \pi_k(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^{2n+1}) \longleftarrow 0.$$

Aus Beispiel 3.27 folgt jetzt

$$\pi_2(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \pi_k(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k(S^{2n+1}) \text{ für alle } k \neq 2.$$

Wegen Satz 3.42 (3) gilt für  $k \neq 2$  also auch

$$\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \cong \mathbb{Z}, \quad \text{insbesondere} \quad \pi_3(S^2) \cong \pi_3(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Erzeuger dieser Gruppe  $\mathbb{Z}$  ist übrigens die Hopf-Faserung selbst, denn

$$[p] = [p \circ \text{id}_{S^{2n+1}}] = p_*[\text{id}_{S^{2n+1}}].$$

Interessanterweise kann man also eine Sphäre in eine Mannigfaltigkeit  $M$  kleinerer Dimension nicht-nullhomotop abbilden.

- (2) Genauso ist in der quaternionischen Hopf-Faserung  $i: S^3 \rightarrow S^{4n+3}$  homotop zur konstanten Abbildung, und wir erhalten eine Folge kurzer exakter Sequenzen

$$0 \longleftarrow \pi_{k-1}(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_k(\mathbb{H}P^n) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^{4n+3}) \longleftarrow 0.$$

Im Gegensatz zur  $S^1$  gilt  $\pi_k(S^3) \neq 0$  für unendlich viele  $k \geq 3$ . Für  $k = 4n + 3$  sehen wir aber immerhin, dass die Klasse  $[p] = p_*[\text{id}_{S^{4n+3}}]$  der quaternionischen Hopf-Faserung unendliche Ordnung in der Gruppe  $\pi_{4n+3}(\mathbb{H}P^n)$  hat. Im Spezialfall  $n = 1$  folgt daraus, dass  $\pi_7(S^4)$  eine unendliche Gruppe ist.

In der Tat enthält  $\pi_{4n-1}(S^{2n})$  stets  $\mathbb{Z}$  als direkten Summanden für alle  $n \in \mathbb{Z}$ , aber das können wir jetzt noch nicht beweisen. Ansonsten ist  $\pi_k(S^n)$  endlich für  $k > n$ , und wir sehen, dass die Bedingung in Satz 3.42 (4) scharf ist, denn  $\pi_{4n-1}(S^{2n}) \rightarrow \pi_{4n}(S^{2n+1})$  ist sicher nicht injektiv.

Der Satz 3.42 von Brouwer-Hopf hat viele topologische und geometrische Anwendungen. Einige fassen wir hier zusammen, weitere folgen in Übung 3.118.

3.44. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Für  $n \geq 0$  hat jede stetige Abbildung  $f: D^n \rightarrow D^n$  einen Fixpunkt.*

Der Fall  $n = 1$  folgt aus dem Zwischenwertsatz, siehe Bemerkung 2.29, und  $n = 2$  haben wir bereits in Satz 2.31 behandelt.

BEWEIS. Für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen, es sei also  $n \geq 1$ . Wie im Beweis von Satz 2.31 im Fall  $n = 2$  nehmen wir an, dass die Abbildung  $f: D^n \rightarrow D^n$  keinen Fixpunkt hat, und konstruieren dann eine Retraktion  $r: D^n \rightarrow S^{n-1} = \partial D^n$  wie in Abbildung 2.2. Sei  $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$  die Inklusion, dann gilt also  $r \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$ . Wie in Bemerkung 2.30 folgt für jeden kovarianten Funktor  $\Phi$  von der Kategorie  $\mathcal{T}op_+$  in eine Kategorie  $\mathcal{C}$ , dass  $\Phi r \circ \Phi i = \text{id}_{\Phi S^{n-1}}$ . Der Funktor  $\pi_{n-1}: \mathcal{T}op_+ \rightarrow \mathcal{S}et_+$  liefert jetzt einen Widerspruch, da  $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \neq \{*\} = \pi_{n-1}(D^n)$ .  $\square$

Wir wollen jetzt freie Homotopieklassen von Abbildungen von  $S^n$  nach  $S^n$  betrachten und erinnern uns an Folgerung 3.8. Für die Sphären  $S^n$  mit  $n \geq 1$  wirkt  $\pi_1(S^n)$  trivial auf  $\pi_k(S^n)$ , denn  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  ist abelsch und alle anderen  $\pi_k(S^1)$  verschwinden, und für  $n > 1$  ist  $\pi_1(S^n)$  trivial. Daher identifizieren wir  $[S_+^k, S^n]$  mit  $\pi_k(S^n)$ .

3.45. DEFINITION. Sei  $\deg: [S_+^n, S^n] \cong \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  der Isomorphismus aus Satz 3.42 (3). Für eine Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  heißt  $\deg f = \deg[f] \in \mathbb{Z}$  der *Abbildungsgrad* von  $f$ .

Später werden wir diesen Begriff verallgemeinern auf Abbildungen zwischen orientierten topologischen Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension.

3.46. FOLGERUNG (aus Satz 3.42). *Zwei Abbildungen  $f, g: S^n \rightarrow S^n$  sind genau dann homotop, wenn sie den gleichen Abbildungsgrad haben.*  $\square$

3.47. BEISPIEL. Es sei  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  für  $n \geq 1$ , dann hat die Abbildung  $f_A: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  mit

$$f_A(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}$$

den Abbildungsgrad  $\deg f_A = \text{sign det } A \in \{1, -1\}$ .

Die Gruppe  $GL(n, \mathbb{R})$  hat genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, auf denen die Determinante unterschiedliches Vorzeichen hat. Ein Weg  $\gamma$  zwischen zwei Elementen  $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$  liefert eine Homotopie

$$h(x, t) = \frac{\gamma(t)x}{\|\gamma(t)x\|}$$

zwischen  $f_A$  und  $f_B$ . Da  $\deg f_{E_n} = \deg \text{id} = \text{sign det } E_n$  gilt, reicht es, ein Element  $A$  mit  $\deg f_A = \text{sign det } A = -1$  anzugeben. Aus dem Beweis von Proposition 3.5 schließen wir, dass folgende Matrix das Gewünschte leistet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Unter einem Vektorfeld auf  $S^n$  verstehen wir eine Abbildung  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , so dass  $x$  und  $f(x)$  für alle  $x$  aufeinander senkrecht stehen.

3.48. SATZ (Satz vom Igel). *Die Sphäre  $S^n$  trägt genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn  $n$  ungerade ist.*

BEWEIS. Sei  $n = 2k - 1$  ungerade. Ein nicht verschwindendes Vektorfeld wird gegeben durch

$$f(z) = iz \quad \text{für alle } z \in S^n \subset \mathbb{C}^k.$$

Umgekehrt sei  $f$  ein nirgends verschwindendes Vektorfeld. Indem wir  $f(x)$  durch  $\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$  ersetzen, dürfen wir  $\|f(x)\| = 1$  für alle  $x \in S^n$  annehmen. Dann erhalten wir eine Homotopie zwischen  $\text{id}$  und  $-\text{id}$  durch

$$h(x, t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)f(x).$$

Es folgt

$$1 = \deg \text{id} = \deg(-\text{id}) = \text{sign det}(-E_{n+1}) = (-1)^{n+1},$$

also ist  $n$  ungerade.  $\square$

Wir beweisen noch die Invarianz der Dimension und die Invarianz des Gebietes. Dabei ist interessant, dass wir mit Hilfe eines homotopieinvarianten Funktors Eigenschaften nachweisen können, die nicht homotopieinvariant sind. Wir erinnern uns an den Begriff der topologischen Mannigfaltigkeit aus Definition 1.77, siehe auch Bemerkung 1.79 (3). Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum und  $x \in X, x \neq x_0$ . Dann schreiben wir  $X|x = (X, X \setminus \{x\}) = (X, X \setminus \{x\}, x_0)$ .



3.49. BEISPIEL. Bis auf Homöomorphie gibt es nur zwei zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeiten: den Kreis  $S^1$  und das offene Intervall  $\mathbb{R}$ . In diesem Fall erhalten wir für jeden Punkt  $x$  Bijektionen  $\pi_0(S^1|x) = \pi_0(\mathbb{R}|x) = \{*\}$ , sowie mit Folgerung 3.21 auch

$$\pi_1(S^1|x) \cong \pi_1(S^1, \{x_0\}) \cong \mathbb{Z}, \quad \text{und} \quad \pi_1(\mathbb{R}|x) \cong \pi_1(D^1, S^0) \cong \pi_0(S^0) \cong \{0, *\}.$$

3.50. PROPOSITION. *Es sei  $M$  eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$ , und es sei  $x \in M$ . Dann gilt*

- (1) Für  $0 \leq k \leq n - 1$  ist  $\pi_k(M|x) = 0$ .
- (2) Die Gruppe  $\pi_n(M|x)$  enthält eine Kopie von  $\mathbb{Z}$  als Untergruppe.

Falls  $M$  nicht zusammenhängend ist, gilt die Aussage, falls wir den Basispunkt in der gleichen Zusammenhangskomponente wie  $x$  wählen.

BEWEIS. Es sei  $U \subset M$  eine offene Umgebung von  $x$ , die zu  $B^n$  (oder äquivalent zu  $\mathbb{R}^n$ ) homöomorph ist. Indem wir  $U$  gegebenenfalls verkleinern, dürfen wir annehmen, dass sich der Homöomorphismus zu einem Homöomorphismus  $\bar{U} \cong D^n$  fortsetzt.

Wir zerlegen

$$M = U \cup (M \setminus \{x\}).$$

Da  $M$  zusammenhängend ist, ist  $(M \setminus \{x\}, U \setminus \{x\})$  ein 0-zusammenhängendes Paar. Da  $U$  zusammenziehbar und  $U \setminus \{x\}$  zu  $S^{n-1}$  homotopieäquivalent ist, ist  $U|x = (U, U \setminus \{x\})$  ein  $(n - 1)$ -zusammenhängendes Paar. Aus dem Ausschneidungssatz folgt für  $k \leq n - 1$ , dass

$$\pi_k(M|x) = \pi_k(M, M \setminus \{x\}) \cong \pi_k(U, U \setminus \{x\}) = \pi_k(U|x) = 0.$$

Betrachte jetzt die Inklusion  $U \rightarrow M$  und die Quotientenabbildung

$$q: M \rightarrow M/(M \setminus U) \cong S^n.$$

Wie im Beweis von Satz 3.42 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\pi_n(q \circ i): \pi_n(U|x) \cong \pi_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \pi_n(S^n).$$

Wie in Bemerkung 2.30 folgt die Injektivität von  $\pi_n i$ . □

3.51. SATZ (Invarianz der Dimension, Brouwer). *Es seien  $M, N$  topologische Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $m, n \in \mathbb{N}$ . Wenn  $M$  und  $N$  homöomorph sind, gilt  $m = n$ .*

BEWEIS. Wir betrachten als erstes den Spezialfall, dass  $m = 0$ . In diesem Fall trägt  $M$  die diskrete Topologie. Wenn  $M$  und  $N$  homöomorph ist, trägt auch  $N$  die diskrete Topologie, also gilt auch  $n = 0$ . Andernfalls können wir mit Beispiel 3.49 und Proposition 3.50 die Dimension von  $M$  charakterisieren als

$$m = \inf\{k \in \mathbb{N} \mid \pi_k(M|x) \neq 0\}.$$

Wenn  $M$  und  $N$  homöomorph sind, folgt  $m = n$ . □

3.52. DEFINITION. Eine (topologische) Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension  $n \in \mathbb{N}$  ist ein Hausdorff-Raum  $M$  mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U \subset M$  besitzt, die homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  oder zu  $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$  ist.

Der (geometrische) Rand  $\partial M$  von  $M$  ist die Teilmenge derjenigen Punkte, die von Homöomorphismen  $U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$  wie oben auf Punkte in  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  abgebildet werden.

3.53. BEMERKUNG. Für einen Punkt  $x$  in einer Mannigfaltigkeit  $M$  mit Rand gibt es genau zwei Möglichkeiten, siehe Übung 3.119.

- (1) Für jede offene Umgebung  $U \subset M$  von  $x$  und jeden Homöomorphismus  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$  gilt  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ ; in diesem Fall heißt  $x$  ein innerer Punkt von  $M$ , oder

- (2) Es gibt keine offene Umgebung von  $x$  in  $M$ , die zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorph ist, und für jede offene Umgebung  $U \subset M$  von  $x$  und jeden Homöomorphismus  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$  gilt  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ ; in diesem Fall heißt  $x$  ein *Randpunkt* von  $M$ .

3.54. BEISPIEL. Wir kennen bereits einige topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand.

- (1) Jede topologische Mannigfaltigkeit  $M$  im Sinne von Definition 1.77 ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M = \emptyset$ .
- (2) Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  mit Rand  $N \subset M$  ist topologische Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M = N$ .
- (3) Der Halbraum  $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$  ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ .
- (4) Der abgeschlossene Ball  $D^n$  ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand  $S^{n-1}$ .
- (5) Der Einheitswürfel  $I^n$  ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial I^n$ , denn es gilt  $(D^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^{n-1})$ .

### 3.f. Kofaserungen und Quotienten

Wenn man in einem Diagramm alle Pfeile umdreht, erhält man ein dazu duales Diagramm. In diesem Sinne sind Produkte dual zur disjunkten Vereinigung (Sätze 1.40 und 1.46), Unterräume sind dual zu Quotienten (Sätze 1.43 und 1.72). Solange man nur abstrakt mit universellen Eigenschaften arbeitet, lassen sich alle Argumente übertragen. Aber bereits die Existenz von Produkten oder disjunkten Vereinigungen lässt sich nicht rein abstrakt zeigen, man braucht konkrete Überlegungen.

*Eckmann-Hilton-Dualität* ist die Idee, dass es auch zu jedem homotopietheoretischen Begriff einen dualen Begriff geben sollte. In diesem Abschnitt geht es um den dualen Begriff zu den Faserungen aus Abschnitt 3.c, der tatsächlich mindestens so wichtig ist wie das Original. Dazu betrachten wir das Diagramm zur Homotopieliftungseigenschaft und das duale Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\
 \times\{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\
 Y \times I & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{ccc}
 Y & \xleftarrow{f} & X \\
 \text{ev}_0 \uparrow & \nwarrow H & \uparrow i \\
 C(I, Y) & \xleftarrow{h} & A
 \end{array}$$

Hier ist nach dem Exponentialgesetz 1.60 das Produkt mit einem festen Raum  $I$  dual zum Wegeraum  $C(I, \cdot)$ : anstelle von Homotopien von Abbildungen von  $Y$  nach  $B$  betrachten wir Homotopien von Abbildungen von  $A$  nach  $Y$ . Das rechte Diagramm führt zu unserem neuen Begriff.

3.55. DEFINITION. Eine Abbildung  $i: A \rightarrow X$  ist eine (*Hurewicz-*) *Kofaserung*, wenn  $i$  für jeden Raum  $Y$  die *Homotopieausdehnungseigenschaft* besitzt, das heißt, wenn es zu jedem Raum  $Y$ , jeder Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  und jeder Homotopie  $h: A \times I \rightarrow Y$  mit

$$h(a, 0) = f(i(a)) \quad \text{für alle } a \in A \tag{1}$$

eine Homotopie  $H: X \times I \rightarrow Y$  gibt, so dass

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad H(i(a), t) = h(a, t) \quad \text{für alle } x \in X, a \in A \text{ und } t \in I. \tag{2}$$

Wir nennen ein Paar  $(X, A)$  eine *Kofaserung*, wenn die Inklusion  $i: A \rightarrow X$  eine Kofaserung ist. Wir nennen einen punktierten Raum  $(X, x_0)$  *gut punktiert* und  $x_0$  einen *guten* oder *nicht entarteten Basispunkt*, wenn  $\{x_0\}$  in  $X$  abgeschlossen und  $(X, \{x_0\})$  eine Kofaserung ist.

Beispiele gibt es in den Übungen 3.122 und 3.127. Wir werden die neue Definition von „gut punktiert“ bald mit derjenigen aus Folgerung 2.50 vergleichen. Zunächst wollen wir etwas besser verstehen, was wir gerade definiert haben.

3.56. DEFINITION. Es sei  $f: Y \rightarrow X$  eine Abbildung. Wir definieren den *Abbildungszylinder*

$$Zf = (Y \times I \sqcup X) / \sim,$$

wobei „ $\sim$ “ die von  $(y, 0) \sim f(y)$  für alle  $y \in Y$  erzeugte Äquivalenzrelation sei.

3.57. BEMERKUNG. Es sei  $i: A \rightarrow X$  eine Abbildung, dann entspricht ein Paar von Abbildungen  $f, h$  wie in Definition 3.55 (1) nach der charakteristischen Eigenschaft 1.72 (2) der Quotiententopologie genau einer stetigen Abbildung  $F: Zi \rightarrow Y$ . Insbesondere induzieren für  $Y = X \times I$  die Abbildungen

$$X \cong X \times \{0\} \hookrightarrow X \times I \quad \text{und} \quad A \times I \xrightarrow{i \times \text{id}_I} X \times I$$

eine stetige Abbildung  $\bar{i}: Zi \rightarrow X \times I$ . Es folgt, dass  $i$  genau dann eine Kofaserung ist, wenn eine Abbildung  $\bar{r}: X \times I \rightarrow Zi$  mit  $\bar{r} \circ \bar{i} = \text{id}_{Zi}$  existiert. Denn für jede Kofaserung  $i$  liefert die Homotopieausdehnungseigenschaft für  $\text{id}_{Zi}: Zi \rightarrow Zi$  gerade eine solche Abbildung  $\bar{r}$ . Seien umgekehrt  $f$  und  $h$  wie in Definition 3.55 (1) gegeben, sei  $F: Zi \rightarrow Y$  die davon induzierte Abbildung, und sei  $\bar{r}: X \times I \rightarrow Zi$  wie oben, dann erfüllt  $H = F \circ \bar{r}: X \times I \rightarrow Y$  gerade die Bedingung in Definition 3.55 (2).

Jetzt kann man zeigen, dass jede Kofaserung eine Einbettung ist (Übung 3.124), also induziert  $i$  einen Homöomorphismus  $A \cong \text{im}(i)$ . Wir können uns also auf Paare  $(X, A)$  beschränken. In diesem Fall ist  $X \times \{0\} \cup A \times I$  also ein Retrakt von  $X \times I$ . Wenn  $X$  ein Hausdorff-Raum ist, ist  $A \subset X$  abgeschlossen (Übung 3.125).

3.58. PROPOSITION. *Es sei  $X$  normal,  $A \subset X$  abgeschlossen, und  $U \subset X$  eine offene Umgebung von  $A$ , so dass  $A$  starker Deformationsretrakt von  $U$  ist. Dann ist  $(X, A)$  eine Kofaserung.*

BEWEIS. Es sei  $h: U \times I \rightarrow U$  eine Homotopie relativ zu  $A$  zwischen  $\text{id}_U = h(\cdot, 0)$  und einer Retraktion  $h(\cdot, 1): U \rightarrow A$ . Mit dem Lemma 1.30 von Urysohn finden wir eine Funktion  $u: X \rightarrow I$  mit  $A \subset u^{-1}(0)$  und  $\text{supp}(1 - u) \subset U$ . Wir definieren eine Retraktion  $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$  durch

$$r(x, t) = \begin{cases} \left( h(x, (1 - u(x))t), 0 \right) & \text{falls } x \in U, t \leq u(x), \\ \left( h(x, (1 - u(x))t), t - u(x) \right) & \text{falls } x \in U, t \geq u(x), \text{ und} \\ (x, 0) & \text{falls } x \in X \setminus U. \end{cases} \quad \square$$

3.59. BEISPIEL. Mit diesem Ergebnis erhalten wir weitere Beispiele von Kofaserungen.

- (1) Das Paar  $(D^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n)$  ist Kofaserung für  $n \geq 1$ .
- (2) Allgemeiner sei  $M$  topologischer Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M \neq \emptyset$ , dann ist  $(M, \partial M)$  eine Kofaserung. Hierzu ist allerdings noch zu zeigen, dass  $\partial M$  in  $M$  eine Umgebung der Gestalt  $\partial M \times [0, 1)$  besitzt.
- (3) Es sei  $(X, x_0)$  ein gut punktierter (schwach-) Hausdorff-Raum im Sinne von Folgerung 2.50. Dann besitzt  $x_0$  eine Umgebung  $U$  in  $X$ , die in  $X$  auf  $x_0$  deformiert werden kann. Wenn wir überdies noch  $u$  wie oben bestimmen können (zum Beispiel, wenn  $X$  ein metrischer Raum ist), ist  $(X, x_0)$  eine Kofaserung. Somit stimmen diese Begriffe zumindest in wichtigen Fällen überein.

Es gibt ein zu Proposition 3.58 ähnliches, aber zur Definition 3.55 äquivalentes Kriterium für Kofaserungen.

3.60. PROPOSITION. *Es sei  $A \subset X$  abgeschlossen, dann sind äquivalent:*

- (1)  $(X, A)$  ist ein Umgebungsdeformationsretrakt, das heißt, es gibt eine Abbildung  $u: X \rightarrow I$  und eine Homotopie  $h: X \times I \rightarrow X$ , so dass

$$A \subset u^{-1}(0), \quad (\text{a})$$

$$h|_{X \times \{0\} \cup A \times I} = \pi_X|_{X \times \{0\} \cup A \times I}, \quad (\text{b})$$

$$h(x, t) \in A \text{ für alle } x \in X \text{ mit } u(x) < t; \quad (\text{c})$$

- (2)  $X \times \{0\} \cup A \times I$  ist starker Deformationsretrakt von  $X \times I$ ;  
(3)  $X \times \{0\} \cup A \times I$  ist Retrakt von  $X \times I$ ;  
(4)  $(X, A)$  ist eine Kofaserung.

Der Begriff Umgebungsdeformationsretrakt bedeutet, dass sich eine Umgebung  $U = u^{-1}([0, 1])$  von  $A$  in  $X$  (also nicht notwendigerweise in  $U$ ) auf  $A$  zusammenziehen lässt. Die Situation in Proposition 3.58 ist also deutlich spezieller.

BEWEIS. Nach Bemerkung 3.57 sind (3) und (4) äquivalent, und (3) folgt offensichtlich aus (2). Es gelte (1), dann folgt (2) mit der Deformationsretraktion  $r: X \times I \times I \rightarrow X \times I$ ,

$$r(x, t, s) = \begin{cases} (h(x, st), (1-s)t) & \text{falls } t \leq u(x), \text{ und} \\ (h(x, st), t - su(x)) & \text{falls } t \geq u(x). \end{cases}$$

Es gelte jetzt (3), und  $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$  sei Retraktion. Es seien  $\pi_X: X \times I \rightarrow X$  und  $\pi_I: X \times I \rightarrow I$  die Projektionen. Dann definiere  $u$  und  $h$  durch

$$u(x) = \sup_{t \in I} (t - \pi_I r(x, t)),$$

$$h(x, t) = \pi_X r(x, t).$$

Die Funktion  $u$  ist stetig, da  $I$  kompakt ist. Die Eigenschaften (a)–(c) sind leicht zu prüfen, also folgt (1).  $\square$

Wenn  $A$  abgeschlossen ist, erhalten wir sogar  $A = u^{-1}(0)$  im Schritt (3)  $\implies$  (1).

3.61. FOLGERUNG (aus Proposition 3.60). *Es seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  Kofaserungen mit  $A \subset X$  und  $B \subset Y$  abgeschlossen. Dann ist auch  $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$  Kofaserung.*

BEWEIS. Wir nehmen an, dass  $(X, A)$  mit  $u: X \rightarrow I$  und  $h: X \times I \rightarrow X$  sowie  $(Y, B)$  mit  $v: Y \rightarrow I$  und  $k: Y \times I \rightarrow Y$  zu Umgebungsdeformationsretrakten wie in Proposition 3.60 (1) werden, wobei  $A = u^{-1}(0)$  und  $B = v^{-1}(0)$ . Dann ist auch  $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$  ein Umgebungsdeformationsretrakt mit  $x: X \times Y \rightarrow I$  und  $\ell: X \times Y \times I \rightarrow X \times Y$ , mit

$$w(x, y) = \min(u(x), v(y)),$$

$$\ell(x, y, t) = \left( h(x, \min(t, v(y))), k(y, \min(t, u(x))) \right). \quad \square$$

Wir benutzen als nächstes die Homotopieausdehnungseigenschaft, um interessante Aussagen über Kofaserungen zu beweisen.

3.62. PROPOSITION. *Es sei  $(X, A)$  eine abgeschlossene Kofaserung. Falls  $A$  zusammenziehbar ist, ist die Quotientenabbildung  $X \rightarrow X/A$  eine Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Es bezeichne  $F: X \rightarrow X/A$  die Quotientenabbildung. Es sei  $h: A \times I \rightarrow A$  eine Homotopie zwischen  $\text{id}_A$  und der konstanten Abbildung auf den Punkt  $a_0 \in A \subset X$ . Mit der Homotopieausdehnungseigenschaft erhalten wir eine Homotopie  $H: X \times I \rightarrow X$  mit  $H|_{A \times I} = h$  und  $H(\cdot, 0) = \text{id}_X$ . Da  $H(a, 1) = a_0$  für alle  $a \in A$ , induziert  $H(\cdot, 1)$  eine Abbildung  $G: X/A \rightarrow X$ . Da  $G(F(x)) = H(x, 1)$  für alle  $x \in X$ , ist  $H$  eine Homotopie zwischen  $\text{id}_X$  und  $G \circ F$ .

Da  $H(a, t) = h(a, t) \in A$  für alle  $a \in A$ , induziert  $H$  eine Abbildung  $\bar{H}: (X/A) \times I \rightarrow X/A$ , und es gilt  $\bar{H}(\cdot, 1) = F \circ G$ . Also ist  $\bar{H}$  eine Homotopie zwischen  $\text{id}_{X/A}$  und  $F \circ G$ .  $\square$

In Folgerung 1.75 haben wir Pushouts kennengelernt. Wenn  $A \subset X$  Teilmenge und  $f: A \rightarrow B$  stetig ist, schreiben wir hier  $X \cup_f B$  statt  $B \cup_f X$ . Dieser Begriff ist übrigens dual zum Faserprodukt oder Pullback aus Übung 3.114.

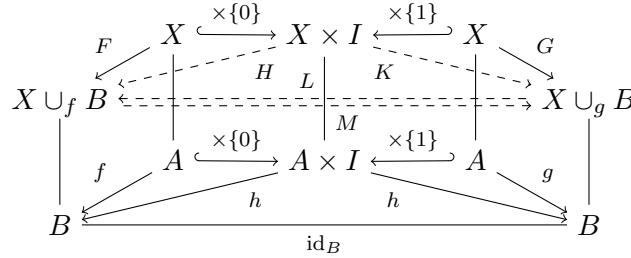
3.63. BEISPIEL. Es sei  $A \subset X$  Teilmenge und  $f: A \rightarrow \text{pt}$  die konstante Abbildung, dann ist  $X \cup_f \text{pt}$  homöomorph zum Quotienten  $X/A$ .

Das nächste Resultat ist eine wichtige Übung, siehe 3.126.

3.64. PROPOSITION. *Es sei  $(X, A)$  eine abgeschlossene Kofaserung und  $f: A \rightarrow B$  stetig. Dann ist auch  $(X \cup_f B, B)$  eine abgeschlossene Kofaserung.*  $\square$

3.65. PROPOSITION. *Es sei  $(X, A)$  eine Kofaserung, und  $f, g: A \rightarrow B$  seien homotop. Dann sind die Pushouts  $X \cup_f B$  und  $X \cup_g B$  homotopieäquivalent relativ zu  $B$ .*

BEWEIS. Es sei  $h: A \times I \rightarrow B$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ , und mit  $F: X \rightarrow X \cup_f B$  und  $G: X \rightarrow X \cup_g B$  bezeichnen wir die Strukturabbildungen der Pushouts. Mit der Homotopieausdehnungseigenschaft erhalten wir eine Homotopie  $H: X \times I \rightarrow X \cup_f B$ , die  $F$  und  $h$  fortsetzt.



Für alle  $a \in A$  gilt  $H(a, 1) = h(a, 1) = g(a) = \text{id}_B(g(a))$ . Wegen der Pushouteigenschaft von  $X \cup_g B$  induziert  $H(\cdot, 1)$  eine Abbildung  $L: X \cup_g B \rightarrow X \cup_f B$  mit  $L|_B = \text{id}_B$ , so dass  $H: F \sim L \circ G$ .

Analog können wir die Homotopieausdehnungseigenschaft „spiegelverkehrt“ anwenden und erhalten  $M: X \cup_f B \rightarrow X \cup_g B$  mit  $M|_B = \text{id}_B$  und eine Homotopie  $K: M \circ F \sim G$  mit  $K|_{A \times I} = h$ .

Unser nächstes Ziel ist eine Homotopie  $\Phi$  zwischen  $\text{id}_{X \cup_f B}$  und  $L \circ M$ . Definiere Abbildungen  $N: X \times (\partial I^2 \setminus (\{1\} \times (0, 1))) \rightarrow X \cup_f B$  und  $p: A \times I^2 \rightarrow B$  durch

$$N(x, t, 0) = F(x), \quad N(x, 0, s) = H(x, s), \quad N(x, t, 1) = (L \circ K)(x, 1 - t),$$

$$\text{und} \quad p(a, t, s) = h(a, s(1 - t)).$$

Auf  $A \times (\partial I^2 \setminus (\{1\} \times (0, 1)))$  stimmen  $N$  und  $p$  überein, denn nach Konstruktion von  $H, K, L$  gilt

$$N(a, t, 0) = f(a) = h(a, 0), \quad N(a, 0, s) = h(a, s), \quad \text{und} \quad N(a, t, 1) = (\text{id}_B \circ h)(a, 1 - t).$$

Nach Bemerkung 3.23 sind die Paare  $(I^2, \partial I^2 \setminus (\{1\} \times (0, 1)))$  und  $(I^2, I \times \{0\})$  homöomorph. Außerdem ist  $(X \times I, A \times I)$  eine Kofaserung (Übung 3.123). Mit der Homotopieausdehnungseigenschaft erhalten wir also eine Fortsetzung  $P: X \times I^2 \rightarrow X \cup_f B$  von  $N$  und  $p$ .

In Übung 3.126 sehen wir, dass  $(X \cup_f B) \times I = (X \times I) \cup_{f \times \text{id}_I} (B \times I)$  ein Pushout ist. Die Abbildungen  $P(\cdot, 1, \cdot): X \times I \rightarrow X \cup_f B$  und  $\varphi: (B \times I) \rightarrow B \rightarrow X \cup_f B$  mit  $(b, s) = b$  erfüllen

$$P(a, 1, s) = h(a, 0) = f(a) = (\varphi \circ (f \times \text{id}_I))(a, s),$$

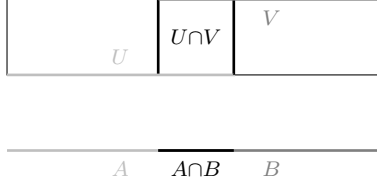


ABBILDUNG 3.7. Der Raum  $Y = U \cup V$

also induzieren sie eine Abbildung  $\Phi: (X \cup_f B) \times I \rightarrow X \cup_f B$ . Aufgrund der Eindeutigkeit der induzierten Abbildungen gilt  $P(\cdot, 0) = \text{id}_{X \cup_f B}$  und  $P(\cdot, 1) = L \circ M$ , denn

$$\begin{aligned} \Phi(b, t) &= \varphi(b, t) = \text{id}_B(b) = (L \circ M)(b), \\ \Phi(F(x), 0) &= N(x, 1, 0) = F(x) = (\text{id}_{X \cup_f B} \circ F)(x) \\ \text{und} \quad \Phi(F(x), 1) &= N(x, 1, 1) = (L \circ K)(x, 1) = (L \circ M \circ F)(x). \end{aligned}$$

Also ist  $\Phi$  eine Homotopie zwischen  $\text{id}_{X \cup_f B}$  und  $L \circ M$  relativ zu  $B$ . Analog konstruieren wir eine Homotopie zwischen  $\text{id}_{X \cup_g B}$  und  $M \circ L$  relativ zu  $B$ .  $\square$

Weitere Aussagen über Kofaserungen folgen in den nächsten Abschnitten. Anstelle beliebiger Paare betrachtet man in der Homotopietheorie besonders gern Kofaserungen. Daher wollen wir ein wichtiges Resultat auf eine Kofaserungs-Situation übertragen.

**3.66. FOLGERUNG** (Ausschneidungssatz für Kofaserungen). *Es seien  $A, B \subset X$  abgeschlossen mit  $A \cup B = X$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$ , so dass  $(A, A \cap B)$  eine  $p$ -zusammenhängende und  $(B, A \cap B)$  eine  $q$ -zusammenhängende Kofaserung ist, mit  $p, q \geq 0$ . Dann ist  $(X, B)$  ebenfalls eine Kofaserung, und  $i: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$  ist eine  $(p + q)$ -zusammenhängende Abbildung von Paaren.*

**BEWEIS.** Indem wir  $X$  als Pushout von  $A$  längs der Inklusion  $A \cap B \rightarrow B$  auffassen, sehen wir mit Proposition 3.64, dass  $(X, B)$  eine Kofaserung ist.

Wir betrachten die Teilmenge

$$Y = (A \times \{0\}) \cup ((A \cap B) \times I) \cup (B \times \{1\}) \subset X \times I,$$

siehe Abbildung 3.7. Nach Proposition 3.60 (2) existieren Homotopien  $H: A \times I^2 \rightarrow A \times I$  zwischen  $\text{id}_{A \times I}$  und einer Retraktion auf  $A \times \{0\} \cup (A \cap B) \times I$ , und  $K: B \times I^2 \rightarrow B \times I$  zwischen  $\text{id}_{B \times I}$  und einer Retraktion auf  $B \times \{1\} \cup (A \cap B) \times I$ . Indem wir  $H$  und  $K$  verkleben, sehen wir, dass  $Y$  Deformationsretrakt von  $X \times I$  ist, insbesondere induziert die Projektion  $X \times I \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz  $Y \rightarrow X$ .

Wir zerlegen jetzt  $Y$  in offene Teilmengen  $U = Y \cap (X \times [0, 1))$  und  $V = Y \cap (X \times (0, 1])$ . Dann induziert die obige Projektion Homotopieäquivalenzen  $U \rightarrow A$ ,  $V \rightarrow B$  und  $U \cap V \rightarrow A \cap B$ . Jetzt folgt die Aussage aus dem Ausschneidungssatz 3.38.  $\square$

Wir wollen den Ausschneidungssatz benutzen, um Aussagen über Quotienten von Paaren topologischer Räume zu machen.

**3.67. DEFINITION.** Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum. Dann definieren wir den (reduzierten) Kegel über  $X$  als

$$CX = (X \times I) / (X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I).$$

Es sei  $(X, A)$  ein punktiertes Paar, dann definieren wir den Homotopiequotienten  $X // A$  durch

$$X // A = X \cup_A CA = (X \sqcup CA) / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation „ $\sim$ “ erzeugt wird durch  $X \ni a \sim [(a, 0)] \in CA$  für alle  $a \in A$ .

3.68. BEMERKUNG. Wir nehmen an, dass  $(A, x_0)$  gut punktiert und  $(X, A)$  eine Kofaserung ist, dann ist auch  $(X, x_0)$  gut punktiert (Übung 3.123).

(1) Betrachte die drei Mengen

$$D = A \times \{1\} \subset E = A \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I \subset A \times I.$$

Das Intervall  $(I, 1)$  ist gut punktiert. Indem wir  $E = D \cup I \times \{x_0\}$  schreiben, sehen wir wie in Folgerung 3.66, dass  $(E, D)$  eine Kofaserung ist. Nach Folgerung 3.61 ist auch  $(A \times I, E)$  eine Kofaserung, also auch  $(A \times I, D)$  nach Übung 3.123.

Wir betrachten zunächst den (*unreduzierten*) Kegel  $(A \times I)/D$ . Er ist offensichtlich zusammenziehbar auf seinen Basispunkt. Wir betrachten  $(A \times I)/D$  als Pushout von  $(A \times I, E)$  zur Quotienten-Abbildung  $E \rightarrow E/D$  und sehen, dass  $((A \times I)/D, E/D)$  nach Proposition 3.64 eine Kofaserung ist. Der Raum  $E/D \cong I$  ist zusammenziehbar, also ist nach Proposition 3.62 die Quotientenabbildung  $(A \times I)/D \rightarrow CA$  eine Homotopieäquivalenz, und der reduzierte Kegel  $CA$  ist nach wie vor zusammenziehbar. Durch den Übergang zum reduzierten Kegel erhalten wir in erster Linie einen natürlichen (und guten) Basispunkt.

(2) Wir fassen  $X//A = X \cup_A CA$  als Pushout von  $(X, A)$  längs der Abbildung

$$A \cong A \times \{0\} \rightarrow A \times I \rightarrow CA$$

auf. Da  $(X, A)$  Kofaserung ist, ist  $(X \cup_A CA, CA)$  eine Kofaserung nach Proposition 3.64. Da  $CA$  zusammenziehbar ist, ist die Quotientenabbildung  $X//A = X \cup_A CA \rightarrow X/A$  eine Homotopieäquivalenz nach Proposition 3.62. Wenn wir auf die Annahme verzichten, dass  $(X, A)$  Kofaserung ist, erhalten wir einen Ersatz für den Quotienten mit besseren homotopietheoretischen Eigenschaften, daher der Name „Homotopiequotient“.

(3) Es bezeichne jetzt  $B = A \times \{0\} \subset A \times I$  die Basis des Kegels. Da  $(I, \{0, 1\}) \cong (D^1, S^0)$  eine Kofaserung ist, ist auch  $(A \times I, B \cup E)$  eine Kofaserung nach Folgerung 3.61. Mit den gleichen Argumenten wie oben sehen wir, dass  $(CA, A)$  eine Kofaserung ist, wobei wir  $A$  mit dem Bild von  $B$  identifizieren. Wir fassen jetzt  $X \cup_A CA$  als Pushout von  $(CA, A)$  längs der Inklusion  $A \rightarrow X$  auf. Nach Proposition 3.64 ist  $(X \cup_A CA, X)$  eine Kofaserung. Das erlaubt uns später, den Ausschneidungssatz in der Fassung 3.66 für Kofaserungen zu verwenden.

3.69. PROPOSITION. *Es sei  $(X, A)$  eine  $p$ -zusammenhängende Kofaserung mit  $p \geq 0$ , und  $A$  sei  $q$ -zusammenhängend. Dann ist die Quotientenabbildung  $(X, A) \rightarrow (X/A, *)$  eine  $p + q + 1$ -zusammenhängende Abbildung.*

BEWEIS. Anstelle von  $X/A$  betrachten wir den Raum  $X//A = X \cup_A CA$ . Da  $CA$  zusammenziehbar und  $A$  ein  $q$ -zusammenhängender Raum ist, ist  $(CA, A)$  ein  $(q + 1)$ -zusammenhängendes Paar nach Definition 3.35. Nach dem Ausschneidungssatz 3.66 ist die Inklusion  $(X, A) \rightarrow (X \cup_A CA, CA)$  eine  $(p + q + 1)$ -zusammenhängende Abbildung. Da  $CA$  zusammenziehbar und die Quotientenabbildung  $X \cup_A CA \rightarrow X/A$  eine Homotopieäquivalenz ist, gilt  $\pi_k(X \cup_A CA, CA) \cong \pi_k(X \cup_A CA) \cong \pi_k(X/A)$  für alle  $k$ .  $\square$

3.70. BEISPIEL. Wir betrachten das 1-zusammenhängende Paar  $(D^2, S^1)$ . Da  $S^1$  zusammenhängend ist, erhalten wir ein 2-zusammenhängende Quotientenabbildung  $(D^2, S^1) \rightarrow (S^2, *)$ . Tatsächlich gilt  $\pi_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_2(S^2)$ , aber  $0 \cong \pi_3(D^2, S^1) \rightarrow \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$  ist nicht mehr surjektiv.

3.71. FOLGERUNG (aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares  $(X, A)$ ). *Es sei  $(X, A)$  eine  $p$ -zusammenhängende Kofaserung mit  $p \geq 0$ , und  $A$  sei  $q$ -zusammenhängend. Dann erhalten wir eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longleftarrow \pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X/A) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \pi_{p+q}(X) \longleftarrow \pi_{p+q}(A). \quad \square$$

### 3.g. Der Freudenthalsche Einhängungssatz

Wir definieren das reduzierte Produkt und die Einhängung punktierter Räume und zeigen, dass Homotopiegruppen unter iterierter Einhängung „stabil“ werden. Die Eigenschaften dieser sogenannten stabilen Homotopiegruppen beleuchten wir dann im nächsten Abschnitt.

Wir erinnern uns an das Bouquet oder Wedge-Produkt punktierter Räume aus Definition 2.48. Es ist das Koprodukt in der Kategorie  $\mathcal{Top}_+$  nach Bemerkung 2.49. Indem wir Deformationsretraktionen  $X \times I^2 \rightarrow X \times I$  und  $Y \times I^2 \rightarrow Y \times I$  wie in Proposition 3.60 (2) entlang  $x_0 \times I \cong y_0 \times I$  verkleben, erhalten wir eine entsprechende Deformationsretraktion

$$(X \times I^2) \cup (Y \times I^2) \cong (X \vee Y) \times I^2 \longrightarrow (X \times I) \cup (Y \times I) \cong (X \vee Y) \times I .$$

Also sind endliche Bouquets gut punktierter Räume wieder gut punktiert. Später sehen wir, dass das auch für unendlich Bouquets noch gilt.

Die universellen Eigenschaften aus Satz 1.40 und 1.46 liefern stets Abbildungen vom Koprodukt einer Familie von Räumen in ihr Produkt. Wir können also  $X \vee Y$  nach  $X \times Y$  abbilden, indem wir  $x \in X$  auf  $(x, y_0)$  und  $y \in Y$  auf  $(x_0, y) \in X \times Y$  abbilden, und erhalten einen Unterraum des kartesischen Produktes.

3.72. DEFINITION. Es seien  $(X, x_0), (Y, y_0)$  punktierte Räume, dann definieren wir das *reduzierte* (oder auch *Smash-*) *Produkt* durch

$$(X, x_0) \wedge (Y, y_0) = (X \times Y) / (X \vee Y) .$$

Für  $x \in X, y \in Y$  schreibe  $x \wedge y \in X \wedge Y$  für die Äquivalenzklasse des Punktes  $(x, y)$ . Seien  $(X, A), (Y, B)$  punktierte Paare, dann setzen wir

$$(X, A) \wedge (Y, B) = (X \wedge Y, A \wedge Y \cup X \wedge B) .$$

Seien  $f: X_1 \rightarrow X_2, g: Y_1 \rightarrow Y_2$  punktierte Abbildungen von Räumen oder Paaren, dann definieren wir ihr reduziertes Produkt als

$$f \wedge g: X_1 \wedge Y_1 \rightarrow X_2 \wedge Y_2 \quad \text{mit} \quad (f \wedge g)(x \wedge y) = f(x) \wedge g(y) .$$

Die (*reduzierte*) *Einhängung* oder (*reduzierte*) *Suspension* von  $X$  oder  $(X, A)$  ist definiert als

$$SX = X \wedge S^1 \quad \text{beziehungsweise} \quad (SX, SA) .$$

Die Einhängung einer punktierten Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist definiert als

$$Sf = f \wedge \text{id}_{S^1}: SX \rightarrow SY .$$

Später werden wir die Basispunkte des Öfteren nicht mitschreiben.

3.73. BEISPIEL. Es folgen einige wichtige elementare Beispiele.

(1) Der reduzierte Kegel von  $X$  aus Definition 3.67 lässt sich auch darstellen als  $CX = (X, x_0) \wedge (I, 1)$ .

(2) Es gilt  $S^k \wedge S^\ell \cong S^{k+\ell}$ . Formal sieht man das am einfachsten mit Hilfe der Homöomorphismen

$$S^k \wedge S^\ell \cong (I^k / \partial I^k) \wedge (I^\ell / \partial I^\ell) \cong I^{k+\ell} / (\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial I^\ell) = I^{k+\ell} / \partial I^{k+\ell} \cong S^{k+\ell} .$$

(3) Es gilt  $S^k \wedge (D^\ell, S^{\ell-1}) \cong (D^{k+\ell}, S^{k+\ell-1})$ . Hierzu betrachten wir

$$\begin{aligned} S^k \wedge (D^\ell, S^{\ell-1}) &\cong (I^k / \partial I^k) \wedge (I^\ell / \partial' I^\ell, \partial I^\ell / \partial' I^\ell) \\ &\cong (I^{k+\ell} / \underbrace{(\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial' I^\ell)}_{=\partial' I^{k+\ell}}, (\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial I^\ell) / \partial' I^{k+\ell}) \cong (D^{k+\ell}, S^{k+\ell-1}) . \end{aligned}$$

3.74. BEMERKUNG. Es folgen einige elementare Eigenschaften.



- (1) Das reduzierte Produkt von Abbildungen ist mit der Verkettung verträglich:

$$(f_1 \wedge g_1) \circ (f_2 \wedge g_2) = (f_1 \circ f_2) \wedge (g_1 \circ g_2) .$$

Insbesondere definiert die Einhängung einen Funktor  $S: \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Top}_+$ .

- (2) Das reduzierte Produkt punktierter Räume oder Paare ist genau wie das kartesische Produkt (jeweils bis auf natürliche Homöomorphismen) assoziativ und kommutativ. Insbesondere können wir die Einhängung iterieren und erhalten

$$S^k X \cong (\cdots (X \wedge S^1) \wedge \cdots) \wedge S^1 \cong X \wedge S^k .$$

Außerdem gilt

$$S^k(X \wedge Y) \cong X \wedge Y \wedge S^k \cong X \wedge (S^k Y) \cong (S^k X) \wedge Y .$$

- (3) Es gilt (bis auf einen natürlichen Homöomorphismus) das Distributivgesetz

$$(X \vee Y) \wedge Z \cong (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) ,$$

und analog für das reduzierte Produkt von links (Übung 3.128), analog zum Distributivgesetz von disjunkter Vereinigung und kartesischem Produkt. Insbesondere gilt auch

$$S^k(X \vee Y) \cong S^k X \vee S^k Y .$$

- (4) Es gilt (bis auf einen natürlichen Homöomorphismus), dass

$$X \wedge S^0 \cong X \cong S^0 \wedge X .$$

Insbesondere gilt  $S^k X \cong X \wedge S^k$  auch für  $k \geq 0$ .

- (5) Ein reduziertes Produkt gut punktierter Räume ist wieder gut punktiert. Dazu benutzen wir Folgerung 3.61 und Proposition 3.64, und stellen  $X \wedge Y$  als Pushout der Kofaserung  $(X \times Y, X \vee Y)$  längs der konstanten Abbildung  $X \vee Y \rightarrow \text{pt}$  dar.

Genauso ist ein reduziertes Produkt gut punktierter, abgeschlossener Kofaserungen wieder eine gut punktierte, abgeschlossene Kofaserung (Übung 3.129). Also erhalten wir also auch einen Einhängungsfunktor für gut punktierte, abgeschlossene Kofaserungen mit

$$S^k(X, A) = (S^k X, S^k A) .$$

- (6) Seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  gut punktierte, abgeschlossene Kofaserungen, und sei  $(Z, C) = (X, A) \wedge (Y, B)$ , dann gilt  $Z/C \cong (X/A) \wedge (Y/B)$ . Eine analoge Eigenschaft haben wir in Beispiel 3.73 (2) bereits benutzt.

Man beachte, dass das reduzierte Produkt nicht die universelle Eigenschaft eines Produktes aus Satz 1.46 auf  $\mathcal{Top}_+$  erfüllt — diese Rolle übernimmt das punktierte kartesische Produkt, wie wir bereits aus Übung 3.106 wissen. Stattdessen legen die obigen Eigenschaften nahe, es als eine Art Tensorprodukt zu betrachten. Diesen Standpunkt werden wir in Abschnitt 4.a noch näher beleuchten.

3.75. SATZ (Freudenthalscher Einhängungssatz). *Es sei  $X$  ein  $n$ -zusammenhängender, gut punktierter Raum, dann ist der Einhängungshomomorphismus*

$$S: \pi_k(X) \rightarrow \pi_{k+1}(SX)$$

*ein Isomorphismus für  $k \leq 2n$  und surjektiv für  $k = 2n + 1$ . Insbesondere ist  $SX$  ein  $(n + 1)$ -zusammenhängender Raum.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, bemerken wir, dass wir genau dieses Verhalten im Falle  $X = S^n$  bereits in Satz 3.42 (4) beobachten konnten.

BEWEIS. Wir erinnern uns an den reduzierten Kegel  $CX$  aus Definition 3.67. Wir hatten in Bemerkung 3.68 (3) die Basis des Kegels  $CX$  mit  $X$  identifiziert und gezeigt, dass  $(CX, X)$  eine Kofaserung ist. Für den Quotienten erhalten wir

$$CX/X \cong (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) \cong (X \times S^1)/(X \vee S^1) \cong SX .$$

Wir fahren ähnlich fort wie im Beweis des Satzes 3.42 von Brouwer und Hopf. Da  $CX$  zusammenziehbar ist, erhalten wir in der langen exakten Homotopiesequenz 3.19 des Paares  $(CX, X)$  einen Isomorphismus  $\partial: \pi_{k+1}(CX, X) \xrightarrow{\cong} \pi_k(X)$ . Die Umkehrabbildung wird induziert von  $f \mapsto f \wedge \text{id}_{(I,1)}$ . Wir schalten die Quotientenabbildung  $q: CX \rightarrow SX$  nach und erhalten die gesuchte Abbildung

$$S: \pi_k(X) \xrightarrow{\partial^{-1}} \pi_{k+1}(CX, X) \xrightarrow{q_*} \pi_{k+1}(SX) .$$

Da  $X$  ein  $n$ -zusammenhängender Raum und  $CX$  zusammenziehbar ist, ist  $(CX, X)$  ein  $(n+1)$ -zusammenhängendes Paar. Unsere Behauptung folgt also aus Proposition 3.69 über die Quotientenabbildung  $q$ .  $\square$

### 3.h. Stabile Homotopiegruppen

Wir benutzen den Freudenthalschen Einhängungssatz, um stabile Homotopiegruppen zu definieren. Anschließend beweisen wir einige angenehme Eigenschaften dieser Funktoren. Unter anderem können wir abgeschlossene Kofaserungen durch ihre Quotienten ersetzen, ohne höheren Zusammenhang vorauszusetzen. Tatsächlich liefert stabile Homotopietheorie den Prototyp für eine Homologietheorie. Allerdings bezahlen wir auch einen Preis: die einfachen Formeln für Produkte und die lange exakte Sequenz für Faserbündel gehen verloren.

3.76. BEMERKUNG. Wir betrachten Abbildungen zwischen Einhängungen.

- (1) Es seien  $X, Y$  punktierte Räume. Auf der Menge  $[SX, Y]$  der punktierten Homotopieklassen von Abbildungen  $SX \rightarrow Y$  können wir wie in den Definitionen 2.13 und 3.1 eine Gruppenstruktur definieren durch

$$(f + g)(x \wedge t) = \begin{cases} f(x \wedge (2t)) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ g(x \wedge (2t - 1)) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn für  $t \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  bildet sie auf den Basispunkt  $y_0$  ab, ebenso wie im Falle, dass  $x = x_0$ .

- (2) Indem wir diese Konstruktion iterieren, erhalten wir Gruppenstrukturen auch auf  $[S^k X, Y]$  für alle  $k \geq 1$ . Im Falle  $k \geq 2$  ist  $[S^k X, Y]$  abelsch wie in Proposition 3.5 (3).  
(3) Als Spezialfall der obigen Konstruktion betrachten wir  $[S^k X, S^k Y]$ . Da Einhängung ein Funktor ist, erhalten wir eine Abbildung

$$S: [S^k X, S^k Y] \rightarrow [S^{k+1} X, S^{k+1} Y] \quad \text{mit} \quad f \mapsto Sf .$$

Nach Bemerkung 3.74 (2) ist das reduzierte Produkt assoziativ und kommutativ. Wir können also dafür sorgen, dass die „neue“ Kopie von  $S^1$  in  $S^{k+1} X = S(S^k X)$  nicht diejenige ist, mit der wir oben die Gruppenstruktur definiert haben. Daher ist  $S: [S^k X, S^k Y] \rightarrow [S^{k+1} X, S^{k+1} Y]$  ein Gruppenhomomorphismus.

- (4) Wir wissen aus Übung 3.117, dass  $[S^n, S^n]$  mit der Hintereinanderschaltung zu einem Ring wird. Analog sehen wir, dass Hintereinanderausführung eine bilineare Abbildung

$$[S^n X, S^n Y] \times [S^n Y \times S^n Z] \xrightarrow{\circ} [S^n X, S^n Z]$$

liefert.

In Folgerung 1.76 haben wir die universelle Eigenschaft des Kolimes kennengelernt und Kolimiten für Familien topologischer Räume definiert. Auch in der Kategorie der abelschen Gruppen gibt es Kolimiten. Sei dazu  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Familie abelscher Gruppen mit Homomorphismen  $f_{k\ell}: G_k \rightarrow G_\ell$ , so dass  $f_{k\ell} \circ f_{jk} = f_{j\ell}$  für alle  $j \leq k \leq \ell$ . Dann definieren wir in Analogie zu (1.4) den Kolimes

$$G = \varinjlim G_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} G_k / \sim ,$$

wobei  $G_j \ni g_j \sim g_k \in G_k$  genau dann gelte, wenn es ein  $\ell \geq k, j$  gibt, so dass  $f_{j\ell}(g_j) = f_{k\ell}(g_k) \in G_\ell$ . Für jedes  $k$  erhalten wir eine natürliche Abbildung  $f_k: G_k \rightarrow G$  mit  $g_k \mapsto [g_k] \in G$ , so dass  $f_k = f_\ell \circ f_{k\ell}$  für alle  $k \leq \ell$ . Man kann sich davon überzeugen, dass  $G$  eine Gruppe ist, dass alle  $f_k$  Gruppenhomomorphismen sind, und dass  $(G, (f_k)_k)$  die universelle Eigenschaft eines Kolimes aus Folgerung 1.76 erfüllt. Beispiele gibt es in Übung 3.132.

Hier haben wir zunächst Abbildungen  $S: [S^k X, S^k Y] \rightarrow [S^{k+1} X, S^{k+1} Y]$ . Hintereinanderschalten von  $(\ell - k)$  dieser Abbildungen liefert  $f_{k\ell}: [S^k X, S^k Y] \rightarrow [S^\ell X, S^\ell Y]$ . Bei einem Kolimes kommt es nie auf die ersten Glieder in der Folge an. Daher stört es im Folgenden nicht, dass im Allgemeinen  $[X, Y]$  keine Gruppe und  $[SX, SY]$  nicht abelsch ist. Wir dürfen am Anfang der Folge sogar negative Indizes zulassen.

Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_k(X) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+1}(SX) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+2}(S^2X) & \longrightarrow & \cdots \\ \pi_k f \downarrow & & \pi_{k+1} S f \downarrow & & \pi_{k+1} S^2 f \downarrow & & \\ \pi_k(Y) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+1}(SY) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+2}(S^2Y) & \longrightarrow & \cdots , \end{array}$$

denn für  $u: S^k \rightarrow X$  gilt nach Bemerkung 3.74 (1), dass

$$(\pi_{k+1} S f)(S[u]) = [(f \wedge \text{id}_{S^1}) \circ (u \wedge \text{id}_{S^1})] = [(f \circ u) \wedge \text{id}_{S^1}] = S((\pi_k f)[u]) . \quad (3.6)$$

Die obere Reihe des Diagramms „konvergiert“ gegen den Kolimes der  $\pi_{k+n}(S^n X)$  für  $n \rightarrow \infty$ , die untere gegen den Kolimes der  $\pi_{k+n}(S^n Y)$ , und die Abbildungen  $\pi_{k+n} S^n f$  induzieren eine Abbildung zwischen diesen Kolimiten.

3.77. DEFINITION. Es seien  $X, Y$  punktierte Räume, dann definieren wir

$$[X, Y]^s = \varinjlim [S^n X, S^n Y] \in \mathcal{A}b .$$

Insbesondere definieren wir für alle  $k \in \mathbb{Z}$  die  $k$ -te stabile Homotopiegruppe von  $X$  als

$$\pi_k^s(X) = [S^k, X]^s = \varinjlim \pi_{k+n}(S^n X) \in \mathcal{A}b .$$

Für Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  definieren wir

$$\pi_k^s f = \varinjlim \pi_{k+n} S^n f: \pi_k^s(X) \rightarrow \pi_k^s(Y) .$$

Wir könnten jetzt eine „naive“ stabile Homotopiekategorie mit den gleichen Objekten wie in  $\mathcal{Top}_+$  und  $\mathcal{HTop}_+$  definieren, und als Morphismenmengen die Gruppen  $[X, Y]^s$  einsetzen. Diese Kategorie ist aber für Anwendungen nicht „stabil genug“: zum einen enthält sie zu wenig Objekte, so dass man später zu sogenannten „Spektren“ übergeht. Zum anderen enthält sie zu wenig Morphismen, so dass man stattdessen Folgen solcher Abbildungen  $f_k$  zwischen Teilmengen der  $k$ -ten Räume der Spektren betrachtet, dass jeder „Teil“ des  $k$ -ten Raumes für irgendein  $\ell \geq k$  im Definitionsbereich von  $f_\ell$  liegt. Im Falle der stabilen Homotopiegruppen sind diese Überlegungen allerdings nicht notwendig, so dass wir hier bereits das Wort „stabil“ benutzen dürfen.

3.78. PROPOSITION. Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  sind die stabilen Homotopiegruppen Funktoren

$$\pi_k^s: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Ab}. \quad \square$$

Ein Kolimes ist besonders leicht dann zu berechnen, wenn die Folge der betrachteten Objekte irgendwann stationär wird, das heißt, wenn die Abbildungen  $f_{k\ell}: G_k \rightarrow G_\ell$  für alle  $k, \ell \geq n_0$  Isomorphismen sind. In diesem Fall ist der Kolimes  $G$  natürlich isomorph zu allen Gruppen  $G_k$  mit  $k \geq n_0$ . Genau dieses Phänomen beobachten wir im Fall der stabilen Homotopiegruppen.

3.79. FOLGERUNG (aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.75). Für jeden gut punktierten topologischen Raum  $X$  gilt

$$\pi_k^s(X) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0, \text{ und} \\ \pi_{k+\ell}^s(S^\ell X) & \text{falls } k \geq 0 \text{ und } \ell \geq k + 2. \end{cases}$$

Wenn  $X$  ein  $n$ -zusammenhängender Raum ist, gilt sogar

$$\pi_k^s(X) \cong \begin{cases} \pi_k(X) & \text{falls } k \leq 2n, \text{ und} \\ \pi_{k+\ell}^s(S^\ell X) & \text{falls } k > 2n \text{ und } \ell \geq k - 2n. \end{cases} \quad \square$$

3.80. DEFINITION. Ein gutes Paar  $(X, A, x_0)$  ist eine abgeschlossene Kofaserung, bei der  $(A, x_0)$  gut punktiert ist.

Zu jedem guten Paar betrachten wir die Inklusionsabbildung  $i: A \rightarrow X$  und die Quotientenabbildung  $q: X \rightarrow X/A$ . Für Abbildungen  $f$  schreiben wir wieder kurz  $f_* = \pi_k^s f$ , wenn keine Missverständnisse zu erwarten sind.

3.81. SATZ (stabile Homotopiesequenz). Für gute Paare  $(X, A)$  erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}^s(A) \xleftarrow{\partial} \pi_k^s(X/A) \xleftarrow{q_*} \pi_k^s(X) \xleftarrow{i_*} \pi_k^s(A) \longleftarrow \cdots$$

Diese Sequenz haben wir in Folgerung 3.71 bereits für die „unstabilen“ Homotopiegruppen gesehen, allerdings hat sie dort auf beiden Seiten nach endlich vielen Schritten aufgehört.

BEWEIS. Aus Bemerkung 3.74 (6) folgt

$$S(X/A) \cong SX/(SA \cup (X \wedge *)) \cong SX/SA.$$

Die Behauptung folgt aus Folgerung 3.71, wenn wir zeigen können, dass die dortige Sequenz mit Einhängung verträglich ist, das heißt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(X) & \xleftarrow{\pi_{k-1}^i} & \pi_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(X/A) & \xleftarrow{\pi_k q} & \pi_k(X) & \longleftarrow & \cdots \\ & & s \downarrow & & s \downarrow & & s \downarrow & & s \downarrow & & \\ \cdots & \longleftarrow & \pi_k(SX) & \xleftarrow{\pi_k S i} & \pi_{k-1}(SA) & \xleftarrow{\partial} & \pi_{k+1}(SX/SA) & \xleftarrow{\pi_{k+1} S q_*} & \pi_{k+1}(SX) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

kommutiert. Denn dann erhalten wir die gesuchte Sequenz als Kolimes der obigen Sequenzen unter iterierter Einhängung. Dazu überlegen wir uns, dass die  $(n+1)$ -fach eingehängte Sequenz aus mindestens  $n$ -fach zusammenhängenden Räumen besteht, und sich daher rechts bei  $\pi_{2n}(S^{n+1}A)$  anfängt, was einen Beitrag zu  $\pi_{n-1}^s(A)$  liefert. Für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir also eine auf beiden Seiten unbeschränkte exakte Sequenz.

Die äußeren Quadrate der obigen Sequenz kommutieren wegen der Funktorialität der Einhängung, siehe (3.6). Für das mittlere Quadrat betrachten wir die Konstruktion von  $\partial$  in Satz 3.19

und Folgerung 3.71. Sei dazu  $p: (X, A) \rightarrow (X/A, *)$  die Quotientenabbildung, und seien  $X$  und  $A$  so hoch zusammenhängend, dass  $\pi_k p$  nach Proposition 3.69 ein Isomorphismus ist. Dann betrachte

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(X, A) & \xrightarrow[\cong]{\pi_k p} & \pi_k(X/A) \\ S \downarrow & & S \downarrow & & S \downarrow \\ \pi_k(SA) & \xleftarrow[\cong]{\partial \pi_{k+1}} & (SX, SA) & \xrightarrow[\cong]{\pi_{k+1}(Sp)} & \pi_k(SX/SA) . \end{array}$$

Die Kommutativität des rechten Quadrats folgt wie in (3.6). Es sei  $[u] \in \pi_k(X, A)$  repräsentiert durch

$$u: (I^k / \partial' I^k, \partial I^k / \partial' I^k) \rightarrow (X, A) .$$

Mit Beispiel 3.73 (3) sehen wir schließlich, dass

$$\begin{aligned} \partial S u &= \partial(u \wedge \text{id}_{S^1}) = (u \wedge \text{id}_{S^1})|_{(I^k \times \{0\}) / (\partial I^k \times \{0\})} \\ &= (u|_{(I^{k-1} \times \{0\}) / (\partial I^{k-1} \times \{0\})}) \wedge \text{id}_{S^1} = \partial u \wedge \text{id}_{S^1} = S \partial u . \end{aligned}$$

Also kommutieren  $S$  und  $\partial$ , und wir erhalten den Verbindungshomorphismus auch im Kolimes.

Die stabile lange exakte Sequenz im Satz ist natürlich, da die einzelnen instabilen Quotientensequenzen natürlich sind.  $\square$

3.82. BEMERKUNG. Da bei guten Paaren  $\pi_{k+n}(S^n X, S^n A) \cong \pi_{k+n}(S^n(X/A))$  für hinreichend große  $n$  gilt, können wir  $\pi_k^s(X, A) = \pi_k^s(X/A)$  definieren. Dann gilt eine lange exakte Sequenz für Paare wie in Satz 3.19. Den Ausschneidungssatz für stabile Homotopiegruppen bekommen wir geschenkt, denn wenn  $(A, A \cap B)$  und  $(B, A \cap B)$  gute Paare sind, gilt  $A/(A \cap B) \cong X/B$ , also erst recht  $\pi_k^s(A, A \cap B) \cong \pi_k^s(X, B)$ . Wir dürfen dabei aber nicht vergessen, dass sowohl Proposition 3.69 über Quotienten als auch der Freudenthalsche Einhängungssatz 3.75 wesentlich auf dem Ausschneidungssatz beruhen.

Es sei  $(X_j)_{j \in J}$  eine Familie gut punktierter Räume, und  $\iota_j: X_j \rightarrow X = \bigvee_{j \in J} X_j$  seien die Strukturabbildungen. Dann erhalten wir Abbildungen  $\iota_{j*}: \pi_k^s(X_j) \rightarrow \pi_k^s(X)$  für alle  $j \in J$ . Aufgrund der universellen Eigenschaft 1.41 des Koproduktes  $\bigoplus_{j \in J} \pi_k^s(X_j)$  induzieren diese Abbildungen eine eindeutige Abbildung

$$\bigoplus_{j \in J} \iota_{j*}: \bigoplus_{j \in J} \pi_k^s(X_j) \rightarrow \pi_k^s(X) = \pi_k^s\left(\bigvee_{j \in J} X_j\right) .$$

3.83. PROPOSITION. *Die obige Abbildung  $\bigoplus \iota_{j*}$  ist ein natürlicher Isomorphismus.*

Es folgt eine wichtige Vorüberlegung zum Beweis.

3.84. PROPOSITION. *Das Bouquet gut punktierter Räume ist gut punktiert.*

BEWEIS. Wir wählen für jedes  $j \in J$  eine Funktion  $u_j: X_j \rightarrow I$ , so dass  $\{x_j\} \subset u_j^{-1}(0)$ , und eine Homotopie  $h_j: X_j \times I \rightarrow X_j$  relativ zu  $x_j$  wie in Proposition 3.60 (1). Verkleben der  $u_j$  liefert eine stetige Abbildung

$$u: \bigvee_{j \in J} X_j \longrightarrow I .$$

Verkleben der Homotopien  $h_i$  liefert erst einmal nur eine stetige Abbildung

$$h: \left(\prod_{j \in J} (X_j \times I)\right) / \sim \longrightarrow X = \bigvee_{j \in J} X_j ,$$

wobei  $(\coprod_{j \in J} (X_j \times I)) / \sim$  die gleiche Menge wie  $X \times I$  bezeichnet, aber versehen mit der durch die Verklebung der Unterräume  $X_j \times I$  längs  $\{x_j\} \times I$  induzierten Quotiententopologie. Wir müssen überprüfen, dass die Abbildung  $h$  auch als Homotopie  $h: X \times I \rightarrow X$  stetig ist.

Die Abbildungen  $\iota_j \times \text{id}_I: X_j \times I \rightarrow (\bigvee_{j \in J} X_j) \times I$  induzieren eine stetige, bijektive Abbildung

$$\left( \prod_{j \in J} (X_j \times I) \right) / \sim \longrightarrow X \times I = \left( \bigvee_{j \in J} X_j \right) \times I.$$

Die Topologie auf  $X \times I$  ist also unter Umständen gröber als auf  $(\coprod_{j \in J} (X_j \times I)) / \sim$ . Da die Punkte  $\{x_j\}$  nach Voraussetzung in  $X_j$  abgeschlossen sind, hat jeder Punkt  $(x, t) \in X \times I$  mit  $x \in X_j \setminus \{x_j\}$  in beiden Topologien eine Umgebungsbasis aus Produkten offener Umgebungen von  $x$  in  $X_j$  mit offenen Intervallen, die  $t$  enthalten. Also ist  $h$  an einem solchen Punkt auch in der Produkttopologie auf  $X \times I$  stetig.

Es bleiben also nur die Punkte  $(*, t)$  zu betrachten. Da alle  $h_i$  Homotopien relativ zu  $\{x_i\}$  sind, folgt  $h(*, t) = * \in X$  für alle  $t \in I$ . Wir wählen eine Umgebung  $V \subset X$  von  $*$  in der Quotiententopologie auf  $X$ , also ein Bouquet von Umgebungen  $V_j \subset X_j$  von  $x_j$ . Da  $I$  kompakt ist, finden wir für jedes  $j$  eine Umgebung  $U_j \subset X_j$  von  $x_j$  mit  $U_j \times I \subset h_j^{-1}(V_j)$ . Dann ist  $U = \bigvee_{j \in J} U_j$  eine Umgebung von  $*$  in  $X$ , und  $U \times I \subset h^{-1}(*)$ . Also ist  $h$  auch entlang  $\{*\} \times I$  stetig.

Man überprüft jetzt leicht, dass  $h$  und  $u$  die Bedingungen aus Proposition 3.60 (1) erfüllt.  $\square$

**BEWEIS VON PROPOSITION 3.83.** Wir setzen wieder  $X = \bigvee_{j \in J} X_j$ . Für ein festes  $j \in J$  induzieren  $\text{id}_{X_j}$  und die konstanten Abbildungen  $p_{j'}: X_{j'} \rightarrow \{x_j\}$  für alle  $j' \in J \setminus \{j\}$  eine Kollaps-Abbildung  $q_j: X \rightarrow X_j$ . Nach der universellen Eigenschaft 1.47 des Produktes erhalten wir eine eindeutige Abbildung

$$\prod_{j \in J} q_{j*}: \pi_k^s \left( \bigvee_{j \in J} X_j \right) \rightarrow \prod_{j \in J} \pi_k^s(X_j).$$

Da  $q_j \circ \iota_j = \text{id}_{X_j}$ , während  $q_j \circ \iota_{j'}$  für  $j' \neq j$  die konstante Abbildung auf  $x_j$  liefert, ist die Komposition der beiden obigen Abbildungen

$$\left( \prod_{j \in J} q_{j*} \right) \circ \left( \bigoplus_{j \in J} \iota_{j*} \right): \bigoplus_{j \in J} \pi_k^s(X_j) \longrightarrow \prod_{j \in J} \pi_k^s(X_j)$$

die kanonische Abbildung vom Koproduct ins Produkt, die man in jeder *punktierten Kategorie* (Kategorie mit Nullobjekt, also mit gleichzeitig initialem und terminalem Objekt — hier pt) ähnlich wie oben definieren kann. Für abelsche Gruppen ist diese Abbildung stets injektiv, also haben wir die Injektivität von  $\bigoplus \iota_{j*}$  gezeigt.

Falls die Indexmenge  $J = \{1, \dots, N\}$  endlich ist, zeigen wir Surjektivität durch Induktion über  $N$ . Dazu betrachten wir das Paar  $(\bigvee_{j=1}^N X_j, \bigvee_{j=1}^{N-1} X_j)$  und erhalten eine lange exakte Sequenz

$$\dots \leftarrow \pi_k^s(X_N) \xrightleftharpoons[\iota_{N*}]{q_{N*}} \pi_k^s \left( \bigvee_{j=1}^N X_j \right) \leftarrow \pi_k^s \left( \bigvee_{j=1}^{N-1} X_j \right) \leftarrow \dots$$

aus Satz 3.81. Aus  $q_{N*} \circ \iota_{N*} = \text{id}_{\pi_k^s(X_N)}$  folgt die Surjektivität von  $q_{N*}$ , insbesondere sind die Verbindungshomomorphismen 0, und die obige Sequenz zerfällt in eine Folge kurzer exakter Sequenzen, die allesamt spalten. Induktiv erhalten wir

$$\pi_k^s \left( \bigvee_{j=1}^N X_j \right) \cong \pi_k^s \left( \bigvee_{j=1}^{N-1} X_j \right) \oplus \pi_k^s(X_N) \cong \bigoplus_{i=1}^N \pi_k^s(X_j).$$

Im Falle einer unendlichen Indexmenge zeigen wir, dass jedes Element von  $\pi_k^s(X)$  einen Repräsentanten in einem Bouquet von endlich vielen der  $X_j$  besitzt. Dazu wählen wir zunächst einen

Repräsentanten  $[f] \in \pi_{k+n}(S^n X)$ , der wiederum dargestellt wird durch

$$f: S^{k+n} \longrightarrow S^n X = S^n \bigvee_{j \in J} X_j .$$

Da  $X$  nach Proposition 3.84 gut punktiert ist, ist auch  $S^n X$  nach Bemerkung 3.74 (5) gut punktiert. Wir bestimmen  $u: S^n X \rightarrow I$  und  $h: S^n X \times I \rightarrow S^n X$  wie in Proposition 3.60 (1). Dann erhalten wir eine offene Umgebung  $U = u^{-1}([0, 1))$  vom Basispunkt  $* \in S^n X$ , so dass  $h$  die Menge  $U$  in  $S^n X$  relativ zu  $*$  auf  $*$  zusammenzieht. Außerdem sei  $U_j = S^n X_j \setminus \{*\} \subset S^n X$ , dann ist  $U_j$  ebenfalls offen, und die Mengen  $U$  und  $(U_j)_{j \in J}$  überdecken  $S^n X$ .

Da  $f$  stetig und  $S^{k+n}$  kompakt ist, existiert eine endlich Teilmenge  $J_0 \subset J$ , so dass

$$S^{k+n} = f^{-1}(U) \cup \bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j) .$$

Nach der Konstruktion in Proposition 3.84 und Folgerung 3.61 bildet die obige Homotopie  $h$  jede Teilmenge der Form  $S^n X_j \times I \subset S^n X \times I$  wieder auf  $S^n X_j$  ab. Außerdem bildet  $h(\cdot, 1)$  die Menge  $U \cap X_j$  auf den Basispunkt  $*$  ab. Wir setzen daher  $g = h(\cdot, 1) \circ f$  und erhalten eine Abbildung  $g \sim f = h(\cdot, 0) \circ f$  mit

$$g: S^{k+n} \longrightarrow \bigvee_{j \in J_0} S^n X_j \hookrightarrow \bigvee_{j \in J} S^n X_j .$$

Somit liegt  $[f] = [g]$  im Bild von  $\bigoplus_{J_0} \pi_k^s(X_j) \cong \pi_k^s(\bigvee_{j \in J_0} X_j)$ , also auch im Bild von  $\bigoplus_J \pi_k^s(X_j)$ .  $\square$

**3.85. BEMERKUNG.** Wir haben jetzt bei einigen bekannten Resultaten die lästigen Zusammenhangsvoraussetzung durch den Übergang zu stabilen Homotopiegruppen eliminiert. Wir haben aber auch einige schöne Eigenschaften verloren: da die Einhängung eines kartesischen Produktes kein Produkt mehr ist, geht die Produktformel aus Beispiel 3.28 verloren, genauso wie die lange exakte Homotopiesequenz 3.25 für Serre-Faserungen. Anstelle dieser Resultate treten Spektralsequenzen, die für viele Berechnungen zu sperrig sind.

Die Kunst im Umgang mit Homotopiegruppen besteht daher oft darin, möglichst viele Rechnungen im sogenannten „stabilen Bereich“ durchzuführen, also für solche  $k$ , für die  $\pi_k(X) \cong \pi_k^s(X)$  für den jeweiligen Raum  $X$  noch gilt.

### 3.i. Gerahmter Bordismus

Wir geben jetzt eine differentialtopologische Beschreibung der stabilen Homotopiegruppen. Der Begriff einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  sollte bekannt sein. Wir lassen im Folgenden übrigens auch die leere Menge als Untermannigfaltigkeit zu. In jedem Punkt  $p \in M$  spaltet sich  $\mathbb{R}^n$  auf in den Tangentialraum  $T_p M$  an  $M$  und den dazu senkrechten Normalenraum  $\nu_p M$ . Diese Unterräume des  $\mathbb{R}^n$  hängen stetig von  $p \in M$  ab, insbesondere bildet die Vereinigung aller  $\nu_p M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ , das *Normalenbündel*  $\nu M$  von  $M$ . Dabei identifizieren wir  $p \in M$  mit dem Nullvektor an der Stelle  $p$  und erhalten eine Einbettung  $M \hookrightarrow \nu M$ , den *Nullschnitt*.

Unter einer *Trivialisierung* des Normalenbündels von  $M$  verstehen wir eine stetige Abbildung  $\tau: \nu M \rightarrow M \times \mathbb{R}^{n-k}$ , so dass  $\tau_p: \nu_p M \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^{n-k}$  für alle  $p \in M$  ein linearer Isomorphismus ist. Äquivalent dazu können wir jedem  $p \in M$  auf stetige Weise einen Rahmen  $(v_1, \dots, v_{k-n})$ , das heißt, eine Basis von  $\nu_p M$ , zuordnen, so dass  $\tau(v_j) = (p, e_j) \in M \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Daher nennen wir  $\tau$  auch *Rahmung* von  $M$ .

Sei schließlich  $\tau$  eine Rahmung von  $M \subset \mathbb{R}^n$ , und sei  $J \subset \mathbb{R}$  ein Intervall der Länge  $> 0$ . Dann können wir das Normalenbündel  $\nu(J \times M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $J \times \nu M \rightarrow J \times M$  identifizieren, da die

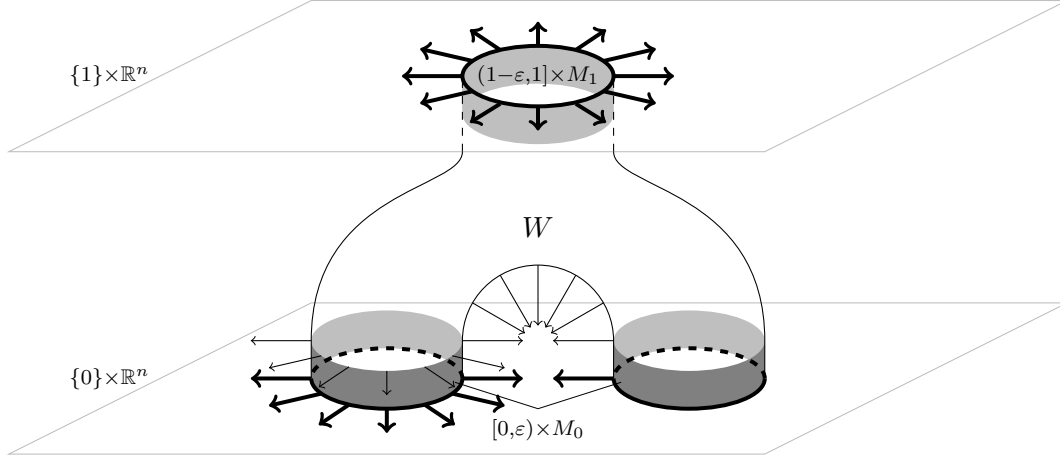


ABBILDUNG 3.8. Ein gerahmter Bordismus

zusätzliche Richtung im umgebenden Raum tangential zu  $J$  ist, also nicht zum Normalenbündel beiträgt. Daher induziert  $\tau$  eine Rahmung  $\tau \circ \pi_{\nu M} : \nu(J \times M) \cong J \times \nu M \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ .

3.86. DEFINITION. Es seien  $0 \leq k < n$ .

- (1) Eine *gerahmte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit* des  $\mathbb{R}^n$  besteht aus
  - (a) einer glatten, kompakten  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  (ohne Rand) für ein  $n > k$ , und
  - (b) einer Trivialisierung  $\tau : \nu M \rightarrow M \times \mathbb{R}^{n-k}$  des Normalenbündels von  $M$  in  $\mathbb{R}^n$ , der *Rahmung*.
- (2) Ein *gerahmter Bordismus* zwischen zwei  $k$ -dimensionalen gerahmten Untermannigfaltigkeiten  $(M_i, \tau_i)$  ( $i = 0, 1$ ) des  $\mathbb{R}^n$  besteht aus
  - (a) einer glatten, kompakten  $(k+1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $W \subset I \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit Rand  $\partial W \subset \partial I \times \mathbb{R}^n$  mit *Krägen*

$$W \cap ([0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^n) = [0, \varepsilon) \times M_0 \quad \text{und} \quad W \cap ((1 - \varepsilon, 1] \times \mathbb{R}^n) = (1 - \varepsilon, 1] \times M_1$$

für ein geeignetes  $\varepsilon > 0$ , und

- (b) einer Trivialisierung  $\bar{\tau} : \nu W \rightarrow W \times \mathbb{R}^{n-k}$  von  $\nu W$ , so dass auf den Krägen

$$\begin{aligned} \bar{\tau}|_{[0, \varepsilon) \times M_0} &= \tau_0 \circ \pi_{\nu M_0} : \nu W|_{W \cap ([0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^n)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k} \\ \text{und} \quad \bar{\tau}|_{(1 - \varepsilon, 1] \times M_1} &= \tau_1 \circ \pi_{\nu M_1} : \nu W|_{W \cap ((1 - \varepsilon, 1] \times \mathbb{R}^n)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}. \end{aligned}$$

- (3) Zwei gerahmte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  heißen *gerahmt bordant*, wenn ein gerahmter Bordismus zwischen ihnen existiert. Es bezeichne  $\Omega_k^{\text{fr}, n}$  die Menge aller gerahmten  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  bis auf gerahmten Bordismus.

In (2) schreiben wir

$$\partial(W, \bar{\tau}) = \partial_0(W, \bar{\tau}) \sqcup \partial_1(W, \bar{\tau}) \quad \text{mit} \quad \partial_i(W, \bar{\tau}) = (M_i, \tau_i).$$

Wenn  $\partial_1(W, \bar{\tau}) = \emptyset$  gilt, nennen wir  $(M_0, \tau_0)$  *gerahmt nullbordant* und  $(W, \bar{\tau})$  einen *gerahmten Nullbordismus* von  $(M_0, \tau_0)$ .

Die einzigen kompakten Untermannigfaltigkeiten, die wir uns gut vorstellen können, sind geschlossene Kurven im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  („Knoten“) sowie orientierbare Flächen im  $\mathbb{R}^3$ . Für alle diese



Untermannigfaltigkeiten finden wir Rahmungen (für Knoten sogar abzählbar viele nicht homotope). Es gibt aber auch Untermannigfaltigkeiten höherer Dimension und Kodimension, die keine Rahmungen zulassen.

Als Beispiel für einen Bordismus betrachten wir eine ‘‘Hose’’ wie in Abbildung 3.8, deren Rand aus zwei Kreisen in  $\{0\} \times \mathbb{R}^2$  und einem Kreis in  $\{1\} \times \mathbb{R}^2$  besteht. Wir erhalten eine kompatible Trivialisierung des Normalenbündels zum Beispiel, wenn wir jeweils für alle Kreise die nach außen beziehungsweise die nach innen weisenden Normalenvektoren gewählt haben.

3.87. BEMERKUNG. Wir überprüfen, dass ‘‘gerahmt bordant’’ eine Äquivalenzrelation definiert.

- (1) Sei  $(M, \tau)$  gerahmte Mannigfaltigkeit, dann ist  $W = I \times M$  ein Bordismus, und  $\tau$  induziert eine Trivialisierung  $\bar{\tau}$  von  $\nu W$ , die  $\tau$  an beiden Randkomponenten fortsetzt.
- (2) Sei  $W$  ein gerahmter Bordismus zwischen  $(M_0, \tau)$  und  $(M_1, \tau_1)$ . Spiegeln an der Ebene  $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}^n$  liefert einen Bordismus zwischen  $M_1$  und  $M_0$ , und die Trivialisierung  $\bar{\tau}$  lässt sich mitspiegeln.
- (3) Sei schließlich  $(W', \bar{\tau}')$  gerahmter Bordismus zwischen  $(M_0, \tau_0)$  und  $(M_1, \tau_1)$ , und  $(W'', \bar{\tau}'')$  sei gerahmter Bordismus zwischen  $(M_1, \tau_1)$  und  $(M_2, \tau_2)$ . Wir stauchen beide Bordismen auf  $[0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^n$  beziehungsweise  $[\frac{1}{2}, 1] \times \mathbb{R}^n$ , dann bildet die Vereinigung  $W$  aufgrund der Produktstruktur auf den Krägen wieder eine glatte Mannigfaltigkeit, und wir wählen  $\varepsilon = \min(\frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\varepsilon''}{2})$ . Die Trivialisierungen  $\bar{\tau}'$  und  $\bar{\tau}''$  stimmen nach Stauchung auf  $(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$  mit der von  $\tau_1$  induzierten Trivialisierung überein, und lassen sich daher auf ganz  $W$  fortsetzen.

Wir haben also gezeigt, dass gerahmter Bordismus eine wohldefinierte Äquivalenzrelation darstellt.

Sei  $(M, \tau)$  eine gerahmte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , und sei  $p \in M$ . Wir definieren eine Abbildung  $a: \nu M \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$a(p, v) = p + v .$$

An der Stelle  $(p, 0) \in M \times \{0\} \subset \nu M$  mit  $p \in M$  hat  $\nu M$  den Tangentialraum

$$T_{(p,0)}\nu M = T_p M \oplus \nu_p M \cong \mathbb{R}^n = T_p \mathbb{R}^n ,$$

und wir sehen, dass  $da_{(p,0)} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ . Nach dem Umkehrsatz ist  $a$  also ein lokaler Diffeomorphismus nahe des Nullschnitts  $M \subset \nu M$ . Da  $M$  kompakt ist, finden wir ein  $r > 0$ , so dass  $a: \nu^{(r)} M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Einbettung wird, wobei

$$\nu^{(r)} M = \{ v \in \nu_p M \mid |v| < r \} .$$

Wir definieren jetzt eine Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-k} \cong D^{n-k}/S^{n-k-1}$  durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tau_p(v)}{r} & \text{falls } x = a(p, v) \text{ für ein } p \in M \text{ und ein } v \in \nu_p M \text{ mit } |v| < r, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Diese Abbildung ist stetig auf im  $a$ . Sei jetzt  $U \subset S^{n-k}$  offene Umgebung von  $*$ . Dann ist  $a^{-1}(U)$  offene Umgebung von  $\mathbb{R}^n \setminus \text{im } a$ . Also ist  $f$  insgesamt stetig. Das Bild im  $a$  ist in einem Kompaktum  $K$  in  $\mathbb{R}^n$  enthalten, also wird  $\mathbb{R}^n \setminus K$  konstant auf  $*$  abgebildet. Also können wir  $f$  auf die Einpunktkompaktifizierung fortsetzen und erhalten  $f: S^n \rightarrow S^{n-k}$ .

3.88. SATZ (Pontryagin-Thom-Konstruktion, [Mi, Chapter 7]). Für  $0 \leq k < n$  gilt

$$\pi_n(S^{n-k}) \cong \Omega_k^{\text{fr}, n} .$$

BEWEIS. Der vollständige Beweis benötigt einige Sätzen aus der Differentialtopologie. Wir geben hier daher nur eine Beweisskizze und verweisen ansonsten auf [Mi].

Als erstes geben wir eine Umkehrabbildung zur obigen Konstruktion an. Dabei benutzen wir, dass es in jeder punktierten Homotopieklasse von Abbildungen  $f: S^n \rightarrow S^{n-k}$  einen glatten Repräsentanten gibt, für den der „Südpol“  $0 \in \mathbb{R}^{n-k} \cong S^{n-k} \setminus \{*\}$  regulärer Wert ist, und setzen

$$M = f^{-1}(0) \subset f^{-1}(S^{n-k} \setminus \{*\}) \subset \mathbb{R}^n .$$

Dann ist  $M$  eine glatte Untermannigfaltigkeit nach dem Satz über implizite Funktionen. Als Trivialisierung des Normalenbündels wählen wir einfach  $\tau = df|_{\nu M}$ .

Offensichtlich hängt  $(M, \tau)$  von der Wahl des Repräsentanten  $f$  von  $[f] \in \pi_n(S^{n-k})$  ab. Es sei also  $g$  ein weiterer glatter punktierter Repräsentant, für den  $0$  ein regulärer Wert ist. Dann können wir mit dem gleichen Satz wie oben eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$  durch eine glatte punktierte Homotopie approximieren, für die  $0$  ein regulärer Wert ist. Dabei können wir sogar annehmen, dass diese Homotopie nahe der Endpunkte stationär ist. Dann ist  $W = h^{-1}(0) \subset I \times \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit wie in Definition 3.86 (2a) und  $\bar{\tau} = dh|_{\nu W}$  eine Trivialisierung von  $\nu W$ , so dass  $(W, \bar{\tau})$  einen gerahmten Bordismus zwischen  $(M_0, \tau_0)$  und  $(M_1, \tau_1)$  darstellt.

Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung  $\Phi: \pi_n(S^{n-k}) \rightarrow \Omega_k^{\text{fr}, n}$ . Die Surjektivität haben wir oben bereits gezeigt, indem wir  $f$  zu  $(M, \tau)$  konstruiert haben. Injektivität erhalten wir, indem wir auf dem gleichen Wege zu einem gerahmten Bordismus zwischen  $(f_0^{-1}, df_0|_{\nu(f_0^{-1}(0))})$  und  $(f_1^{-1}, df_1|_{\nu(f_1^{-1}(0))})$  eine Homotopie  $h: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow D^{n-k}/S^{n-k-1}$  zwischen  $f_0$  und  $f_1$  angeben.  $\square$

3.89. BEMERKUNG. Für  $n \geq 2$  trägt  $\pi_n(S^{n-k})$  eine abelsche Gruppenstruktur. Auch  $\Omega_k^{\text{fr}, n}$  ist eine abelsche Gruppe für  $n \geq 2$ . Für die konstante Abbildung  $f \equiv *$  ist  $f^{-1}(0) = \emptyset$ , also ist das Nullelement die leere Menge.

Seien  $(M_0, \tau_0)$  und  $(M_1, \tau_1)$  gegeben. Beide Mannigfaltigkeiten sind kompakt, also beschränkt in  $\mathbb{R}^n$ . Wir können daher beide Mannigfaltigkeiten innerhalb  $\mathbb{R}^n$  in verschiedene Richtungen parallel so verschieben, dass sie disjunkt werden. Dann nehmen wir die disjunkte Vereinigung als Summe. Man überprüft leicht, dass verschiedene Verschiebungsvektoren gerahmt bordante Summen  $(M_0, \tau_0) + (M_1, \tau_1)$  liefern, und dass diese Summe genau der Summe in  $\pi_n(S^{n-k})$  entspricht.

Außerdem erhalten wir das gerahmte Inverse  $-(M, \tau)$  von  $(M, \tau)$ , indem wir  $M$  und  $\tau$  gemeinsam an einer Hyperbene  $H$  in  $\mathbb{R}^n$  spiegeln. Wenn wir diese Hyperbene disjunkt zu  $M$  wählen, stellen wir uns jetzt vor, dass  $(M, \tau)$  an der „Achse“  $H \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  auf sein Inverses „rotiert“. Die so erzeugte „Rotationsmannigfaltigkeit“ stauchen wir nach  $\mathbb{R}^n \times [0, 1)$  und erhalten einen Bordismus von  $(M, \tau) + (-(M, \tau))$  zur leeren Menge.

3.90. BEISPIEL. Für  $k = 0$  betrachten wir endliche Teilmengen  $M = (p_1, \dots, p_N)$  des  $\mathbb{R}^n$ . Der Einfachheit halber sei  $n \geq 2$ . Für jeden Punkt  $p_i$  fixieren wir eine Basis von  $\mathbb{R}^n$ . Ein gerahmter Bordismus zwischen  $M_0$  und  $M_1$  ist eine Sammlung von Kurven zwischen den Punkten aus beiden Mengen. Aufgrund der Rahmung verbindet eine Kurve mit zwei Randpunkten in  $M_0$  immer Punkte mit verschiedenen orientierten Basen, während eine Kurve von  $M_0$  nach  $M_1$  immer Punkte mit gleich orientierten Basen miteinander verbindet. Jetzt überzeugt man sich leicht, dass  $\Omega_0^{\text{fr}, n} \cong \mathbb{Z} \cong \pi_n(S^n)$  gilt. Man beachte, dass es uns soeben gelungen ist,  $\pi_n(S^n)$  ohne Benutzung des Ausschneidungssatzes und der Homotopiesequenz 3.25 für Faserungen zu bestimmen.

3.91. FOLGERUNG. *Es sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  punktierte Abbildung. Wenn ein Punkt  $p \in \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{*\}$  existiert, so dass  $f$  in einer Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $f^{-1}(p)$  glatt und  $p$  regulärer Wert ist, dann berechnet sich der Abbildungsgrad aus Definition 3.45 als*

$$\deg f = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \text{sign det } df_q . \quad \square$$

Später können wir mit dieser Formel einen Abbildungsgrad für Abbildungen zwischen kompakten orientierten Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension erklären.

In Abschnitt 3.j betrachten wir noch den Fall  $k = 1$ . Für größere  $k$  ist der Aufwand bei der Bestimmung von  $\pi_n(S^{n-k})$  mit der Pontryagin-Thom-Konstruktion so hoch, dass man lieber auf andere Methoden zurückgreift.

Wir wollen jetzt zu  $\pi_k^s(S^0)$  übergehen. Wir betrachten dazu die Inklusion  $\iota: \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Es sei  $(M, \tau)$  gerahmte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $M' = \iota(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  wieder Untermannigfaltigkeit mit Tangential- und Normalbündel

$$TM' = di(TM) \cong TM \quad \text{und} \quad \nu M' = d\iota(\nu M) \times \{0\} \times \mathbb{R} \cong \nu M \times \mathbb{R} .$$

Wir erweitern also  $\tau$  zu einer Trivialisierung

$$\tau' = \tau \times \text{id}_{\mathbb{R}}: \nu M' \cong \nu M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1-k} .$$

Mit gerahmten Bordismen verfahren wir analog und erhalten eine Abbildung

$$\iota_{\#}: \Omega_k^{\text{fr},n} \longrightarrow \Omega_k^{\text{fr},n+1} .$$

3.92. PROPOSITION. Für alle  $0 \leq k < n$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(S^{n-k}) & \xrightarrow{\cong} & \Omega_k^{\text{fr},n} \\ S \downarrow & & \downarrow \iota_{\#} \\ \pi_{n+1}(S^{n+1-k}) & \xrightarrow{\cong} & \Omega_k^{\text{fr},n+1} . \end{array}$$

BEWEIS. Der Einfachheit halber betrachten wir  $S^{n+1} = S^n \wedge S^1$  und  $S^{n+1-k} = S^{n-k} \wedge S^1$  und stabilisieren entsprechend in der letzten Koordinate. Sei  $f: S^n \rightarrow S^{n-k}$  wie im Beweis von Satz 3.88 eine glatte punktierte Abbildung, so dass  $0 \in \mathbb{R}^n = S^n \setminus \{0\}$  regulärer Wert ist, und es sei  $(M, \tau) = (f^{-1}(0), df|_{\nu(f^{-1}(0))})$ . Dann ist  $Sf = f \wedge \text{id}_{S^1}$  in einer Umgebung von  $(Sf)^{-1}(0)$  immer noch glatt und stimmt dort mit  $f \times \text{id}_{\mathbb{R}}$  überein. Daher erhalten wir

$$(Sf)^{-1}(0) = f^{-1}(0) \times \{0\} = M' \quad \text{und} \quad d(Sf)|_{\nu M'} = (df \times d\text{id}_{\mathbb{R}})|_{\nu M \times \mathbb{R}} = \tau' . \quad \square$$

3.93. DEFINITION. Für  $k \geq 0$  ist die  $k$ -te gerahmte Bordismusgruppe definiert durch

$$\Omega_k^{\text{fr}} = \varinjlim \Omega_k^{\text{fr},n} .$$

3.94. FOLGERUNG (Aus Satz 3.42 (4) und 3.88). Es gilt

$$\pi_k^s \cong \Omega_k^{\text{fr}} ,$$

insbesondere gilt  $\Omega_k^{\text{fr}} \cong \Omega_k^{\text{fr},n}$  für alle  $n \geq 2k + 2$ .  $\square$

Wir nennen  $(M, \tau)$  schlicht *gerahmte  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn es uns egal ist, in welchen  $\mathbb{R}^n$  wir  $(M, \tau)$  betrachten wollen — nur muss  $n$  eine gewisse Mindestgröße haben, typischerweise jedoch nicht mehr als  $2k + k$ . Genauso sprechen wir nur noch von gerahmten Bordismen  $(W, \bar{\tau})$  zwischen  $(M_0, \tau_0)$  und  $(M_1, \tau_1)$  — dabei müssen wir unter Umständen  $(M_0, \tau_0)$  und  $(M_1, \tau_1)$  erst in einen größeren  $\mathbb{R}^n$  einbetten. Als nächstes kommen wir zu einer geometrischen Interpretation der stabilen Homotopiegruppen  $\pi_k^s(X)$ , dabei betrachten wir direkt den Kolimes.

3.95. DEFINITION. Es sei  $X$  ein (nicht notwendig punktierter) topologischer Raum.

- (1) Ein *gerahmter singulärer  $k$ -Zykel* in  $X$  besteht aus
  - (a) einer gerahmten  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $(M, \tau)$  und
  - (b) einer Abbildung  $F: M \rightarrow X$ .
- (2) Zwei gerahmte singuläre Zykel  $(M_0, \tau_0, F_0)$  und  $(M_1, \tau_1, F_1)$  heißen *in  $X$  gerahmt bordant* oder auch *gerahmt homolog*, wenn es
  - (a) einen gerahmten Bordismus  $(W, \bar{\tau})$  zwischen  $(M_0, \tau_0)$  und  $(M_1, \tau_1)$  und
  - (b) eine Abbildung  $\bar{F}: W \rightarrow X$  mit  $\bar{F}|_{\partial_i M} = F_i$  für  $i \in \{0, 1\}$  gibt.

- (3) Die  $k$ -te gerahmte Bordismusgruppe  $\Omega_k^{\text{fr}}(X)$  von  $X$  sei die Menge aller gerahmten singulären  $k$ -Zykel in  $X$  bis auf gerahmten Bordismus.

Wir nennen die obigen Zykel „singulär“, weil wir nicht erwarten, dass  $F$  eine Einbettung ist — im schlimmsten Fall kann  $F$  sogar konstant sein.

3.96. BEMERKUNG. Es sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (1) Wie in Bemerkung 3.85 ist „gerahmt bordant“ in  $X$  eine Äquivalenzrelation.  
(2) Falls  $X = \text{pt}$  der einpunktige Raum ist, kommt für  $F$  immer nur die konstante Abbildung in Frage, also gilt

$$\Omega_k^{\text{fr}}(\text{pt}) = \Omega_k^{\text{fr}}.$$

- (3) Durch disjunkte Vereinigung der gerahmten Mannigfaltigkeiten  $(M, \tau)$  wird  $\Omega_k^{\text{fr}}(X)$  wie in Bemerkung 3.89 zu einer abelschen Gruppe. Dabei müssen die Bilder der einzelnen gerahmten Untermannigfaltigkeiten in  $X$  aber nicht disjunkt sein.  
(4) Es sei  $\varphi: X \rightarrow Y$  stetig. Dann induziert  $\varphi$  einen funktoriellen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi_*: \Omega_k^{\text{fr}}(X) \rightarrow \Omega_k^{\text{fr}}(Y)$$

durch  $\varphi_*(M, \tau, F) = (M, \tau, \varphi \circ F)$ . Sei  $\eta$  eine Homotopie zwischen  $\varphi$  und  $\psi: X \rightarrow Y$ , dann können wir  $\eta \circ (F \times \text{id}_I): M \times I \rightarrow Y$  als gerahmten Bordismus zwischen  $\varphi_*(M, \tau, F)$  und  $\psi_*(M, \tau, F)$  auffassen. Also ist gerahmter Bordismus ein Funktor

$$\Omega_k^{\text{fr}, n}: \mathcal{HTop} \rightarrow \mathcal{Ab}.$$

Es sei  $X$  ein topologischer Raum, dann erinnern wir uns an die Konstruktion

$$X_+ = X \sqcup \text{pt},$$

aus Abschnitt 3.a, wobei der zusätzliche Punkt  $*$  in  $\text{pt} = \{*\}$  der Basispunkt sei.

3.97. SATZ (Pontryagin-Thom-Konstruktion). *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$\pi_k^s(\cdot_+) \cong \Omega_k^{\text{fr}}: \mathcal{HTop} \rightarrow \mathcal{Ab}.$$

BEWEIS. Es sei  $f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge X_+$  Repräsentant eines Elementes von  $\pi_k^s(X_+)$ . Als erstes überlegen wir uns, dass

$$S^{n-k} \wedge X_+ = (S^{n-k} \times X \sqcup S^{n-k}) / (\{*\} \times X \sqcup S^n) \cong (S^{n-k} \times X) / (\{*\} \times X).$$

Wir bezeichnen den Basispunkt von  $S^{n-k} \wedge X_+$  wieder mit  $\{*\}$  und betrachten

$$V = (S^{n-k} \wedge X_+) \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^{n-k} \times X_+ \quad \text{und} \quad U = f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{*\}.$$

Dann sind  $V \subset S^{n-k} \wedge X_+$  und  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Die zusammengesetzte Abbildung

$$g: U \xrightarrow{f|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}^{n-k}}} \mathbb{R}^{n-k}$$

ist *eigentlich*, das heißt, Urbilder kompakter Mengen sind kompakt. Denn sei  $K \subset \mathbb{R}^{n-k}$  kompakt, dann sind  $S^{n-k} \setminus K$  und  $(S^{n-k} \setminus K) \wedge X_+$  offen und  $g^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \setminus K) \cup (S^n \setminus U) = f^{-1}(S^{n-k} \setminus K)$  ist offene Umgebung des unendlichen Punktes  $\{*\}$ , also ist ihr Komplement  $g^{-1}(K)$  in  $S^n$  kompakt.

Insbesondere ist  $g^{-1}(0) \subset U$  kompakt, und wir können  $f$  auf einer kompakten Umgebung von  $g^{-1}(0)$  in  $U$  homotop so deformieren, dass die neue Abbildung  $g$  in einer kleineren Umgebung von  $g^{-1}(0)$  glatt ist und  $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$  als regulären Wert besitzt. Wie im Beweis von Satz 3.88 erhalten wir eine gerahmte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , nämlich

$$(M, \tau) = (g^{-1}(0), dg|_{\nu(g^{-1}(0))}).$$

Außerdem erhalten wir eine zusammengesetzte Abbildung

$$F: M \hookrightarrow U \xrightarrow{f|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_X} X,$$

und  $(M, \tau, F)$  ist der gesuchte singuläre gerahmte  $k$ -Zykel.

Seien zwei Repräsentanten  $f_i: S^{n_i} \rightarrow S^{n_i-k} \wedge X_+$ ,  $i \in \{0, 1\}$  desselben Elements von  $\pi_k^s(X)$  gegeben, dann finden wir zunächst ein  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$  und eine Homotopie  $h$  zwischen  $S^{n-n_0} f_0$  und  $S^{n-n_1} f_1$ . Wie in Proposition 3.92 ersetzt Stabilisierung die gerahmte Mannigfaltigkeit  $(M, \tau)$  durch  $(M', \tau')$ , ändert jedoch nichts an der Abbildung  $F: M' \cong M \rightarrow X$ . Wir nehmen also an, dass  $n = n_0 = n_1$ . Außerdem nehmen wir wie im ersten Schritt an, dass für  $V = \mathbb{R}^{n-k} \times X$  wie oben und  $U = h^{-1}(V)$  die zusammengesetzte Abbildung

$$\ell: U \xrightarrow{h|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}^{n-k}}} \mathbb{R}^{n-k}$$

in einer Umgebung der kompakten Menge  $\ell^{-1}(0) \subset I \times S^n$  glatt ist und 0 als regulären Wert besitzt. Wie im Beweis von Satz 3.88 ist  $(W, \bar{\tau}) = (\ell^{-1}(0), d\ell|_{\ell^{-1}(0)})$  ein gerahmter Bordismus zwischen  $(M_0, \tau_0)$  und  $(M_1, \tau_1)$ , und wir erhalten eine zusammengesetzte Abbildung

$$H: W \hookrightarrow U \xrightarrow{h|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_X} X$$

mit  $H|_{\partial_i W} = F_i$  für  $i = 0, 1$ . Mithin sind  $(M_0, \tau_0, F_0)$  und  $(M_1, \tau_1, F_1)$  gerahmt bordant in  $X$ . Also ist  $\Phi_X: \pi_k^s(X_+) \rightarrow \Omega_k^{\text{fr}}(X)$  wohldefiniert.

Zur Natürlichkeit sei  $\varphi: X \rightarrow Y$  gegeben. Zu zeigen ist die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \pi_k^s(X_+) & \longrightarrow & \Omega_k^{\text{fr}}(X) \\ \varphi_* = \downarrow \pi_k^s(\varphi_+) & & \varphi_* = \downarrow \Omega_k^{\text{fr}}(\varphi) \\ \pi_k^s(Y_+) & \longrightarrow & \Omega_k^{\text{fr}}(Y) \end{array}$$

Wir setzen  $V = \mathbb{R}^{n-k} \times X \subset S^{n-k} \wedge X_+$  wie oben und  $W = \mathbb{R}^{n-k} \times Y \subset S^{n-k} \wedge Y_+$ , dann folgt

$$V = (\text{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi)^{-1}(W).$$

Zu  $f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge X_+$  bestimmen wir  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $(M, \tau)$  und  $F$  wie oben. Da  $U = f^{-1}(V) = (\varphi \circ f)^{-1}(W)$ , liefert  $\varphi \circ f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge Y_+$  die gleiche Abbildung

$$\pi_{\mathbb{R}^{n-k}} \circ (\text{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi) \circ f|_U = \pi_{\mathbb{R}^{n-k}} \circ f|_U = g,$$

und daher die gleiche gerahmte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $(M, \tau)$ . Jetzt folgt Natürlichkeit, denn  $\varphi \circ f$  liefert den  $k$ -Zykel

$$(M, \tau, \pi_Y \circ (\text{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi) \circ f|_M) = (M, \tau, \varphi \circ \pi_X \circ f|_M) = \varphi_*(M, \tau, F).$$

Zum Beweis der Surjektivität sei ein singulärer gerahmter  $k$ -Zykel  $(M, \tau, F)$  in  $X$  gegeben, dabei sei  $(M, \tau)$  gerahmte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , und  $a: \nu^{(r)}M \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei eine Einbettung. In Analogie zu (3.7) definieren wir  $f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge X$  durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tau_p(v)}{r} \wedge F(p) & \text{falls } x = a(p, v) \text{ für ein } p \in M \text{ und ein } v \in \nu_p M \text{ mit } |v| < r, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man überprüft wieder leicht, dass  $f$  stetig ist, und den singulären gerahmten  $k$ -Zykel  $(M, \tau, F)$  induziert. Zur Injektivität verfahren wir analog mit einem singulären gerahmten Bordismus zwischen zwei  $k$ -Zykeln.  $\square$

**3.98. BEMERKUNG.** Die höheren Homotopiegruppen  $\pi_k(X)$  finden „runde Löcher“ von  $X$ , die dadurch sichtbar werden, dass man Sphären nach  $X$  abbildet, die man anschließend nicht mehr zusammenziehen kann. Man findet jedoch keine Löcher, die dadurch zustande kommen, dass man andere kompakte Mannigfaltigkeiten nach  $X$  abbildet, die sich dann in  $X$  nicht durch einen Nullbordismus ausfüllen lassen. Beispielsweise sollte der Torus  $T^2$  ein solches „torusförmiges Loch“ haben, aber es gilt  $\pi_2(T^2) = 0$ .

Mit der stabilen Homotopie und der Pontryagin-Thom-Konstruktion können wir nun immerhin Löcher in der Form gerahmter Untermannigfaltigkeiten aufspüren. Aber zum einen tragen die Rahmungen merkwürdige Zusatzinformation, siehe unten. Zum anderen gibt es in höheren Dimensionen Untermannigfaltigkeiten, die keine Rahmungen zulassen (ein Beispiel wäre  $\mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{R}^8$ ). Nach Bemerkung 3.96 (2) ist

$$\Omega_k^{\text{fr}}(\text{pt}) = \pi_k^s(S^0)$$

gerade die  $k$ -te stabile Homotopiegruppe der Sphären. Für viele  $k > 0$  gilt  $\pi_k^s(S^0) \neq 0$ , obwohl ein Punkt eigentlich keine weitere Information tragen sollte. Aber immerhin sind alle  $\pi_k^s(S^0)$  endliche Gruppen für  $k > 0$ .

Poincarés erste Idee, „Homologie“ zu definieren war daher, „orientierten“ Bordismus  $\Omega_k^{SO}$  ohne Rahmungen zu betrachten. Aber auch diese Definition hat Probleme, so dass man einen etwas abstrakteren Zugang entwickelt hat. Würden wir Poincarés Ansatz folgen, so erhielten wir für  $\Omega_k^{SO}(\text{pt})$  nämlich abzählbar unendliche Gruppen für alle  $k \in 4\mathbb{N}$ , also noch mehr „Lärm um Nichts.“

3.99. BEMERKUNG. Der Vollständigkeit halber skizzieren wir auch „gerahmten Kobordismus“ mit dem dazugehörigen Pontryagin-Thom Isomorphismus

$$\Omega_{\text{fr}}^k(X) \cong [X_+, S^k]^s = \varinjlim [S^{n-k} \wedge X_+, S^n].$$

Diesmal erhalten wir kontravariante Funktoren, denn eine Abbildung  $\varphi: X \rightarrow Y$  induziert durch Zurückziehen eine Abbildung

$$\varphi^*: \Omega_{\text{fr}}^k(Y) \cong [Y_+, S^k]^s \xrightarrow{\circ\varphi} [X_+, S^k]^s \cong \Omega_{\text{fr}}^k(X).$$

Am besten lässt sich die linke Seite beschreiben, wenn  $X$  selbst eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, denn in diesem Fall wird  $\Omega_{\text{fr}}^k(X)$  von  $(\dim X - k)$ -dimensionalen kompakten Untermannigfaltigkeiten  $N \subset \mathbb{R}^{n-k} \times X$  mit Trivialisierungen  $\tau$  des Normalenbündels  $\nu_{N,X}$  von  $N$  in  $\mathbb{R}^{n-k} \times X$  erzeugt. Das Paar  $(N, \tau)$  heißt dann *singulärer gerahmter  $k$ -Kozykel*. Die Äquivalenzrelation wird diesmal über gerahmte Kobordismen, also  $(\dim X + 1 - k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten in  $I \times \mathbb{R}^{n-k} \times X$  mit trivialisiertem Normalenbündel definiert.

Aufgrund der Pontryagin-Thom-Isomorphismen erhält man eine bilineare Abbildung

$$\Omega_{\text{fr}}^k(X) \times \Omega_{\text{fr}}^\ell(X) \cong [X_+, S^k]^s \times [S^\ell, X_+] \xrightarrow{\circ} \pi_\ell^s(S^k) = \pi_{\ell-k}^s(S^0).$$

Im Fall  $k = \ell$  ist der Wertebereich  $\pi_0^s(S^0) \cong \mathbb{Z}$ , man spricht von einer *Kronecker-Paarung*. Geometrisch lässt sie sich so beschreiben, dass man  $(M, \tau)$  und das Bild von  $(N, \tau')$  unter  $\pi_X$  in „allgemeine Lage“ bringt und Schnittpunkte zählt, wobei die Rahmungen das Vorzeichen festlegen.

Wir haben jetzt die zur stabilen Homotopietheorie assoziierte Homologie- und Kohomologietheorie kennengelernt. Viele Aspekte fehlen noch, zum Beispiel gibt es ein *Cap-Produkt*

$$\smile: \Omega_{\text{fr}}^k(X) \times \Omega_{\text{fr}}^\ell(X) \longrightarrow \Omega_{\text{fr}}^{k+\ell}(X),$$

bei dem man singuläre gerahmte Kozykeln miteinander „schneidet“, dabei addieren sich die Kodimensionen. So wird  $\Omega_{\text{fr}}^\bullet(X)$  zu einem  $\mathbb{Z}$ -graduierten Ring, dem gerahmten Kobordismusring. Es gibt auch ein *Cap-Produkt*

$$\frown: \Omega_{\text{fr}}^k(X) \times \Omega_{\text{fr}}^\ell(X) \longrightarrow \Omega_{\text{fr}}^{\ell-k}(X),$$

das  $\Omega_{\text{fr}}^\bullet(X)$  zu einem  $\mathbb{Z}$ -graduierten  $\Omega_{\text{fr}}^\bullet(X)$ -Modul macht. Auch hier schneidet man einen Zykel mit einem Kozykel und erhält so einen Zykel kleinerer Dimension.

### 3.j. Die erste stabile Homotopiegruppe der Sphären

Wir wollen jetzt  $\pi_1^s(S^0)$  bestimmen. Da wir dazu gerahmte Kreise betrachten müssen, und sich zwei Rahmungen von  $S^1 \subset \mathbb{R}^n$  um eine Abbildung  $S^1 \mapsto SO(n-1)$  unterscheiden, beweisen wir zur Vorbereitung das folgende Resultat.

3.100. SATZ. *Es sei  $n \geq 3$ . Dann gilt  $\pi_1(SO(n), E_n) \cong \mathbb{Z}/2$ , und das nicht triviale Element wird dargestellt durch die Schleife*

$$\gamma: I \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in SO(n).$$

Selbstverständlich können wir auch jede andere Ebene im  $\mathbb{R}^n$  „einmal herumdrehen“, um den Erzeuger von  $\pi_1(SO(n))$  zu erhalten. Die Bedingung  $n \geq 3$  ist nötig, denn es gilt  $SO(1) \cong \text{pt}$  und  $SO(2) \cong S^1$ .

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den Fall  $n = 3$ . Es sei  $\mathbb{H}$  die Algebra der Quaternionen, dann bildet die Menge  $S^3 \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$  der Einheitsquaternionen eine Gruppe bezüglich der Quaternionen-Multiplikation. Diese Gruppe wirkt auf dem Raum  $\mathbb{I} \cong \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$  der imaginären Quaternionen durch

$$S^3 \times \mathbb{I} \ni (q, p) \mapsto qp\bar{q} = qpq^{-1}.$$

Diese Operation erhält das Euklidische Skalarprodukt und die Orientierung, liefert also einen Homomorphismus  $S^3 \rightarrow SO(3)$ . Dabei wirken  $\pm 1 \in S^3$  als  $\text{id}_{\mathbb{I}}$ . Da es zu jedem Quaternion  $q \in S^3 \setminus \{\pm 1\} \subset \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$  ein  $p \in \mathbb{I}$  gibt, mit dem  $q$  nicht kommutiert, wirken alle anderen Elemente der  $S^3$  nicht-trivial. Schließlich kann man — zum Beispiel anhand der gleich folgenden geometrischen Darstellung — überprüfen, dass die obige Abbildung surjektiv ist. Es folgt

$$SO(3) \cong S^3 / \{\pm 1\} \cong \mathbb{R}P^3.$$

Wir geben eine geometrische Beschreibung der obigen Gruppenwirkung ohne Quaternionen. Dazu seien  $e_0, \dots, e_3$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^4$ , und  $\mathbb{R}^3$  sei das Erzeugnis von  $e_1, e_2, e_3$ . Wir wissen bereits, dass  $\pm 1 = \pm e_0$  als  $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$  wirkt. Jedes andere  $q \in S^3 \setminus \{\pm e_0\}$  schreiben wir als in eindeutiger Weise als

$$q = e_0 \cos \varphi + u \sin \varphi \quad \text{mit } u \in S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } \varphi \in (0, \pi).$$

Dann wirkt  $q$  als Drehung mit Winkel  $2\varphi$  um die Achse  $u\mathbb{R}$ . Genauer ergänzen wir  $u$  zu einer orientierten Orthonormalbasis  $(u, v, w)$  des  $\mathbb{R}^3$ , dann folgt

$$q(u) = u, \quad q(v) = v \cos 2\varphi - w \sin 2\varphi, \quad q(w) = v \sin 2\varphi + w \cos 2\varphi.$$

Wir erhalten die gleiche Abbildung, indem wir  $u$  durch  $-u$  und  $\varphi$  durch  $\pi - \varphi$  ersetzen. Der Winkel  $2\varphi$  lässt sich auch dadurch erklären, dass wir in der obigen Darstellung für  $\varphi = \pi$  den Punkt  $-e_0 \in S^3$  erhalten, dem wir keine Drehachse zuordnen können, und der daher als Identität wirken soll.

Wir wissen jetzt also, dass  $S^3 \rightarrow SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$  die universelle Überlagerung ist. Aus Abschnitt 2.f wissen wir, dass dem nichttrivialen Element  $1 \in \mathbb{Z}/2 \cong \pi_1(\mathbb{R}P^3)$  das Bild eines Weges  $\tilde{\gamma}$  von  $e_0$  nach  $-e_0$  entspricht. Wir wählen  $\tilde{\gamma}(t) = e_0 \cos \pi t + e_3 \sin \pi t$  und erhalten die im Satz genannte Schleife  $\gamma$ .

Damit ist der Fall  $n = 3$  erledigt. Wir beweisen die Behauptung für größere  $n$  durch Induktion. Dazu betrachten wir die Abbildung  $p: SO(n+1) \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $p(g) = g e_{n+1}$ . Diese Abbildung

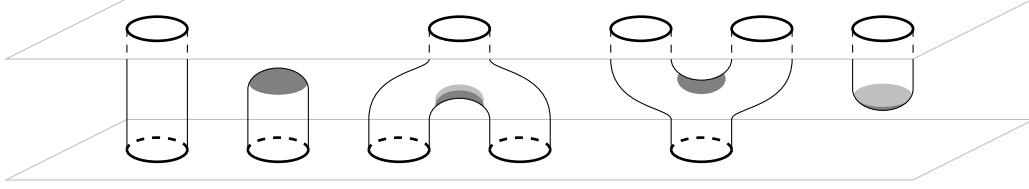


ABBILDUNG 3.9. Elementare Bordismen

ist ein Faserbündel mit Faser

$$p^{-1}(e_{n+1}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(n+1) \mid A \in SO(n) \right\} \cong SO(n).$$

Aus der langen exakten Sequenz 3.25 schließen wir mit  $n \geq 3$ , dass

$$\underbrace{\pi_1(S^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_1(SO(n+1)) \xleftarrow{\cong} \pi_1(SO(n)) \longleftarrow \underbrace{\pi_2(S^n)}_{=0}.$$

Dabei geht die erzeugende Schleife  $\gamma$  in  $SO(n)$  in die entsprechende Schleife in  $SO(n+1)$  über.  $\square$

3.101. SATZ (Pontryagin). *Es gilt  $\pi_1^s(S_0) \cong \mathbb{Z}/2$ .*

BEWEIS. Nach Satz 3.42 (4) und Satz 3.88 gilt  $\pi_1^s(S_0) \cong \pi_n(S^{n-1}) \cong \Omega_1^{\text{fr},n}$  für alle  $n \geq 4$ . Wir betrachten zunächst kompakte 1-Mannigfaltigkeiten im  $\mathbb{R}^n$ . Jede kompakte 1-Mannigfaltigkeit ist eine disjunkte Vereinigung von Kreisen. Da  $n \geq 4$  ist, können wir diese Kreise gegebenenfalls „entknoten“, das heißt zu disjunkten Einheitskreisen in der Ebene  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$  mit Mittelpunkten auf der  $x$ -Achse deformieren — aus jeder solchen Deformation macht man leicht einen Bordismus, auf den sich auch die Rahmungen übertragen lassen.

Für einen einzelnen Kreis  $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$  konstruieren wir eine Standardrahmung  $\tau^0$ , indem wir als  $v_1^0$  den Ortsvektor in  $\mathbb{R}^2$  wählen, und mit den Standardbasisvektoren  $v_2^0 = e_3, \dots, v_{n-1}^0 = e_n$  zu einer Basis des Normalenbündels. Jede andere Rahmung unterscheidet sich um ein Element aus  $\pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$ . Wenn wir mehrere gerahmte Kreise haben, addieren wir die zugehörigen Elemente von  $\mathbb{Z}/2$ . Wir behaupten, dass dieses Summe eine gerahmte Bordismusinvariante ist.

Sei  $W \subset I \times \mathbb{R}^n$  ein Bordismus. Zunächst erreichen wir durch eine kleine Deformation, dass die Koordinate  $t \in I$  eine sogenannte *Morse-Funktion* auf  $W$  wird, das heißt, die Abbildung  $W \ni (t, x) \mapsto t \in I$  hat nur endlich viele kritische Punkte  $(t_1, p_1), \dots, (t_k, p_k)$ , und nahe dieser Punkte  $p_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,n})$  sieht  $W$  aus wie der Graph einer Funktion

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto t_k \pm (x_1 - x_{j,1})^2 \pm \dots \pm (x_n - x_{j,n})^2.$$

Wir dürfen dabei annehmen, dass  $t_1 < \dots < t_k$  paarweise verschieden sind. Die Rahmungen deformieren wir wieder mit. Dann können wir den Bordismus durch Aufschneiden längs  $\{s_i\} \times \mathbb{R}^n$  mit  $t_1 < s_1 < t_2 < \dots < s_{k-1} < t_k$  in „elementare Bordismen“ wie in Abbildung 3.9 zerlegen. Diese können wir so anordnen, dass ganz  $W$  in  $I \times \mathbb{R}^2 \subset I \times \mathbb{R}^n$  zu liegen kommt; dabei ordnen wir die Kreise in  $\partial_0 W$  und  $\partial_1 W$  gegebenenfalls um, siehe Abbildung 3.10.

Auf  $W$  konstruieren wir eine Standardrahmung  $\tau^0$ , indem wir auf den elementaren Bordismen in  $I \times \mathbb{R}^2$  jeweils den nach außen weisenden Normalenvektor als  $v_1^0$  wählen und dann mit den Standardbasisvektoren  $v_2^0 = e_3, \dots, v_{n-1}^0 = e_n$  zu einer Basis des Normalenbündels ergänzen. Die Rahmungen  $\tau$  und  $\tau^0$  unterscheiden sich um eine Abbildung  $g: W \rightarrow SO(n-1)$ . Für jedes  $s \in I \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$  liefert die Einschränkung auf  $W \cap (\{s\} \times \mathbb{R}^n) \cong S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$  nach Folgerung 3.8 ein Tupel von Elementen von  $\pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$ . Es sei  $a_s \in \mathbb{Z}/2$  die Summe dieser Elemente. Die obige Behauptung ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass  $a_s$  nicht von  $s$  abhängt. Für alle  $s \in (t_i, t_{i+1})$



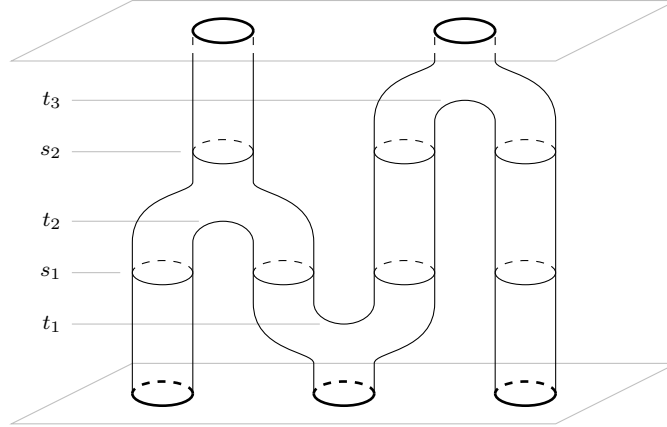


ABBILDUNG 3.10. Zusammengesetzter Bordismus

mit  $1 \leq i < k$  ist das klar, da die Abbildungen  $g|_{W \cap (\{s\} \times \mathbb{R}^n)}$  homotop sind. Außerdem ist klar, dass sich der Beitrag eines zylindrischen elementaren Bordismus in einer Umgebung von  $t_i$  nicht ändert.

Da  $SO(n-1)$  zusammenhängend ist, können wir die gegebene Rahmung  $\tau$  im Innern der nicht zylindrischen elementaren Bordismen so deformieren, dass sie auf den in Abbildung 3.9 grau markierten, zusammenziehbaren Regionen jedes elementaren Bordismus mit  $\tau^0$  übereinstimmt. Dabei ändern sich die Elemente  $a_s \in \mathbb{Z}/2$  nicht. Wenn der elementare Bordismus eine „Kappe“ ist (zweiter oder letzter elementarer Bordismus in der Abbildung), dann ist der Beitrag zu  $a_s$  auf beiden Seiten von  $t_i$  trivial. Wenn der elementare Bordismus eine „Hose“ ist (dritter oder vierter elementarer Bordismus in der Abbildung), dann ist der Beitrag zu  $a_s$  auf der Seite von  $t_i$  mit einer Randkomponente die Summe der Beiträge auf der Seite mit zwei Randkomponenten. Insgesamt ändert sich also  $a_s$  beim Überqueren eines kritischen Wertes  $t_i$  nicht.

Also ist unsere Behauptung bewiesen, und wir haben eine Abbildung

$$a: \pi_1^s(S^0) \cong \Omega_1^{\text{fr}} \longrightarrow \pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$$

konstruiert. Nach unserer Vorüberlegung ist diese Abbildung surjektiv, da wir im Urbild jedes Elements einen gerahmten Kreis finden. Nach Konstruktion wird die leere gerahmte Mannigfaltigkeit auf 0 abgebildet. Wenn  $a$  bijektiv ist, ist  $a$  ein Isomorphismus, denn bis auf Isomorphie gibt es nur eine Gruppe mit zwei Elementen.

Zur Injektivität sei eine gerahmte Bordismusklass in  $\mathbb{R}^n$  gegeben, ohne Einschränkung repräsentiert durch eine disjunkte Vereinigung  $(M, \tau)$  von gerahmten Einheitskreisen wie oben. Wir behaupten, dass  $(M, \tau)$  zu einem einzigen gerahmten Kreis kobordant ist, und erhalten Injektivität, da es auf einem Kreis nur zwei Klassen von Rahmungen gibt. Falls  $M$  aus einem Kreis besteht, ist nichts zu tun. Falls  $M = \emptyset$ , betrachten wir den letzten elementaren Bordismus in Abbildung 3.9. Andernfalls benutzen wir die Hose in der Mitte der Abbildung, um die Anzahl der Kreise Schritt für Schritt bis auf einen zu reduzieren. Dabei überlegen wir uns, dass wir die gegebenen Rahmungen der „Hosenbeine“ bis zum „Gürtel“ fortsetzen können.  $\square$

In der gleichen Arbeit, in der Pontryagin diesen Satz bewiesen hat, hat er auch  $\pi_2^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2$  bestimmt. Die Berechnung der höheren stabilen Homotopiegruppen der  $S^0$  mit Hilfe der Pontryagin-Thom-Konstruktion erweist sich als sehr aufwändig, so dass man sich stattdessen anderer Hilfsmittel bedient. Ohne Beweis geben wir das folgende wichtige Resultat an.

3.102. SATZ (Serre). *Mit Ausnahme von  $\pi_n(S^n)$  und  $\pi_{4k-1}(S^{2k})$  sind alle Homotopiegruppen von Sphären endlich. Insbesondere ist  $\pi_k^s(S^0)$  endlich für alle  $k > 0$ .*

3.103. BEMERKUNG. Die Umkehrung der obigen Abbildung  $a$  ist der sogenannte stabile  $J$ -Homomorphismus

$$J_k: \pi_k(SO) = \varinjlim \pi_k(SO(n)) \rightarrow \pi_k^s(S^0),$$

den wir jetzt betrachten wollen. Der Kolimes bezieht sich auf die gleiche Folge von Einbettungen  $\iota_n: SO(n) \hookrightarrow SO(n+1)$  wie im Beweis von Satz 3.100. Dabei ist  $SO$  die Gruppe der „Matrizen“ mit Indizes in  $\mathbb{N}$ , die bis auf endlich viele Einträge mit der „Einheitsmatrix“  $(\delta_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$  übereinstimmen.

Die Gruppe  $SO(n)$  wirkt durch Drehungen auf  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , bei denen insbesondere der Basispunkt  $e_0 \in S^n$  festgehalten wird. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\rho_n: SO(n) \wedge S^n \rightarrow S^n.$$

Einhängen liefert die Beziehung

$$\rho_n \wedge \text{id}_{S^1} = \rho_{n+1}.$$

Die exakte Homotopiesequenz des Faserbündels  $SO(n+1) \rightarrow S^n$  mit Faser  $SO(n)$  aus dem Beweis des Satzes 3.100 liefert

$$\underbrace{\pi_k(S^n)}_{=0} \leftarrow \pi_k(SO(n+1)) \xleftarrow{\cong} \pi_k(SO(n)) \xleftarrow{\partial} \underbrace{\pi_{k+1}(S^n)}_{=0}$$

für  $n > k+1$ , so dass

$$\varinjlim \pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(2k+2)).$$

Sei jetzt  $f: S^k \rightarrow SO(n)$  eine punktierte Abbildung, dann definieren wir  $J_k^n(f): S^{k+n} \rightarrow S^n$  durch

$$J_k^n(f) = \rho_n \circ (f \wedge \text{id}_{S^n}): S^k \wedge S^n \rightarrow S^n$$

und erhalten  $J_k^n([f]): \pi_k(SO(n)) \rightarrow \pi_{k+n}(S^n)$ . Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(SO(n)) & \xrightarrow{J_k^n} & \pi_{k+n}(S^n) \\ \iota_{n*} \downarrow & & \downarrow S \\ \pi_k(SO(n+1)) & \xrightarrow{J_k^{n+1}} & \pi_{k+n+1}(S^{n+1}). \end{array}$$

Also erhalten wir den stabilen  $J$ -Homomorphismus als Kolimes

$$J_k = \varinjlim J_k^n: \varinjlim \pi_k(SO(n)) \rightarrow \varinjlim \pi_{k+n}(S^n) = \pi_k^s(S^0),$$

und wegen Satz 3.42 (4) und der obigen Überlegung und gilt sogar  $J_k = J_k^{k+2}$ .

Für  $k > 0$  liefert Bott-Periodizität Isomorphismen  $\pi_{k+8n}(SO) \cong \pi_k(SO)$ . Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über  $J_k$  für kleine  $k$ .

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\pi_k(SO)$	0	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$
im $J_k$	0	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/24$	0	0	0	$\mathbb{Z}/240$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/504$
$\pi_k^s(S^0)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/240$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	$\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/504$

Die Gruppe im  $J_{4n-1}$  hängt zusammen mit den Bernoulli-Zahlen: der Nenner von  $B_{2n}/4n$  ist gerade  $\#$  im  $J_{4n-1}$ .

### 3.k. Übungen zu Kapitel 3

Übungen zu Abschnitt 3.a.

3.104. ÜBUNG. Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $X = A \cup B$ , wobei  $A, B$  abgeschlossen sind. Zeigen Sie:  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn  $f|_A$  und  $f|_B$  stetig sind.

3.105. ÜBUNG. Konstruieren Sie Homöomorphismen

- (1)  $f: I^k / \partial I^k \rightarrow S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ,
- (2)  $g: (I^k / \partial I^k, \partial I^k / \partial' I^k) \rightarrow (D^k, S^{k-1})$ .

3.106. ÜBUNG. Es seien  $(X_i, x_i)$  für  $i \in J$  punktierte Räume. Zeigen Sie:

- (1) der punktierte Raum

$$(X, x_0) = \left( \prod_{i \in J} X_i, (x_i)_{i \in J} \right)$$

mit den Projektionen  $p_i: (X, x_0) \rightarrow (X_i, x_i)$  erfüllt die universelle Eigenschaft eines Produktes in der Kategorie  $Top_+$ ;

- (2) es gilt  $\pi_k(X, x_0) \cong \prod_{i \in J} \pi_k(X_i, x_i)$ , wobei die Abbildung  $p_{i*} = \pi_k p_i$  der Projektion auf den Faktor  $\pi_k(X_i, x_i)$  entspricht.
- (3) Sei  $j \in J$ , und sei  $\iota_j: X_j \rightarrow X$  die Inklusion, die  $y \in X_j$  auf  $(y_i)_{i \in J}$  mit  $y_j = y$  und  $y_i = x_i$  für  $i \neq j$  abbildet. Beschreiben Sie die Abbildung  $\iota_{j*}: \pi_k(X_j, x_j) \rightarrow \pi_k(X, x_0)$ .

3.107. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 3.10. Überlegen Sie sich außerdem, dass  $\Omega^k(X)$  natürlich zum Raum

$$\{ f: S^k \rightarrow X \mid f(*) = x_0 \}$$

homöomorph ist, wobei „\*“ den Basispunkt der  $S^k$  bezeichne.

Übungen zu Abschnitt 3.b.

3.108. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 3.16.

3.109. ÜBUNG. Zeigen Sie für exakte Sequenzen von Gruppen:

- (1) Die Sequenz  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  ist genau dann bei  $A$  und  $B$  exakt, wenn  $f$  einen Isomorphismus  $A \cong \ker g$  induziert.
- (2) Die Sequenz  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  ist genau dann bei  $B$  und  $C$  exakt, wenn  $g$  einen Isomorphismus  $\text{coker } f \cong C$  induziert.

Was folgt für  $A$  und  $f$  in den exakten Sequenzen  $0 \rightarrow A \rightarrow 0$  beziehungsweise  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ ?

3.110. ÜBUNG. Beweisen Sie die Exaktheit der Sequenz aus Satz 3.19 an den fehlenden Stellen.

3.111. ÜBUNG. Beweisen Sie Lemma 3.20. Achten Sie darauf, nur  $B, C$  und  $C'$  als Gruppen und nur die Abbildungen dazwischen als Gruppenhomomorphismen vorauszusetzen; betrachten Sie alles andere in der Kategorie  $Set_+$ .

3.112. ÜBUNG. Es seien  $Z \subset Y \subset X$  Räume mit Basispunkt in  $Z$ . Wir betrachten

$$\partial: \pi_k(X, Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(Y) \rightarrow \pi_{k-1}(Y, Z)$$

als Verbindungshomomorphismus in der Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(Y, Z) \xleftarrow{\partial} \pi_k(X, Y) \longleftarrow \pi_k(X, Z) \longleftarrow \pi_k(Y, Z) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(X, Y) \longleftarrow \cdots,$$

wobei die unmarkierten Pfeile von Inklusion induziert werden.

- (1) Zeichnen Sie die obige Sequenz zusammen mit den exakten Sequenzen der Paare  $(X, Y)$ ,  $(X, Z)$  und  $(Y, Z)$  so in ein kommutatives Diagramm, dass keine Homotopiegruppe zweimal erscheint.
- (2) Beweisen Sie Exaktheit der Sequenz, indem Sie nach Möglichkeit vom Diagramm aus (1) Gebrauch machen.

*Übungen zu Abschnitt 3.c.*

3.113. ÜBUNG. Konstruieren Sie den Homöomorphismus aus Bemerkung 3.23.

3.114. ÜBUNG. Im Folgenden bedeute Faserung entweder Serre- oder Hurewicz-Faserung. Zeigen Sie:

- (1) Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung, und sei  $f: X \rightarrow B$  stetig. Seien die Abbildungen  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  und  $\bar{f}: f^*E \rightarrow E$  durch

$$f^*E = \{ (e, x) \in E \times X \mid p(e) = f(x) \in B \}, \quad (f^*p)(e, x) = x, \quad \bar{f}(e, x) = e$$

gegeben, dann ist  $f^*p$  wieder eine Faserung.

- (2) Die konstante Abbildung  $F \rightarrow \text{pt}$  ist eine Faserung für alle  $F$ . Die Projektion  $B \times F \rightarrow B$  ist eine Faserung für alle  $F$  und alle  $B$ .
- (3) Seien  $p: E \rightarrow B$  und  $q: Y \rightarrow E$  Faserungen. Dann ist auch  $p \circ q: Y \rightarrow B$  eine Faserung.

*Übungen zu Abschnitt 3.d.*

3.115. ÜBUNG. Es seien  $X, Y$  topologische Räume. Definiere den *Verbund* von  $X$  und  $Y$  als Quotienten

$$X * Y = (X \times Y \times I) / \sim,$$

wobei „ $\sim$ “ erzeugt wird durch

$$(x, y, 0) \sim (x, y', 0) \quad \text{und} \quad (x, y, 1) \sim (x', y, 1) \quad \text{für alle } x, x' \in X \text{ und alle } y, y' \in Y.$$

Geben Sie Homöomorphismen  $S^k * \text{pt} \cong D^{k+1}$  und  $S^k * S^\ell \cong S^{k+\ell+1}$  für alle  $k, \ell$  an.

3.116. ÜBUNG. Es seien  $(X, x_0), (Y, y_0)$  punktierte Räume, und es sei  $X * Y$  wie oben definiert. Wir identifizieren  $X, Y$  mit Unterräumen von  $X * Y$  durch  $x \mapsto [(x, y_0, 0)]$ ,  $y \mapsto [(x_0, y, 1)]$  für alle  $x \in X, y \in Y$ , wählen als Basispunkt  $[(x_0, y_0, \frac{1}{2})]$  und setzen  $U = X * Y \setminus Y$  und  $V = X * Y \setminus X$ .

- (1) Zeigen Sie, dass  $U, V, U \cap V$  jeweils zu  $X, Y$  und  $X \times Y$  homotopieäquivalent sind.
- (2) Bestimmen Sie die von den Inklusionen induzierten Abbildungen

$$\pi_k(U \cap V) \rightarrow \pi_k(U), \quad \pi_k(V) \rightarrow \pi_k(X * Y)$$

und die Gruppen  $\pi_k(U, U \cap V)$ .

- (3) Die Räume  $X$  und  $Y$  seien  $p$ - beziehungsweise  $q$ -zusammenhängend. Wie hoch zusammenhängend ist dann  $X * Y$ ?

*Hinweis:* Betrachten Sie die natürliche Abbildung zwischen den langen exakten Sequenz der Paare  $(U, U \cap V) \rightarrow (X * Y, V)$  und benutzen Sie den Ausschneidungssatz.

*Übungen zu Abschnitt 3.e.*

3.117. ÜBUNG. Zeigen Sie: die Hintereinanderausführung von punktierten Abbildungen von  $S^n$  nach  $S^n$  macht die Gruppe  $\pi_n(S^n)$  zu einem Ring isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .

3.118. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle  $n \geq 1$ .

- (1) Betrachte  $D^n \subset \mathbb{R}^n$ . Es sei  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $S^{n-1} \subset f^{-1}(S^{n-1})$  und  $\deg f|_{\partial D^n} \neq 0$  gegeben, dann gilt  $D^n \subset \text{im}(f)$ .

- (2) Es seien  $f_1, \dots, f_n: I^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so dass  $f_i(x) < 0$  falls  $x_i = 0$  und  $f_i(x) > 0$  falls  $x_i = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und alle  $x \in I^k$ . Dann existiert ein  $x_0 \in I^k$  mit  $f_1(x_0) = \dots = f_n(x_0) = 0$ .

3.119. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 3.53.

3.120. ÜBUNG. Zeigen Sie: Die Abbildung  $U(n) \rightarrow S^{2n-1}$  mit  $g \mapsto ge_1 \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  ist ein Faserbündel mit Faser  $U(n-1)$ .

Folgern Sie, dass  $\pi_k(U(n)) \cong \pi_k(U(n-1))$  für  $k < 2n-2$ .

*Übungen zu Abschnitt 3.f.*

3.121. ÜBUNG. Für topologische Räume  $X, B, A \subset X$ , und  $f: A \rightarrow B$  stetig betrachten wir den *Pushout*

$$X \cup_f B = (X \sqcup B) / \sim,$$

wobei „ $\sim$ “ erzeugt wird von  $X \ni a \sim f(a) \in B$  für alle  $a \in A$ . Er erfüllt die universelle Eigenschaft aus Folgerung 1.75.

Es bezeichne  $\mathcal{Top}^A$  die Kategorie der „Räume unter  $A$ “ mit Objekten  $(C, g)$  mit  $g: A \rightarrow C$  und Morphismen

$$\text{hom}_{\mathcal{Top}^A}((B, f), (C, g)) = \{ h: B \rightarrow C \mid h \text{ stetig mit } h \circ f = g \}.$$

Es sei  $(X, A)$  fest. Zeigen Sie, dass  $(B, f) \mapsto (X \cup_f B, B)$  einen Funktor von der Kategorie  $\mathcal{Top}^A$  in die Kategorie *Pair* definiert.

3.122. ÜBUNG. Handelt es sich bei den Paaren

$$(X, A) = (\{a, b\}, \{a\}), \tag{1}$$

$$(Y, B) = (\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}, \{0\}) \tag{2}$$

um Kofaserungen, wobei  $X$  die Klumpentopologie und  $Y \subset \mathbb{R}$  die Unterraumtopologie trage?

3.123. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Es seien  $A \subset B \subset X$  abgeschlossene Teilmengen. Wenn  $(B, A)$  und  $(X, B)$  Kofaserungen sind, dann ist auch  $(X, A)$  Kofaserung.
- (2) Es sei  $(X, A)$  Kofaserung und  $Y$  beliebig, dann ist auch  $(X \times Y, A \times Y)$  Kofaserung.
- (3) Ein Paar  $(X, A)$  sei *Retrakt* von  $(Y, B)$ , das heißt, es gebe Abbildungen  $i: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  und  $r: (Y, B) \rightarrow (X, A)$  mit  $r \circ i = \text{id}_X$ . Wenn  $(Y, B)$  eine Kofaserung ist, dann ist auch  $(X, A)$  eine Kofaserung.

3.124. ÜBUNG. Zeigen Sie: jede Kofaserung  $i: A \rightarrow X$  ist eine Einbettung, siehe Definition 1.44. Zeigen Sie dazu, dass

$$\iota_1: A \cong A \times \{1\} \hookrightarrow Zi \quad \text{und} \quad \bar{\iota}_1: X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I.$$

Einbettungen sind, und betrachten Sie das folgende Diagramm zu Bemerkung 3.57.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota_1} & Zi \\ i \downarrow & & \bar{i} \updownarrow \bar{r} \\ X & \xrightarrow{\bar{\iota}_1} & X \times I \end{array}$$

3.125. ÜBUNG. Zeigen Sie: wenn  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $(X, A)$  eine Kofaserung ist, dann ist  $A \subset X$  abgeschlossen. Betrachten Sie dazu die stetigen Abbildungen

$$f: X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I \quad \text{und} \quad g: X \cong X \times \{1\} \xrightarrow{r} Zi \hookrightarrow X \times I,$$

und zeigen Sie zunächst

$$A = \{x \in X \mid f(x) = (x, 1) = r(x, 1) = g(x) \in X \times I\}.$$

3.126. ÜBUNG. Es sei  $(X, A)$  eine abgeschlossene Kofaserung und  $f: A \rightarrow B$  stetig.

(1) Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung

$$(X \times I) \cup_{f \times \text{id}_I} (B \times I) \longrightarrow (X \cup_f B) \times I.$$

(2) Zeigen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung. *Hinweis:* Sie können dazu das Exponentengesetz 1.60 benutzen.

(3) Zeigen Sie, dass  $(X \cup_f B, B)$  wieder eine abgeschlossene Kofaserung ist.

3.127. ÜBUNG. Betrachten Sie  $A = \{a\} \subset X = \{a, b\}$  mit der Topologie  $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, A, X\}$ , und zeigen Sie:

(1) Das Paar  $(X, A)$  ist eine Kofaserung,  $(X^2, A \times X \cup X \times A)$  jedoch nicht.

(2) Überprüfen Sie, ob es Abbildungen  $u: X \rightarrow I$  und  $h: X \times I \rightarrow X$  wie in Proposition 3.60 (1) gibt.

*Übungen zu Abschnitt 3.g.*

3.128. ÜBUNG. Es seien  $(X_j)_{j \in J}$  und  $Y$  punktierte Räume. Konstruieren Sie eine natürliche bijektive, stetige Abbildung

$$\bigvee_{j \in J} (X_j \wedge Y) \longrightarrow \left( \bigvee_{j \in J} X_j \right) \wedge Y.$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Homöomorphismus ist, wenn  $J$  endlich ist.

3.129. ÜBUNG. Es seien  $(X, A)$ ,  $(Y, B)$ ,  $(A, \{x_0\})$  und  $(B, \{y_0\})$  abgeschlossene Kofaserungen. Zeigen Sie, dass  $(X, A) \wedge (Y, B)$  wieder eine gut punktierte, abgeschlossene Kofaserung ist.

3.130. ÜBUNG. Es sei  $(X, A)$  ein gutes Paar und  $f: A \rightarrow B$  stetig. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung

$$SX \cup_{Sf} SB \longrightarrow S(X \cup_f B),$$

und beweisen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung.

3.131. ÜBUNG. Konstruieren Sie eine Abbildung  $f: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ , so dass man den 2-Torus als Pushout

$$T^2 = S^1 \times S^1 \cong D^2 \cup_f (S^1 \vee S^1)$$

schreiben kann. Folgern Sie dann mit Proposition 3.65 und Aufgabe 3.130, dass die Einhängung  $ST^2$  homotopieäquivalent zu  $S^2 \vee S^2 \vee S^3$  ist.

*Übungen zu Abschnitt 3.h.*

3.132. ÜBUNG. Bestimmen Sie für die folgenden Sequenzen von Gruppen jeweils den Kolimes  $G$  und geben Sie auch die Abbildungen  $g_k: G_k \rightarrow G$  an.

$$(1) \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$$

$$(2) \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$$

$$(3) \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$$

3.133. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Die stabile Homotopiegruppe  $\pi_3^s(S^2) \cong \pi_1^s(S^0)$  wird von der Hopf-Faserung  $p: S^3 \rightarrow S^2$  erzeugt.
- (2) Es bezeichne  $\iota: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  die Inklusion mit  $(z_0 : z_1) \mapsto (z_0 : z_1 : 0)$ . Dann ist  $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3(\mathbb{C}P^2)$ .
- (3) Es gilt dann auch  $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3^s(\mathbb{C}P^2)$ .

3.134. ÜBUNG. (1) Zeigen Sie mit der stabilen Homotopiesequenz 3.81 für  $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$ , dass  $\pi_k^s(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k^s(\mathbb{C}P^{n-1})$  für alle  $k < 2n - 1$ .

- (2) Bestimmen Sie  $\pi_2^s(\mathbb{C}P^n)$  für alle  $n \geq 2$ .
- (3) Bestimmen Sie  $\pi_3^s(\mathbb{C}P^n)$  für alle  $n \geq 2$ .

*Übungen zu Abschnitt 3.i.*

3.135. ÜBUNG. Es sei  $p: S^3 \rightarrow S^2$  die Hopf-Faserung aus Beispiel 3.33. Bestimmen Sie die gerahmte Untermannigfaltigkeit  $(M, \tau)$ , die das Bild von  $[p]$  unter der Pontryagin-Thom-Konstruktion repräsentiert.





## Elementare Homotopietheorie

In diesem Abschnitt fassen wir einige Konstruktionen und Sätze zusammen, die uns später helfen, Homologie- und Kohomologietheorien homotopietheoretisch zu betrachten. In den ersten beiden Abschnitten betrachten wir die Unterkategorien  $\mathcal{CW} \subset kw\mathcal{H} \subset \mathcal{Top}$ . Während CW-Komplexe vor allem homotopietheoretisch schöne Eigenschaften haben, zeichnen sich die kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume dadurch aus, dass mit Ihnen viele elementare topologische Konstruktionen möglich sind, und dabei nur sehr selten pathologisches Verhalten auftritt.

Im letzten Abschnitt schauen wir uns an, wie wir beliebige Abbildungen durch homotopieäquivalente Faserungen oder Kofaserungen ersetzen können. In diesem Zusammenhang lernen wir zwei Typen topologischer Sequenzen kennen, aus denen wir viele exakte Sequenzen ableiten können.

### 4.a. Eine angenehme Kategorie topologischer Räume

Wir betrachten die Kategorie  $kw\mathcal{H}$  der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume und zeigen, dass in ihr (fast) alle wichtigen Konstruktionen mit (fast) allen wünschenswerten Eigenschaften möglich sind. Zum Beispiel gilt das Exponentialgesetz aus Satz 1.60 ohne weitere Voraussetzungen an die beteiligten Räume. In diesem Zusammenhang führen wir den Begriff einer abgeschlossenen monoidalen Kategorie ein, der es uns ermöglicht, einige der Konstruktionen im Beweis des Exponentialgesetzes besser zu verstehen.

Wir betrachten dazu eine sogenannte *volle Unterkategorie*  $kw\mathcal{H}$  der Kategorie  $\mathcal{Top}$ , das heißt, unsere Kategorie enthält eine gewisse Auswahl der Objekte von  $\mathcal{Top}$ , aber für je zwei Objekten  $X, Y$  von  $kw\mathcal{H}$  gilt

$$\text{hom}_{kw\mathcal{H}}(X, Y) = \text{hom}_{\mathcal{Top}}(X, Y) ,$$

es sind also nach wie vor alle stetigen Abbildungen erlaubt. Die Definition von  $kw\mathcal{H}$  erfolgt, indem wir mit stetigen Abbildungen  $f: K \rightarrow X$  von Kompakta nach  $X$  gewisse Eigenschaften „testen“. Dabei erinnern wir uns, dass bei uns alle kompakten Räume gemäß Definition 1.50 als Hausdorff vorausgesetzt sind.

4.1. DEFINITION. Es sei  $X$  ein topologischer Raum.

(1) Es bezeichne  $kX$  den Raum  $X$  mit der *kompakt erzeugten Topologie*

$$\{ U \subset X \mid f^{-1}(U) \subset K \text{ offen für alle Kompakta } K \text{ und alle stetigen } f: K \rightarrow X \} .$$

(2) Wir nennen  $X$  *kompakt erzeugt*, wenn  $X = kX$ .

(3) Wir nennen  $X$  *schwach Hausdorff*, wenn  $f \subset X$  abgeschlossen ist für alle Kompakta  $K$  und alle stetigen Abbildungen  $f: K \rightarrow X$ .

(4) Es bezeichne  $kw\mathcal{H} \subset \mathcal{Top}$  die volle Unterkategorie der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume.

4.2. BEMERKUNG. Die folgenden elementaren Eigenschaften der obigen Begriffe überprüfen wir in den Übungen.

(1) Die kompakte erzeugte Topologie auf  $X$  ist feiner als die ursprüngliche, insbesondere ist  $\text{id}_X: kX \rightarrow X$  stetig.

- (2) Es gilt  $k(kX) = kX$  für alle  $X$ .
- (3) Ein Raum  $X$  ist genau dann kompakt erzeugt, wenn für jeden Raum  $Y$  und jede Abbildung  $g: X \rightarrow Y$  von Mengen äquivalent sind:
- (a) die Abbildung  $g$  ist stetig, und
  - (b) für jedes Kompaktum  $K$  und jede stetige Abbildung  $f: K \rightarrow X$  ist  $g \circ f: K \rightarrow Y$  stetig.

Wir können Stetigkeit also mit Abbildungen  $f: K \rightarrow X$  testen.

- (4) Die Zuordnung  $X \mapsto kX$  definiert einen Funktor  $k: \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Top}$ .
- (5) Jeder Hausdorff-Raum ist schwach Hausdorff nach Bemerkung 1.51 (2) und (5).
- (6) Jeder schwache Hausdorff-Raum ist (T1), denn der einpunktige Raum  $\text{pt}$  ist kompakt.
- (7) In jedem kompakt-erzeugten schwach-Hausdorff-Raum haben konvergente Folgen eindeutige Grenzwerte.
- (8) Bezeichne  $w\mathcal{H}$  die volle Unterkategorie der schwach-Hausdorff-Räume, dann ist  $k: w\mathcal{H} \rightarrow kw\mathcal{H}$  rechtsadjungiert zur Inklusion  $kw\mathcal{H} \subset kw\mathcal{H}$ , das heißt für alle  $X \in kw\mathcal{H}$  und  $Y \in w\mathcal{H}$  gilt

$$\text{hom}_{kw\mathcal{H}}(X, kY) = \text{hom}_{w\mathcal{H}}(X, Y) .$$

- (9) Ein kompakt erzeugter Raum  $X$  ist genau dann schwach Hausdorffsch, wenn die Diagonale  $\Delta X = \{ (x, x) \mid x \in X \} \subset k(X \times X)$  abgeschlossen ist.

Zu (5) und (6) siehe Übung 4.46 (1). Zu (1)–(3) siehe Übung 4.47. Zu (8) siehe Übung 4.48 (1). Zu (9) siehe Übung 4.49 (2). Auf Übung (7) kommen wir nach Proposition 4.3 zurück.

Wir sehen später, dass  $k(X \times X)$  das Produkt von  $X$  mit sich in der Kategorie  $k\mathcal{Top}$  der kompakt erzeugten Räume beschreibt. Also werden schwache Hausdorff-Räume durch die gleiche Eigenschaft in  $k\mathcal{Top}$  charakterisiert, wie Hausdorff-Räume in  $\mathcal{Top}$ . In der algebraischen Geometrie definiert man auf ähnlichem Wege ein Analogon des Hausdorff-Begriffs.

Wir wollen uns überzeugen, dass die Kategorie  $kw\mathcal{H}$  genug interessante Räume enthält.

4.3. PROPOSITION. *Es sei  $X$  ein topologischer Raum.*

- (1) *Wenn jede folgenabgeschlossene Teilmenge von  $X$ , das heißt, jede Teilmenge  $A \subset X$ , für die jede in  $X$  konvergente Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $A$  ihre Grenzwerte in  $A$  annimmt, abgeschlossen ist, dann ist  $X$  kompakt erzeugt.*
- (2) *Wenn  $X$  lokalkompakt ist, ist  $X$  kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum.*

BEWEIS. Zu (1) sei  $A \subset X$  eine Teilmenge, so dass  $f^{-1}(A) \subset K$  abgeschlossen ist für alle Kompakta  $K$  und alle  $f: K \rightarrow X$ . Nach Voraussetzung reicht es zu zeigen, dass  $A$  folgenabgeschlossen ist, denn dann sind auch alle  $k$ -offenen Teilmengen von  $X$  offen. Sei also  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$  und  $x \in X$  ein Grenzwert (da wir Hausdorff nicht vorausgesetzt haben, könnte es mehrere Grenzwerte geben). Wir bilden  $K = \{ \frac{1}{n} \mid 0 \neq n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$  nach  $X$  ab durch  $f(\frac{1}{n}) = a_n$  und  $f(0) = x$ . Da  $x$  Grenzwert ist, ist diese Abbildung stetig. Da  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen angenommen wurde, folgt  $0 \in f^{-1}(A)$ , somit  $x \in A$ .

Zu (2) sei  $U \subset X$  eine Teilmenge, so dass  $f^{-1}(U) \subset K$  offen ist für alle Kompakta  $K$  und alle  $f: K \rightarrow X$ . Zu zeigen ist, dass jeder Punkt  $x \in U$  eine Umgebung in  $U$  besitzt. Nach Voraussetzung besitzt  $x$  eine kompakte Umgebung  $V$ , insbesondere enthält  $V$  eine in  $X$  offene Umgebung  $U'$  von  $x$ . Dann ist das Urbild  $U \cap V$  von  $U$  in  $V$  unter der Inklusion  $U \rightarrow V$  offen, also existiert eine offene Menge  $U'' \subset X$  mit  $U'' \cap V = U \cap V$ . Aber dann ist  $U' \cap U'' \subset V \cap U'' \subset U$  eine offene Umgebung von  $x$  in  $U$ , also ist  $U$  offen. Außerdem haben wir lokalkompakte Räume in Definition 1.57 als Hausdorff vorausgesetzt.  $\square$

Mit dem gleichen Trick wie im Beweis von (1) zeigt man auch Bemerkung 4.2 (7).

4.4. FOLGERUNG. *Die Kategorie  $kw\mathcal{H}$  enthält*

- (1) alle Hausdorff-Räume, die das Abzählbarkeitsaxiom (A1) erfüllen,
- (2) alle metrischen oder metrisierbaren Räume,
- (3) alle topologischen Mannigfaltigkeiten, und
- (4) alle CW-Komplexe.

Sie enthält jedoch keine algebraischen Varietäten mit der Zariski-Topologie.

BEWEIS. Nach Satz 1.36 impliziert (A1), dass folgen-abgeschlossene Teilmengen abgeschlossen sind, daher gilt (1). Metrische Räume erfüllen stets (A1) und (T2), also gilt (2). Topologische Mannigfaltigkeiten erfüllen nach Definition 1.77 sogar (A2) und (T2), also gilt (3), sie sind überdies sogar lokal kompakt. CW-Komplexe sind nach Konstruktion kompakt erzeugt, denn zum Testen reichen bereits die charakteristischen Abbildungen aus Definition 1.80. Außerdem sind CW-Komplexe normal nach Satz 1.84, also insbesondere Hausdorff.  $\square$

Man beachte, dass CW-Komplexes nicht automatisch (A1) sind, siehe Bemerkung 1.83.

Wir kommen jetzt zu den wichtigsten Konstruktionen über universelle Eigenschaften. Die meisten der folgenden Sätze zeigen wir in den Übungen. Als erstes betrachten wir Initialtopologien.

- 4.5. PROPOSITION. (1) *Unterräume schwacher Hausdorff-Räume sind schwach Hausdorff. Es sei  $X \in kw\mathcal{H}$  und  $A \subset X$  ein Unterraum, dann ist  $kA \rightarrow X$  stetig und erfüllt die charakteristische Eigenschaft eines Unterraums aus Satz 1.43 in  $kw\mathcal{H}$ .*
- (2) *Das Produkt schwacher Hausdorff-Räume ist schwach Hausdorff. Für eine Familie  $(X_i)_{i \in I}$  in  $kw\mathcal{H}$  erfüllt der Raum  $k \prod_{i \in I} X_i$  die universelle Eigenschaft aus Satz 1.46 in  $kw\mathcal{H}$ .*
- (3) *Es sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge schwacher Hausdorff-Räume mit Abbildungen  $f_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$  für  $n > 0$ , dann ist der (inverse) Limes*

$$X = \lim_{\leftarrow} X_n = \left\{ (x_n)_n \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \mid f_n(x_n) = x_{n-1} \text{ für alle } n > 0 \right\}$$

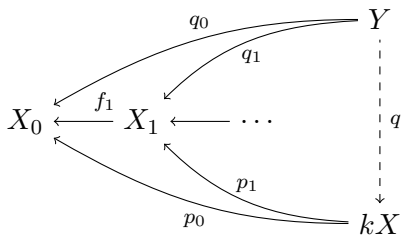
*schwach Hausdorff, und  $kX$  zusammen mit den Abbildungen*

$$p_k: kX \rightarrow X_k, \quad p_k((x_n)_n) = x_k,$$

*erfüllt die universelle Eigenschaft des Limes, das heißt für alle Räume  $Y$  in  $kw\mathcal{H}$  mit stetigen Abbildungen  $q_k: Y \rightarrow X_k$ , so dass  $f_k \circ q_k = q_{k-1}$  für alle  $k > 0$ , existiert eine eindeutige Abbildung  $q: Y \rightarrow kX$ , so dass  $q_k = p_k \circ q$  für alle  $k$ .*

BEWEIS. Zu (1) siehe Übungen 4.46 (3) und 4.48 (2). Zu (2) siehe Übungen 4.46 (3) und 4.48 (3). Zu (3) siehe Übung 4.54.  $\square$

Zu (3) betrachte das Diagramm



Ein Beispiel hierzu findet sich in Übung 4.55. In Wirklichkeit ist der Begriff des (inversen) Limes wesentlich allgemeiner; Produkte und Pullbacks sind weitere Spezialfälle. Es folgen Finaltopologien.

- 4.6. PROPOSITION. (1) *Topologische Summen (disjunkte Vereinigungen) kompakt erzeugter Räume sind wieder kompakt erzeugt. Disjunkte Vereinigungen schwacher Hausdorff-Räume sind wieder schwach Hausdorff.*  
 (2) *Quotienten kompakt erzeugter Räume sind wieder kompakt erzeugt. Sei  $q: X \rightarrow Y$  surjektiv und  $X$  schwach Hausdorff, dann ist die Quotiententopologie auf  $Y$  genau dann schwach Hausdorff, wenn  $(q \times q)^{-1}(\Delta Y) \subset k(X \times X)$  abgeschlossen ist.*

BEWEIS. Zu (1) siehe Übung 4.49 (1) und (3). Zu (2) siehe Übung 4.49 (1) und (4).  $\square$

Kolimiten sind nicht ganz so leicht zu haben — hier könnte die schwache Hausdorff-Eigenschaft verletzt sein. Daher braucht man einen Funktor, der sie wieder herstellt. Es sei  $X$  kompakt erzeugt. Dann gibt es eine minimale abgeschlossene Teilmenge  $R \subset X \times X$ , die eine Äquivalenzrelation darstellt. Der Quotient  $hX$  von  $X$  nach dieser Relation liegt in  $kw\mathcal{H}$ , siehe Übung 4.51, in der auch das folgende Resultat bewiesen wird.

4.7. PROPOSITION. *Es sei  $X$  kompakt erzeugt und  $q: X \rightarrow hX$  die Quotientenabbildung. Dann gibt es zu jedem Raum  $Y$  in  $kw\mathcal{H}$  und jeder stetigen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine eindeutige stetige Abbildung  $\bar{f}: hX \rightarrow Y$  mit  $f = \bar{f} \circ q$ . Insbesondere erhalten wir einen Funktor  $h: k\text{Top} \rightarrow kw\mathcal{H}$ .  $\square$*

4.8. FOLGERUNG. *Es sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $kw\mathcal{H}$ , und für  $i \leq j$  sei  $f_{ij}: X_i \rightarrow X_j$  eine stetige Abbildung, so dass  $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$  für alle  $i \leq j \leq k$ . Dann erfüllt der Raum  $\varinjlim X_n$  die universelle Eigenschaft eines Kolimes aus Folgerung 1.76.  $\square$*

Ein Beispiel dazu findet sich in Übung 4.52.

#### 4.b. Das Exponentialgesetz

Wir kommen jetzt zum Raum der stetigen Abbildungen, siehe auch Abschnitt 1.f. Um den topologischen Aufwand gering zu halten, führen wir den Begriff der abgeschlossenen monoidalen Kategorie ein. Um den abstrakten Aufwand in Grenzen zu halten, begnügen wir uns mit einer relativ einfachen Version, die für den Anfang ausreicht.

4.9. DEFINITION. Eine *monoidale Kategorie*  $(\mathcal{C}, \otimes, E)$  ist eine Kategorie  $\mathcal{C}$  mit

- einem Funktor  $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , dem *Tensorprodukt*,
- einem *Einheitsobjekt*  $E$ , und
- natürlichen Isomorphismen

$$\alpha_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z),$$

$$\lambda_X: E \otimes X \xrightarrow{\cong} X \quad \text{und} \quad \rho_X: X \otimes E \xrightarrow{\cong} X,$$

so dass für alle Objekte  $X, Y, Z, W$  die folgenden Axiome gelten:

$$\alpha_{X,Y,Z \otimes W} \circ \alpha_{X \otimes Y, Z, W} = (\text{id}_X \otimes \alpha_{Y,Z,W}) \circ \alpha_{X,Y \otimes Z, W} \circ (\alpha_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_W), \quad (1)$$

$$\rho_X \otimes \text{id}_Y = (\text{id}_X \otimes \lambda_Y) \circ \alpha_{X,E,Y}. \quad (2)$$

Eine (*rechts-*) *abgeschlossene monoidale Kategorie*  $\mathcal{C}$  ist eine monoidale Kategorie mit

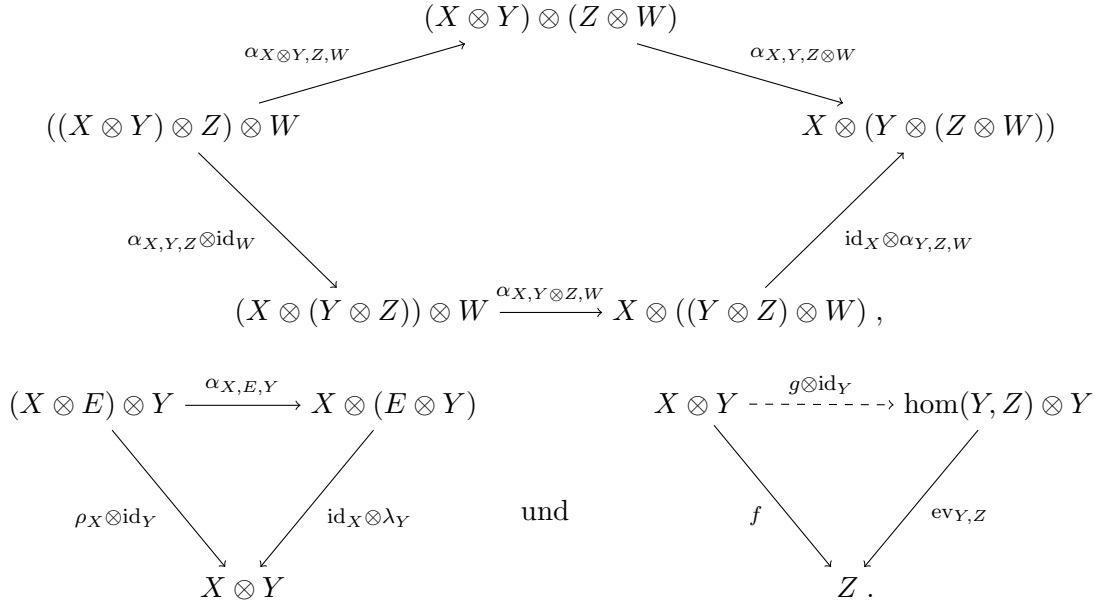
- einem Objekt  $\text{hom}(Y, Z)$  und
- einem Morphismus  $\text{ev}_{Y,Z}: \text{hom}(Y, Z) \otimes Y \rightarrow Z$

für je zwei Objekte  $Y, Z$ , so dass zu jedem Morphismus  $f: X \otimes Y \rightarrow Z$  ein eindeutiger Morphismus  $g: X \rightarrow \text{hom}(Y, Z)$  existiert mit

$$f = \text{ev}_{Y,Z} \circ (g \otimes \text{id}_Y): X \otimes Y \rightarrow Z. \quad (3)$$

Eine *kartesisch abgeschlossene Kategorie* ist eine abgeschlossene monoidale Kategorie, bei der das Tensorprodukt ein Produkt im Sinne von Bemerkung 1.47 ist und das Einheitsobjekt mit dem terminalen Objekt übereinstimmt.

Zu den Eigenschaften (1)–(3) gehören die kommutativen Diagramme



Die Eigenschaften (1) und (2) besagen, dass die Isomorphieklassen der Objekte von  $\mathcal{C}$  eine „große“ Halbgruppe oder auch Monoid bilden („groß“ bedeutet, dass der Träger eine echte Klasse sein kann). Man nennt eine Kategorie *streng monoidal*, wenn  $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$  und  $E \otimes X = X = X \otimes E$  für alle Objekte  $X, Y$  und  $Z$  gelten, und  $\alpha_{X, Y, Z}$ ,  $\lambda_X$  und  $\rho_X$  jeweils die Identitäten dieser Objekte sind. Die meisten naiv konstruierten monoidalen Kategorien sind nicht streng monoidal, aber mit einer Art Auswahlaxiom lässt sich zu jeder monoidalen Kategorie eine äquivalente streng monoidale Kategorie konstruieren.

Eigenschaft (3) heißt die universelle Eigenschaft des *internen hom-Funktors*  $\text{hom}$ . In der Tat kann man zeigen, dass  $\text{hom}$  ein im ersten Argument kontravarianter und im zweiten Argument kovarianter Funktor ist, siehe Übung 4.56. „Intern“ bedeutet hier, dass  $\text{hom}(Y, Z)$  im Gegensatz zu  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  ein Objekt der Kategorie  $\mathcal{C}$  ist.

4.10. BEISPIEL. Wir geben eine Liste uns bekannter Kategorien mit verschiedenen monoidalen Strukturen an. Jeder der folgenden Kategorien ist jeweils monoidal

- mit Koproduct und initialem Objekt,
- mit Produkt und terminalem Objekt, beziehungsweise
- mit Tensorprodukt und Einheitsobjekt (falls definiert),

wir erhalten also pro Zeile bis zu drei verschiedene monoidale Kategorien, und nur in zwei Fällen ist das abstrakte Tensorprodukt aus Definition 4.9 tatsächlich ein Tensorprodukt.

Kategorie	Koproduct	Initiales Objekt	Produkt	Terminales Objekt	Tensorprodukt	Einheitsobjekt
<i>Set</i>	$\sqcup$	$\emptyset$	$\times$	pt	$\times$	pt
<i>Set</i> <sub>+</sub>	$\vee$	pt	$\times$	pt	$\wedge$	$S^0$
<i>Grp</i>	*	{e}	$\times$	{e}	—	—

$Ab$	$\oplus$	$0$	$\oplus$	$0$	$\otimes$	$\mathbb{Z}$
$Vec_{\mathbb{k}}$	$\oplus$	$0$	$\oplus$	$0$	$\otimes$	$\mathbb{k}$
$Top$	$\sqcup$	$\emptyset$	$\times$	pt	$(\times)$	(pt)
$Top_+$	$\vee$	pt	$\times$	pt	$(\wedge)$	$(S^0)$
$kw\mathcal{H}$	$\sqcup$	$\emptyset$	$\times$	pt	$\times$	pt
$kw\mathcal{H}_+$	$\vee$	pt	$\times$	pt	$\wedge$	$S^0$

All diese Beispiele sind sogar *symmetrische monoidale Kategorien*, das heißt, es gibt natürliche Isomorphismen  $\tau_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ , die gewisse Zusatzaxiome erfüllen, auf die wir aus Zeitgründen nicht eingehen wollen.

- (1) Die Kategorie  $(Set, \times, \text{pt})$  ist kartesisch abgeschlossen. Das haben wir im Beweis von Satz 1.60 bereits ausgenutzt. Für die Kategorie  $(Set_+, \wedge, S^0)$  der punktierten Mengen verwenden wir die gleiche Notation wie für  $Top_+$ . Sie ist abgeschlossen monoidal, aber das kartesische Produkt „ $\times$ “ ist nicht das Tensorprodukt „ $\wedge$ “.
- (2) Die Kategorien  $Ab = Mod_{\mathbb{Z}}$  und allgemeiner  $Mod_R$  für einen kommutativen Ring  $R$  mit 1 sind abgeschlossen monoidal, denn die linearen Abbildungen zwischen zwei  $R$ -Moduln bilden selbst wieder einen  $R$ -Modul. Im Spezialfall eines Körpers  $R = \mathbb{k}$  gilt  $Mod_R = Vec_{\mathbb{k}}$ .

Wir kennen die folgende *charakteristische Eigenschaft des Tensorproduktes*. Es gibt eine bilineare Abbildung  $\otimes: X \times Y \rightarrow X \otimes Y$ , und zu jeder bilinearen Abbildung  $B: X \times Y \rightarrow Z$  gibt es eine eindeutige lineare Abbildung  $b: X \otimes Y \rightarrow Z$ , so dass  $B = b \circ \otimes$ .

Mit dem internen hom-Funktor können wir jede bilineare Abbildung  $X \times Y \rightarrow Z$  durch einen Morphismus  $X \rightarrow \text{hom}(Y, Z)$  ersetzen. Aus diesem Grund trägt das Produkt in einer abgeschlossenen monoidalen Kategorie den Namen „Tensorprodukt“.

- (3) In der Unterkategorie  $fdVec_{\mathbb{k}} \subset Vec_{\mathbb{k}}$  der endlich-dimensionalen Vektorräume gibt es einen Dualitätsfunktor  $X \mapsto X^* = \text{hom}(X, \mathbb{k})$ , so dass  $\text{hom}(X, Y) \cong X^* \otimes Y$ . In den anderen obigen Beispielen gibt es so etwas jedoch nicht.
- (4) Die Kategorien  $(Top, \times, \text{pt})$  und  $(Top_+, \wedge, S^0)$  sind monoidal. Für  $Top_+$  haben wir das in Bemerkung 3.74 angedeutet. Beide Kategorien sind nicht abgeschlossen, da einzelne Punkte im Exponentialgesetz 1.60 nicht ohne Voraussetzungen gelten.
- (5) Die Kategorien  $kw\mathcal{H}$  und  $kw\mathcal{H}_+$  sind nach Satz 4.14 und Folgerung 4.16 abgeschlossen und monoidal. Zur Bedeutung der Symbole „ $\times$ “ und „ $\wedge$ “ siehe 4.15.

4.11. BEMERKUNG. Wir können umgekehrt *abgeschlossene Kategorien*  $(\mathcal{C}, \text{hom}, E)$  als Kategorien mit Einheitsobjekt  $E$ , internem hom-Funktor  $\text{hom}$  und gewissen natürlichen Transformationen betrachten. In diesem Zusammenhang formulieren wir die *universelle Eigenschaft des Tensorproduktes*. Es gibt einen Morphismus  $\otimes_{X,Y}: X \rightarrow \text{hom}(Y, X \otimes Y)$ , so dass zu jedem  $f: X \rightarrow \text{hom}(Y, Z)$  ein eindeutiger Morphismus  $F: X \otimes Y \rightarrow Z$  mit  $f = \text{hom}(Y, F) \circ \otimes_{X,Y}$  existiert.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\otimes_{X,Y}} & \text{hom}(Y, X \otimes Y) \\
 & \searrow f & \swarrow \text{hom}(Y, F) \\
 & & \text{hom}(Y, Z) .
 \end{array}$$

In jeder abgeschlossenen monoidalen Kategorie gilt diese universelle Eigenschaft, siehe Übung 4.57.

4.12. BEMERKUNG. In einer Kategorie sind Objekte üblicherweise abstrakt, keine Mengen, deren Elemente man (mit der Sprache der Kategorien) erkennen könnte. Man kann also auch Morphismen nicht als Zuordnungsvorschriften interpretieren. In abgeschlossenen monoidalen Kategorien geht

all das jedoch. Dazu wollen wir annehmen, dass unsere Kategorien *lokal klein* sind, das heißt, dass  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  für alle  $X, Y$  eine Menge ist.

Sei  $\mathcal{C}$  zunächst nur monoidal. Jedem Objekt  $X$  können wir die Menge  $|X| = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, X)$  zuordnen. Wenn  $E$  das initiale Objekt (und  $\otimes$  das Koprodukt) ist, hat diese Menge stets nur ein Element. In  $(\text{Set}, \times, \text{pt})$  und  $(\text{Top}, \times, \text{pt})$  hingegen entsprechen die Bildpunkte von Morphismen  $\text{pt} \rightarrow X$  genau den (mengentheoretisch definierbaren) Elementen von  $X$ . In  $(\text{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$  und  $(\text{Vec}_{\mathbb{k}}, \otimes, \mathbb{k})$  identifizieren wir einen Morphismus  $E \rightarrow X$  mit dem Bild von  $1 \in E$ . In  $(\text{Set}_+, \wedge, S^0)$  und  $(\text{Top}_+, \wedge, S^0)$  betrachten wir das Bild desjenigen Punktes in  $S^0$ , der nicht Basispunkt ist. In diesen Fällen ist  $|X|$  stets die dem Objekt  $X$  zugrundeliegende Menge.

Ab jetzt sei  $\mathcal{C}$  abgeschlossen. Für  $X = E$  erhalten wir mit Definition 4.9 (3) eine bijektive Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \xrightarrow{\circ \lambda_X} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E \otimes Y, Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, \text{hom}(Y, Z)) = |\text{hom}(Y, Z)| ,$$

da  $\lambda_X$  ein Isomorphismus ist. Also entspricht  $\text{hom}(Y, Z)$  der Menge  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ . Um Morphismen auf Elementen auszuwerten, benutzen wir die Komposition  $\circ$  von Morphismen in  $\mathcal{C}$ :

$$|\text{hom}(Y, Z)| \times |Y| \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, Y) \xrightarrow{\circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, Z) = |Z| .$$

Wir erhalten also eine Abbildung  $|\text{hom}(Y, Z)| \rightarrow \text{Hom}_{\text{Set}}(|Y|, |Z|)$ , und man kann überprüfen, dass das einen Funktor  $|\cdot| : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  liefert. In den obigen Beispielen ist  $|\cdot|$  natürlich isomorph zum vergesslichen Funktor, der jedem Objekt die zugrundeliegende Menge zuordnet.

Sei schließlich  $\mathcal{C}$  zusätzlich punktiert, das heißt, es gibt ein Nullobjekt  $0$ , also eines, das gleichzeitig initial und terminal ist. Dann erhalten wir einen Funktor  $|\cdot| : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}_+$ , dabei repräsentiert der Nullmorphismus  $E \rightarrow 0 \rightarrow X$  den Basispunkt von  $|X|$ .

4.13. SATZ (Abstraktes Exponentialgesetz). *In jeder abgeschlossenen monoidal Kategorie existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\text{hom}(X \otimes Y, Z) \cong \text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z)) .$$

BEWEIS. Wir benutzen die Assoziativität des Tensor-Produktes und die universelle Eigenschaft des internen hom-Funktors, um Abbildungen  $\beta_{X,Y,Z}$  und  $\gamma_{X,Y,Z}$  zu definieren durch die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}(X \otimes Y, Z) \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{\beta_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_{X \otimes Y}} & \text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z)) \otimes X \otimes Y \\ \text{ev}_{X \otimes Y, Z} \downarrow & \searrow \beta'_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_Y & \downarrow \text{ev}_{X, \text{hom}(Y,Z)} \otimes \text{id}_Y \\ Z & \xleftarrow{\text{ev}_{Y,Z}} & \text{hom}(Y, Z) \otimes Y , \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z)) \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{\gamma_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_{X \otimes Y}} & \text{hom}(X \otimes Y, Z) \otimes X \otimes Y \\ \text{ev}_{X, \text{hom}(Y,Z)} \otimes \text{id}_Y \downarrow & \searrow & \downarrow \text{ev}_{X \otimes Y, Z} \\ \text{hom}(Y, Z) \otimes Y & \xrightarrow{\text{ev}_{Y,Z}} & Z . \end{array}$$

Wir setzen Teile der obigen Diagramme entlang  $\text{ev}_{Y,Z} \circ (\text{ev}_{X,\text{hom}(Y,Z)} \otimes \text{id}_Y)$  aneinander. Dann folgt  $\gamma_{X,Y,Z} \circ \beta_{X,Y,Z} = \text{id}_{\text{hom}(X \otimes Y, Z)}$  mit der Eindeutigkeitsaussage in Definition 4.9 (3):

$$\begin{array}{ccc}
\text{hom}(X \otimes Y, Z) \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{\beta_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_{X \otimes Y}} & \text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z)) \otimes X \otimes Y \\
\downarrow \text{ev}_{X \otimes Y, Z} & \searrow \text{id}_{\text{hom}(X \otimes Y, Z)} \otimes \text{id}_{X \otimes Y} & \downarrow \gamma_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_{X \otimes Y} \\
Z & \xleftarrow{\text{ev}_{X \otimes Y, Z}} & \text{hom}(X \otimes Y, Z) \otimes X \otimes Y
\end{array}$$

Als Zwischenschritt zeigen wir  $\beta'_{X,Y,Z} \circ (\gamma_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_X) = \text{ev}_{X,\text{hom}(Y,Z)}$  mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z)) \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{\gamma_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_{X \otimes Y}} & \text{hom}(X \otimes Y, Z) \otimes X \otimes Y \\
\downarrow \text{ev}_{Y,Z} \circ (\text{ev}_{X,\text{hom}(Y,Z)} \otimes \text{id}_Y) & \searrow \text{ev}_{X,\text{hom}(Y,Z)} \otimes \text{id}_Y & \downarrow \beta'_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_Y \\
Z & \xleftarrow{\text{ev}_{Y,Z}} & \text{hom}(Y, Z) \otimes Y
\end{array}$$

Jetzt folgt auch  $\beta_{X,Y,Z} \circ \gamma_{X,Y,Z} = \text{id}_{\text{hom}(X,\text{hom}(Y,Z))}$ , indem wir Hälften der ersten zwei Diagramme entlang  $\beta'_{X,Y,Z} \circ (\gamma_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_X) = \text{ev}_{X,\text{hom}(Y,Z)}$  zusammensetzen:

$$\begin{array}{ccc}
\text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z)) \otimes X & \xrightarrow{\gamma_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_X} & \text{hom}(X \otimes Y, Z) \otimes X \\
\downarrow \text{ev}_{X,\text{hom}(Y,Z)} & \searrow \text{id}_{\text{hom}(X,\text{hom}(Y,Z))} \otimes \text{id}_X & \downarrow \beta_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_X \\
\text{hom}(Y, Z) & \xleftarrow{\text{ev}_{X,\text{hom}(Y,Z)}} & \text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z)) \otimes X
\end{array} \quad \square$$

4.14. SATZ. Die Kategorie  $kw\mathcal{H}$  ist kartesisch abgeschlossen.

Insbesondere gilt in  $kw\mathcal{H}$  das Exponentialgesetz wie in Satz 1.60, aber ohne zusätzliche Voraussetzungen an die beteiligten Räume.

BEWEIS. Man überprüft leicht, dass das kompakt erzeugte Produkt aus Proposition 4.5 assoziativ ist mit Einheitsobjekt  $\text{pt}$ , somit ist  $(kw\mathcal{H}, k(\cdot \times \cdot), \text{pt})$  eine monoidale Kategorie.

Als internes hom-Objekt zu  $Y, Z$  definieren wir

$$\text{hom}(Y, Z) = kC(Y, Z),$$

wobei  $C(Y, Z)$  wie immer die kompakt-offene Topologie trage. Es bleibt zu zeigen, dass  $kC(Y, Z)$  schwach Hausdorffsch ist. Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit von  $\text{im } F \subset kC(Y, Z)$  für alle Kompakta  $K$  und alle  $F: K \rightarrow kC(Y, Z)$ . Für alle Kompakta  $L$  und alle Testabbildungen  $G: L \rightarrow kC(Y, Z)$  muss also  $G^{-1}(\text{im } F) \subset L$  abgeschlossen sein. Betrachte jetzt die zugehörigen Abbildungen  $f: K \times Y \rightarrow Z$  und  $g: K \times Y \rightarrow Z$  sowie  $\iota_y: k(K \times L) \rightarrow k(K \times Y \times L \times Y)$  mit  $\iota_y(k, \ell) = (k, y, \ell, y)$ , dann



gilt

$$\begin{aligned} G^{-1}(\text{im } F) &= \{ \ell \in L \mid \text{es gibt } k \in K \text{ mit } f(k, y) = g(\ell, y) \in Z \text{ für alle } y \in Y \} \\ &= \pi_L \bigcap_{y \in Y} \iota_y^{-1}(f \times g)^{-1}(\Delta Z). \end{aligned}$$

Da  $Z$  schwach Hausdorff ist, ist  $\Delta Z \subset k(Z \times Z)$  abgeschlossen, also auch  $\iota_y^{-1}(f \times g)^{-1}(\Delta Z) \subset k(K \times L) = K \times L$ . Somit ist  $G^{-1}(\text{im } F)$  das Bild einer abgeschlossenen, mithin kompakten Teilmenge von  $K \times L$ , und somit selbst kompakt, also auch abgeschlossen in  $L$ , was zu zeigen war.

Als nächstes definieren wir  $\text{ev}_{Y,Z}: k(kC(Y, Z) \times Y) \rightarrow Z$  wie in Satz 1.60 (5). Es sei  $K$  kompakt und  $f: K \rightarrow k(kC(Y, Z) \times Y)$  stetig, insbesondere sind  $f_1: K \rightarrow C(Y, Z)$  und  $f_2: K \rightarrow Y$  stetig. Zu zeigen ist, dass  $\text{ev}_{Y,Z} \circ f$  stetig ist. Sei dazu  $U \subset Z$  offen, dann betrachte

$$V = (\text{ev}_{Y,Z} \circ f)^{-1}(U) = \{ x \in K \mid f_1(x)(f_2(x)) \in U \}.$$

Sei  $x \in V$ . Da  $f_1(x): Y \rightarrow Z$  und  $f_2$  stetig sind, existiert eine kompakte Umgebung  $L \subset K$  von  $x$ , so dass  $f_2(L) \subset (f_1(x))^{-1}(U)$ . Sei  $S_{f_2(L),U}$  die zugehörige Subbasismenge der kompakt offenen Topologie wie in Definition 1.57, dann folgt insbesondere  $f_1(x) \in S_{f_2(L),U}$ . Da  $f_1$  stetig ist, erhalten wir eine Umgebung  $f_1^{-1}(S_{f_2(L),U}) \cap L \subset V$  von  $x$ , also ist  $V$  offen und  $\text{ev}_{Y,Z} \circ f$  stetig.

Sei jetzt  $f: k(X \times Y) \rightarrow Z$  stetig gegeben, dann definieren wir  $g: X \rightarrow kC(Y, Z)$  wie in Satz 1.60. Um zu zeigen, dass  $g$  stetig ist, betrachten wir eine Testabbildung  $h: K \rightarrow X$  mit  $K$  kompakt. Es sei  $L \subset Y$  kompakt mit Einbettungsabbildung  $\iota: L \rightarrow Y$  und  $U \subset Z$  offen, dann ist zu zeigen, dass  $h^{-1}g^{-1}S_{L,U}$  in  $K$  offen ist. Dazu sei

$$\begin{aligned} p \in h^{-1}g^{-1}S_{L,U} &= \{ q \in K \mid f(h(q), \iota(\ell)) \in U \text{ für alle } \ell \in L \} \\ \text{und} \quad V &= (f \circ (h \times \iota))^{-1}(U) \subset K \times L. \end{aligned}$$

Da  $f$  stetig ist, ist  $f \circ (h \times \iota): K \times L \rightarrow Z$  ebenfalls stetig, also ist  $V$  offen. Da  $h(p) \times L \subset V$  und  $L$  kompakt ist, gibt es eine offene Teilmenge  $W \subset K$  mit  $W \times L \subset V$ . Es folgt  $p \in W \subset h^{-1}g^{-1}S_{L,U}$ , also ist  $h^{-1}g^{-1}S_{L,U}$  offen, und  $g \circ h$  und  $g$  sind stetig. Außerdem ist  $g$  bereits als Abbildung von Mengen eindeutig bestimmt. Damit sind alle Axiome aus Definition 4.9 überprüft.  $\square$

4.15. NOTATION. Im Folgenden werden wir oft — manchmal stillschweigend — in  $kw\mathcal{H}$  arbeiten. Dann verwenden wir die üblichen Symbole für Produkte, Koprodukte, Unterräume, Quotienten, Limites, Kolimites, Abbildungsräume und ähnliches für die in den Propositionen 4.5, 4.6, Satz 4.14 und Folgerungen 4.8, 4.16 angegebenen Konstruktionen. Beispielsweise schreiben wir  $X \times Y$  und  $X \wedge Y$  anstelle von  $k(X \times Y)$  und  $k(X \wedge Y)$ . Für gut punktierte Räume  $X, Y$  in  $kw\mathcal{H}_+$  schreiben wir

$$Y^X = k\{ f \in kC(X, Y) \mid f(x_0) = y_0 \} \subset kC(X, Y).$$

Im nicht punktierten Fall sei  $Y^{X+} = kC(X, Y)$  auch dann, wenn  $Y$  keinen Basispunkt besitzt. Wenn  $Y = (Y, y_0)$  punktiert ist, haben  $Y^X$  und  $Y^{X+}$  die konstante Abbildung auf  $y_0$  als Basispunkt. Unter einer Einbettung verstehen wir eine injektive Abbildung, die ein Homöomorphismus auf das mit der kompakt erzeugten Unterraum-Topologie versehene Bild ist. Nach Definition bezeichnet  $[X, Y]$  die Menge der punktierten Homotopieklassen von Abbildungen, also die Wegzusammenhangskomponenten von  $Y^X$ . Daher erhalten wir die punktierte Menge

$$[X, Y] = \pi_0(Y^X).$$

4.16. FOLGERUNG. Die Kategorie  $(kw\mathcal{H}_+, k(\cdot \wedge \cdot), S^0)$  der punktierten kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume ist abgeschlossen und monoidal.  $\square$

Wir verstehen jetzt die letzten zwei Zeilen der Tabelle in Beispiel 4.10.

#### 4.c. CW-Komplexe und der Satz von Whitehead

Wir erinnern uns an die Konstruktion von CW-Komplexen in Abschnitt 1.i vor Definition 1.80. Wir modifizieren diese Konstruktion wie folgt. Wie immer sei  $S^{n-1} = \partial D^n$  und  $B^n = \mathring{D}^n$ .

4.17. DEFINITION. Ein Paar  $(X, A)$  heißt *CW-Paar*, wenn  $A$  in  $kw\mathcal{H}$  liegt, und es Mengen  $J^n$ , Räume  $X^{n-1}$  und *Verklebeabbildungen*  $\varphi_j^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $j \in J^n$  gibt, wobei

$$X^{-1} = A, \quad (1)$$

$$X^n = \left( \coprod_{j \in J^n} D^n \right) \cup_{\varphi^n} X^{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

wobei  $\varphi^n: \coprod_{j \in J^n} S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  von den  $\varphi_j^n$  induziert wird, und

$$X = \varinjlim X^n \quad \text{in } \mathcal{Top}. \quad (3)$$

Ein *punktierter CW-Komplex*  $(X, x_0)$  ist ein CW-Paar der Form  $(X, \{x_0\})$ .

Die Räume  $X^n$  heißen *n-Gerüste* oder *n-Skelette*, die induzierten Abbildungen

$$\Phi_j^n: D^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X \quad \text{mit} \quad \Phi_j^n|_{S^{n-1}} = \varphi_j^n$$

heißen *charakteristische Abbildungen*. Man nennt  $e_j^n = \Phi_j^n(B^n)$  eine (*offene*) und  $\bar{e}_j^n = \Phi_j^n(D^n)$  eine *abgeschlossene n-Zelle* von  $X$ .

Die Topologie auf  $X$  ist wie in Definition 1.80 so gewählt, dass  $U \subset X$  genau dann offen ist, wenn  $U \cap A$  und  $U \cap \bar{e}_j^n$  für alle  $n \geq 0$  und alle  $j \in J^n$  offen sind, beziehungsweise, wenn  $U \cap A$  und  $(\Phi_j^n)^{-1}(U) \subset D^n$  für alle  $n \geq 0$  und alle  $j \in J^n$  offen sind. Für einen beliebigen Raum  $Y$  ist eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  genau dann stetig, wenn  $f|_A$  und alle  $f \circ \Phi_j^n: D^n \rightarrow Y$  stetig sind.

Im Fall  $A = \emptyset$  erhalten wir die CW-Komplexe aus Definition 1.80. In Folgerung 4.4 haben wir gesehen, dass die Kategorie  $kw\mathcal{H}$  alle CW-Komplexe umfasst. Aus Proposition 4.6 und Folgerung 4.8 folgt, dass ein CW-Paar ebenfalls ein Paar in  $kw\mathcal{H}$  ist, falls wir den Kolimes in  $kw\mathcal{H}$  bilden. Hier ist allerdings der „gewöhnliche“ Kolimes in  $\mathcal{Top}$  gemeint, der Funktor  $h$  aus Proposition 4.7 wird also nicht angewendet. Daher ist etwas mehr zu zeigen.

4.18. PROPOSITION. *Es sei  $(X, A)$  ein CW-Paar und  $K$  kompakt. Dann trifft für jede stetige Abbildung  $f: K \rightarrow X$  das Bild im  $f$  nur endlich viele Zellen.*

Insbesondere ist jede Zelle  $e_j^n$  an nur endlich viele Zellen in  $X^{n-1}$  angeklebt, da  $S^{n-1}$  kompakt ist. Außerdem ist jede kompakte Teilmenge von  $X$  in einem der Gerüste  $X^n$  enthalten.

BEWEIS. Für jedes  $n$  sei

$$J^n = \{ j \in J^n \mid e_j^n \cap \text{im } f \neq \emptyset \},$$

und für alle  $j \in J^n$  wählen wir  $k_j^n \in K$ , so dass  $x_j^n = f(k_j^n) \in e_j^n$ .

Zunächst zeigen wir per Induktion über  $n$ , dass alle  $J^n$  endlich sind. Die Menge  $L^n = X^n \cap \text{im } f$  ist kompakt, da  $X^n \subset X$  abgeschlossen ist. Die Menge

$$M^n = \{ x_j^m \mid m \leq n \text{ und } j \in J^m \} \subset L^n$$

ist diskret, denn der Durchschnitt jeder Teilmenge mit  $X^{n-1}$  sowie mit  $\bar{e}_j^n$  für alle  $j \in J^n$  ist endlich und daher abgeschlossen, da alle  $J^m$  für  $m < n$  nach Induktionsvoraussetzung endlich sind. Nach Definition der schwachen Topologie ist also jede Teilmenge von  $M^n$  abgeschlossen. Also ist  $M^n \subset L^n$  diskret und abgeschlossen, also kompakt, und daher endlich.

Die Menge

$$M = \{ x_j^m \mid m \in \mathbb{N} \text{ und } j \in J^m \} \subset \text{im } f$$

hat mit jedem  $X^n$  den abgeschlossenen Durchschnitt  $M^n$ , ist also selbst abgeschlossen. Das gleiche gilt für jede ihrer Teilmengen, also ist auch  $M$  diskret und als Teilmenge von  $\text{im } f$  kompakt. Also ist  $M$  endlich, was zu zeigen war.  $\square$

4.19. FOLGERUNG. Sei  $(X, A)$  ein CW-Paar, dann ist  $(X, A)$  ein Paar in  $kw\mathcal{H}$ .

Insbesondere stimmt der Kolimes in Definition 4.17 (3) nach Folgerung 4.8 mit dem Kolimes in  $kw\mathcal{H}$  überein.

BEWEIS. Wenn  $U$  in der kompakt erzeugten Topologie offen ist, dann ist  $(\Phi_j^n)^{-1}(U) \subset D^n$  für alle  $n$  und alle  $j \in J^n$  offen, da  $D^n$  kompakt ist. Also ist  $U$  auch in der schwachen Topologie auf  $X$  offen. Daher ist  $X$  kompakt erzeugt.

Es sei  $K$  kompakt und  $f: K \rightarrow X$  stetig. Da  $\text{im } f \subset X^n$  und  $X^n$  schwach Hausdorff ist, ist  $\text{im } f$  abgeschlossen. Also ist  $X$  auch schwach Hausdorff.  $\square$

Da  $A$  nicht normal sein muss, können wir nicht erwarten, dass  $X$  wie in Satz 1.84 normal ist. Als Ersatz dafür reicht für manche Zwecke das folgende Resultat.

4.20. PROPOSITION. Es sei  $(X, A)$  ein CW-Paar, dann sind für alle  $m \leq n$  die Paare  $(X, X^n)$ ,  $(X^n, X^m)$  und  $(X^m, A)$  abgeschlossene Kofaserungen.

BEWEIS. Da  $(D^n, S^{n-1})$  eine abgeschlossene Kofaserung ist, ist auch  $(\coprod_{j \in J^n} D^n, \coprod_{j \in J^n} S^{n-1})$  eine abgeschlossene Kofaserung. Aufgrund von Proposition 3.64 und Definition 4.17 (2) ist dann auch

$$(X^n, X^{n-1}) = \left( \left( \coprod_{j \in J^n} D^n \right) \cup_{\varphi^n} X^{n-1}, X^{n-1} \right)$$

eine abgeschlossene Kofaserung. Da  $X^{-1} = A$ , sind wegen Übung 3.123 (1) alle Paare  $(X^n, X^m)$  und  $(X^m, A)$  abgeschlossene Kofaserungen, siehe dazu auch Übung 4.50.

Sei jetzt  $n \geq -1$ , sei  $Y$  ein weiterer Raum, und seien  $f: X \rightarrow Y$  und  $h_n: X^n \times I \rightarrow Y$  mit  $f|_{X^n} = h_n|_{X^n \times \{0\}}$  wie in Definition 3.55 gegeben. Konstruiere induktiv  $h_k: X^k \rightarrow Y^{I^+}$  mit der Homotopieausdehnungseigenschaft, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & C(I, Y) & \\ & & & & & \nearrow & \\ & & & & & \downarrow \text{ev}_0 & \\ X^n & \xrightarrow{\quad} & X^{n+1} & \xrightarrow{\quad} & \dots & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{f} & Y & \\ & & & & & \nearrow h & \nearrow h_{n+1} & \nearrow h_n & & \end{array} \quad (4.1)$$

kommutiert. Aufgrund der Kolimes-Eigenschaft in  $\mathcal{Top}$  existiert auch  $h$ . Da  $I$  lokalkompakt ist, entspricht  $h$  nach Satz 1.60 (3) der gesuchten Homotopie  $X \times I \rightarrow Y$ . Außerdem ist nach Definition der Kolimes-Topologie in  $\mathcal{Top}$  eine Teilmenge  $B \subset X$  genau dann abgeschlossen, wenn  $B \cap X^n$  in  $X^n$  für alle  $n$  abgeschlossen ist. Daher ist  $X^n \subset X$  abgeschlossen.  $\square$

Wir erinnern uns an Unterkomplexe von CW-Komplexen aus Definition 1.85. Analog definieren wir einen relativen Unterkomplex  $Y$  von  $(X, A)$  als einen abgeschlossenen Unterraum  $Y \subset X$  mit  $A \subset Y$ , der sich als Vereinigung von  $A$  und offenen Zellen von  $X$  schreiben lässt. Das nächste Resultat ist Übung 4.58.

4.21. FOLGERUNG. Es sei  $Y$  ein Unterkomplex von  $(X, A)$ , dann ist  $(X, Y)$  eine Kofaserung.

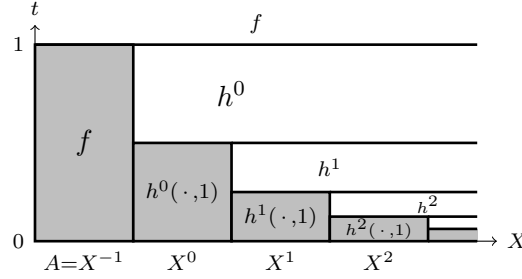


ABBILDUNG 4.1. Eine Teleskop-Homotopie

Die folgende Definition geben wir nur der Vollständigkeit halber. Ein *Retrakt* einer Abbildung  $f: A \rightarrow X$  ist eine Abbildung  $g: B \rightarrow Y$  zusammen mit Inklusionen  $i: B \rightarrow A$ ,  $j: Y \rightarrow X$  und Retraktionen  $r: A \rightarrow B$  und  $s: X \rightarrow Y$ , so dass

$$r \circ i = \text{id}_B, \quad s \circ j = \text{id}_Y, \quad f \circ i = j \circ g \quad \text{und} \quad g \circ r = s \circ f.$$

4.22. DEFINITION. Ein Paar  $(Y, B)$  in  $kw\mathcal{H}$  heißt *Serre-Kofaserung*, wenn es ein CW-Paar  $(X, A)$  gibt, so dass  $(Y, B)$  ein Retrakt von  $(X, A)$  ist.

Wir verallgemeinern als nächstes Definition 1.88.

4.23. DEFINITION. Es seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  CW-Paare. Eine Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Paaren heißt *zellulär*, wenn  $\text{im}(f|_{X^n}) \subset Y^n$  für alle  $n \geq -1$  gilt. Die CW-Paare mit den zellulären Abbildungen bilden eine Kategorie  $CW\text{Pair}$ . Analog definieren wir Kategorien  $CW$  und  $CW_+$  der nicht-punktierten und der punktierten CW-Komplexe mit zellulären Abbildungen.

4.24. SATZ (Zelluläre Approximation). *Jede Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von CW-Paaren ist homotop zu einer zellulären Abbildung. Wenn  $f$  auf einem Unterkomplex  $Z$  von  $(X, A)$  bereits zellulär ist, können zelluläre Abbildung und Homotopie relativ zu  $Z$  gewählt werden.*

BEWEIS. Wir konstruieren zunächst durch Induktion über  $n$ , Homotopien  $h^n: X^n \times I \rightarrow Y$  für Zelle und relativ zu  $X^{n-1}$ , so dass  $h^n(\cdot, 0) = h^{n-1}(\cdot, 1)$ , und so dass  $h^n(\cdot, 1)|_{X^n}$  zellulär ist. Dabei sei  $h^{-1}(x, \cdot) = f$  die stationäre Homotopie, wobei „ $-1$ “ hier nur ein Index ist. Da  $(X, X^n)$  nach Proposition 4.20 eine Kofaserung ist, können wir  $h^n$  zu  $h^n: X \times I \rightarrow Y$  ausdehnen.

Anschließend definieren wir eine „Teleskop-Homotopie“  $h: X \times I \rightarrow Y$  durch

$$h(x, t) = \begin{cases} h^n(x, 1) & \text{falls } x \in X^n \text{ für } n \geq -1 \text{ und } t \in [0, 2^{-n-1}], \text{ und} \\ h^n(x, 2 - 2^{n+1}t) & \text{falls } x \in X \setminus X^{n-1} \text{ für } n \geq 0 \text{ und } t \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]. \end{cases}$$

Für jedes  $n$  ist diese Homotopie stationär auf  $X^n \times [0, 2^{-n-1}]$ , siehe Abbildung 4.1, und daher insbesondere stetig in der schwachen Topologie. Außerdem ist  $h(\cdot, 1) = h^0(\cdot, 0) = h^{-1}(\cdot, 1) = f$ , und  $h(\cdot, 0)$  ist zellulär.

Dann erhalten wir die zweite Aussage mit Folgerung 4.21, indem wir  $h^n|_{Z \times I}$  auf allen Zellen von  $Z$  stationär wählen.

Es sei jetzt  $n \geq 0$ , und  $h^{n-1}: X \times I \rightarrow Y$  sei bereits konstruiert, so dass  $h^{n-1}(\cdot, 1)|_{X^{n-1}}$  zellulär ist. Wegen Definition 4.17 (2) können wir  $h^n|_{X^n}$  festlegen, indem wir für jedes  $j \in J^n$  unabhängig Abbildungen  $h_j^n: D^n \times I \rightarrow Y$  wählen, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} D^n & \xrightarrow{\times 0} & D^n \times I & \xleftarrow{\iota \times \text{id}_I} & S^{n-1} \times I \\ \Phi_j^n \downarrow & \searrow g_j^n & \downarrow h_j^n & & \downarrow \varphi_j^n \circ p_{S^{n-1}} \\ X & \xrightarrow{h^{n-1}(\cdot, 1)} & Y & \xleftarrow{h^{n-1}(\cdot, 1)|_{X^{n-1}}} & X^{n-1} \end{array}$$

kommutiert, und  $h^n$  dann mit Hilfe der Pushout-Eigenschaft auf  $X^n$  konstruieren.

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung  $g_j^n = h^{n-1}(\Phi_j^n(\cdot), 1): D^n \rightarrow Y$  relativ zu  $S^{n-1}$  zu einer Abbildung mit Bild in  $Y^n$  homotop ist. Da  $D^n$  kompakt ist, trifft im  $g_j^n$  nur endlich viele Zellen. Sei  $m$  die maximale Dimension einer Zelle in  $Y$ , die getroffen wird, ohne Einschränkung gelte  $m > n$ . Wieder wegen Definition 4.17 (2) dürfen wir  $g_j^n$  Zelle für Zelle von  $Y^m$  auf  $Y^{m-1}$  „herunterhomotopieren“.

Es seien also  $c_1^m, \dots, c_k^m \subset Y^m$  die  $m$ -Zellen von  $Y$ , die noch getroffen werden, und  $\psi_k^m$  sei die Verklebeabbildung von  $c_k^m$ . Betrachte  $Y' = Y^{m-1} \cup c_1^m \cup \dots \cup c_{k-1}^m$  und

$$Y' \cup c_k^m = ((D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi_k^m} Y') \cup_{B^m \setminus \{0\}} B^m .$$

Da  $D^n$  zusammenhängend ist, brauchen wir nur die Wegzusammenhangskomponente von  $Y'$  zu betrachten, die im  $g_j^n$  enthält. Dann ist  $((D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi_k^m} Y', B^m \setminus \{0\})$  ein 0-zusammenhängendes und  $(B^m, B^m \setminus \{0\})$  ein  $(m-1)$ -zusammenhängendes Paar. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 und Homotopieinvarianz ist die Abbildung

$$0 = \pi_n(B^m, B^m \setminus \{0\}) \longrightarrow \pi_n(Y' \cup c_k^m, (D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi_k^m} Y') \cong \pi_n(Y' \cup c_k^m, Y')$$

surjektiv, da  $n \leq m-1$ . Wir können also  $g_j^n$  relativ zu  $S^{n-1}$  zu einer Abbildung homotopieren, die  $c_k^m$  nicht trifft. Genauso verfahren wir mit den Zellen  $c_{k-1}^m, \dots, c_1^m$  und erhalten eine Abbildung mit Bild in  $Y^{m-1}$ . Diesen Prozess setzen wir fort, bis wir eine Homotopie  $h_j^n$  von  $g_j^n$  relativ zu  $S^{n-1}$  zu einer Abbildung mit Bild in  $Y^n$  gefunden haben.  $\square$

4.25. FOLGERUNG. *Es sei  $(X, A)$  ein CW-Paar mit  $X = \varinjlim X^n$  wie oben.*

- (1) *Dann sind die Inklusionen  $\iota: X^n \rightarrow X$  und  $\iota: (X^n, A) \rightarrow (X, A)$  jeweils  $n$ -zusammenhängende Abbildungen.*
- (2) *Wenn  $J^{m+1} = \dots = J^n = \emptyset$ , ist  $(X, X^m)$  ein  $n$ -zusammenhängendes Paar.*

BEWEIS. Wir schreiben  $S^k$  als CW-Komplex  $* \cup_{S^{k-1}} D^k$  und wenden zelluläre Approximation an.  $\square$

4.26. DEFINITION. Eine Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  zwischen Paaren heißt *schwache (Homotopie-) Äquivalenz*, wenn  $\pi_k f: \pi_k(X, A, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, B, f(x_0))$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $x_0 \in A$  ein Isomorphismus ist.

Zwei Paare  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  heißen *schwach äquivalent*, wenn es  $n \geq 0$ , Paare  $(X_i, A_i)$  für  $i = 0, \dots, n$  mit  $X = X_0$  und  $Y = X_n$  und  $(Z_i, C_i)$  für  $i = 0, \dots, n-1$  und schwache Äquivalenzen  $f_i: (X_i, A_i) \rightarrow (Z_i, C_i)$  und  $g_i: (X_{i+1}, A_{i+1}) \rightarrow (Z_i, C_i)$  für  $0 \leq i < n$  gibt.

Analog definieren wir schwache Äquivalenz für Räume.

Somit bedeutet „schwache Äquivalenz“ das gleiche wie „ $n$ -zusammenhängende Abbildung“ für alle  $n \geq 0$ .

Offensichtlich ist jede Homotopieäquivalenz eine schwache Äquivalenz, die Umkehrung muss jedoch nicht gelten, siehe Beispiel 4.33. Um tatsächlich eine Äquivalenzrelation zu erhalten, haben wir Symmetrie und Transitivität durch die Einführung von Zwischenschritten wie im folgenden Diagramm sichergestellt:

$$(X, A) = (X_0, A_0) \xrightarrow{f_0} (Z_0, C_0) \xleftarrow{g_0} (X_1, A_1) \longrightarrow \dots \longrightarrow (Z_{n-1}, C_{n-1}) \xleftarrow{g_{n-1}} (X_n, A_n) = (Y, B) .$$

In Übung 4.59 sehen wir, wie man diese Situation mit Hilfe von Satz 4.32 unten etwas vereinfachen kann.

4.27. SATZ (Whitehead). *Jede schwache Äquivalenz  $f: (Y, A) \rightarrow (X, A)$  von CW-Paaren relativ zu  $A$  ist eine Homotopieäquivalenz. Wenn die Inklusion  $\iota: Y \rightarrow X$  eines relativen Unterkomplexes von  $(X, A)$  eine schwache Äquivalenz ist, dann ist  $Y$  ein Deformationsretrakt von  $X$ .*

In der ersten Aussage dürfen wir nicht von Abbildungen  $(Y, B) \rightarrow (X, A)$  sprechen, denn bereits für Abbildungen  $f: (B, B) \rightarrow (A, A)$  kann sie falsch sein. Um zu zeigen, dass schwach äquivalente CW-Komplexe homotopieäquivalent sind, müssen wir später noch sicherstellen, dass die Räume  $X_i$  und  $Z_i$  in Definition 4.26 alle als CW-Komplexe gewählt werden können.

BEWEIS. Es sei  $f: (Y, A) \rightarrow (X, A)$  eine stetige Abbildung relativ zu  $A$ , die wir nach Satz 4.24 als zellulär voraussetzen dürfen. Es sei  $Zf$  der Abbildungszyylinder aus Definition 3.56. Da  $f|_A = \text{id}_A$ , enthält  $Zf$  den Abbildungszyylinder  $A \times I$  von  $\text{id}_A$  als Unterraum. Wir definieren den *relativen Abbildungszyylinder*  $Z_A f$  als Pushout

$$\begin{array}{ccc} Zf & \longrightarrow & Z_A f \\ \uparrow & & \uparrow \\ A \times I & \longrightarrow & A, \end{array}$$

induziert von der Projektion  $A \times I \rightarrow A$ . Wir betrachten  $(Z_A f, A)$  als CW-Paar mit Unterraum  $(X, A)$ , so dass  $(Z_A f, X)$  zu jeder  $m$ -Zelle  $c_k^m$  von  $Y$  eine  $m$ -Zelle  $c_k^m \times \{0\}$  und eine  $(m+1)$ -Zelle  $c_k^m \times (0, 1) \subset Z_A f$  enthält. Man beachte, dass der Rand der letzteren im  $m$ -Gerüst von  $Z_A f$  liegt. Die Inklusion  $\iota: Y \rightarrow Z_A f$  mit  $\iota(y) = (y, 0)$  und die Projektion  $p: Z_A f \rightarrow X$  mit  $[(y, t)] \mapsto [f(y)]$  sind dann ebenfalls zellulär.

Wir erhalten  $f$  als zusammengesetzte Abbildung

$$Y \xrightarrow{\iota} Z_A f \xrightarrow{p} X.$$

Da  $p$  eine Deformationsretraktion ist, ist mit  $f$  auch  $\iota$  eine schwache Äquivalenz. Aus der zweiten Behauptung folgt dann, dass  $Y$  ein Deformationsretrakt von  $Z_A f$  ist, insbesondere ist  $f$  dann auch eine Homotopieäquivalenz.

Zur zweiten Behauptung konstruieren wir induktiv Homotopien  $h^n: (X^n \cup Y) \times I \rightarrow X$  relativ zu  $Y$ , so dass  $h^n(\cdot, 0) = \text{id}$ ,  $\text{im}(h^n(\cdot, 1)) \subset Y$ , und  $h^n|_{(X^{n-1} \cup Y) \times I} = h^{n-1}$ . Im Falle  $n = 0$  besagt unsere Voraussetzung, dass jede Zusammenhangskomponente von  $X$  einen Punkt aus  $Y$  enthält, und wir wählen  $h^0(x, \cdot)$  als Pfad in  $X$  von  $x$  nach  $Y^0$  für alle  $x \in X^0 \setminus Y^0$ .

Wir nehmen jetzt an, dass  $n \geq 1$ , und dass  $h^{n-1} = h|_{(X^{n-1} \cup Y) \times I}$  bereits konstruiert ist. Für eine  $n$ -Zelle  $e_j^n$  von  $(X, Y)$  suchen wir also eine Abbildung  $h_j^n: D^n \times I \rightarrow X$  mit  $h_j^n(\cdot, 1): D^n \rightarrow Y$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} D^n & \xrightarrow{\times 0} & D^n \times I & \longleftarrow & S^{n-1} \times I \\ \Phi_j^n \downarrow & & h_j^n \downarrow & & \downarrow \varphi_j^n \times \text{id}_I \\ X^n \cup Y & \hookrightarrow & X & \xleftarrow{h^{n-1}} & (X^{n-1} \cup Y) \times I \end{array}$$

kommutiert. Aufgrund des Homöomorphismus

$$(D^n \times \{0\}) \cup S^{n-1} \times I, S^{n-1} \times \{1\} \cong (D^n, S^{n-1})$$

können wir  $h_j^n$  auch als Homotopie relativ zu  $S^{n-1}$  von einer Abbildung  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, Y)$  zu einer Abbildung nach  $Y$  verstehen. Da die Inklusion eine schwache Äquivalenz ist, schließen wir aus der langen exakten Homotopiesequenz des Tripels  $(X, Y, A)$  aus Übung 3.112, dass

$$\cdots \longleftarrow \pi_{n-1}(X, A) \xleftarrow{\cong} \pi_{n-1}(Y, A) \xleftarrow{\partial} \pi_n(X, Y) \longleftarrow \pi_n(X, A) \xleftarrow{\cong} \pi_n(Y, A) \longleftarrow \cdots$$

Insbesondere ist  $\pi_n(X, Y) = 0$ , und die gesuchte Abbildung  $h_j^n$  existiert. Mit Definition 4.17 (2) induzieren die  $h_j^n$  die gesuchte Homotopie  $h^n$ . Nach Definition der schwachen Topologie erhalten wir unsere Homotopie  $h$  wie in Diagramm (4.1).  $\square$

4.28. BEMERKUNG. Für zwei schwach äquivalente Räume  $X$  und  $Y$  gibt es nach Definition 4.26 Isomorphismen  $\pi_k(X) \cong \pi_k(Y)$  für alle  $k \geq 0$ ; diese werden induziert von den Abbildungen  $f_i$  und  $g_i$ . Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig. Dazu betrachten wir beispielsweise die Räume

$$X = S^2 \times \mathbb{R}P^3 \quad \text{und} \quad Y = \mathbb{R}P^2 \times S^3 .$$

Beide Räume haben als universelle Überlagerung  $S^2 \times S^3$ , und die isomorphen Fundamentalgruppen  $\mathbb{Z}/2$ . Dennoch werden wir später sehen, dass sie nicht homotopieäquivalent sind.

Als nächstes versuchen wir, einen beliebigen topologischen Raum durch einen CW-Komplex zu ersetzen. Bis auf schwache Äquivalenz ist das möglich. Für spätere Anwendungen formulieren wir den entsprechenden Begriff noch etwas allgemeiner.

4.29. DEFINITION. Ein  $n$ -zusammenhängendes CW-Modell für ein punktiertes Paar  $(Y, A)$  ist ein  $n$ -zusammenhängendes CW-Paar  $(X, A)$  zusammen mit einer Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, A)$  relativ zu  $A$ , so dass  $f_*: \pi_n X \rightarrow \pi_n Y$  injektiv ist und  $f_*: \pi_k X \rightarrow \pi_k Y$  ein Isomorphismus für alle  $k > n$ .

Eine *CW-Approximation* eines Paares  $(Y, A)$  besteht aus einem CW-Paar  $(X, A)$  und einer Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, A)$  relativ zu  $A$ , so dass  $f_*: \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, f(x_0))$  für alle  $k \geq 0$  und alle  $x_0 \in X$  ein Isomorphismus ist.

Falls  $n \geq 1$ , faktorisiert die Abbildung  $\iota_*: \pi_n(A) \rightarrow \pi_n(Y)$  nach Voraussetzung als

$$\iota_*: \pi_n(A) \longrightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y) .$$

Aus dem Homomorphiesatz folgt, dass  $\pi_n(X)$  in natürlicher Weise isomorph ist zu  $\text{im } \iota_*$ .

4.30. BEMERKUNG. Wir betrachten einen punktierten CW-Komplex  $(X, x_0)$ , somit ist  $A = \{x_0\}$ .

- (1) Ein 0-zusammenhängendes CW-Modell von  $X$  ist beispielsweise die Zusammenhangskomponente  $X_0$  von  $X$ , die  $x_0$  enthält.
- (2) Ein 1-zusammenhängendes CW-Modell von  $X$  ist beispielsweise die universelle Überlagerung  $p: \tilde{X}_0 \rightarrow X_0$ , denn  $\pi_1(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) = \pi_0(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) = 0$  und  $p_*: \pi_k(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) \cong \pi_k(X_0, x_0) \cong \pi_k(X, x_0)$  nach Folgerung 3.26. Wir überlegen uns dazu, dass die universelle Überlagerung eines CW-Komplexes wieder eine natürliche CW-Struktur trägt.

Daher nennt man in diesem Spezialfall ein  $n$ -zusammenhängendes CW-Modell eines CW-Komplexes auch eine „ $n$ -zusammenhängende Überlagerung“.

4.31. BEISPIEL. Es folgen einige konkrete Beispiele.

- (1) Da  $\pi_k(S^1) = 0$  für alle  $k \geq 2$  nach Beispiel 3.27, ist  $\{*\} \rightarrow S^1$  ein  $n$ -zusammenhängendes CW-Modell für alle  $n \geq 1$ .
- (2) Nach Beispiel 3.33 liefert die Hopf-Faserung  $p: S^3 \rightarrow S^2$  Isomorphismen  $p_*: \pi_k(S^3) \rightarrow \pi_k(S^2)$  für alle  $k \geq 3$ . Also ist die Hopf-Faserung ein 2-zusammenhängendes CW-Modell für  $S^2$ .

Weitere Beispiele betrachten wir in Übung 4.60.

4.32. SATZ (CW-Approximation). *Zu jedem punktierten Paar  $(Y, A)$  und jedem  $n \geq 0$  existiert ein  $n$ -zusammenhängendes CW-Modell. Zu jedem Paar  $(Y, A)$  existiert eine CW-Approximation.*

*Sei  $f_1: (X, A) \rightarrow (Y, A)$  ein  $n$ -zusammenhängendes und  $f_2: (Z, B) \rightarrow (W, B)$  ein  $m$ -zusammenhängendes CW-Modell, mit  $n \geq m$ , wobei wir CW-Approximationen wie  $-1$ -zusammenhängende CW-Modelle behandeln. Sei  $g: (Y, A) \rightarrow (W, B)$  eine Abbildung, dann existiert eine zelluläre Abbildung  $\ell: (X, A) \rightarrow (Z, B)$ , so dass  $f_2 \circ \ell$  relativ  $A$  zu  $g \circ f_1$  homotop ist. Je zwei solche Abbildungen sind relativ  $A$  homotop.*

BEWEIS. Für die erste Behauptung konstruieren wir ein CW-Paar  $(X, A)$  mit  $X^n = A$  und eine Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, A)$  relativ zu  $A$  mit  $f^n = f|_{X^n} = f|_A$ .

Sei jetzt  $k > n$ , und sei  $f^{k-1}: X^{k-1} \rightarrow Y$  bereits konstruiert. Wir wählen zunächst eine Erzeugermenge  $J_1^k$  von  $\ker(f_*^{k-1}: \pi_{k-1}(X^{k-1}) \rightarrow \pi_{k-1}(Y))$  falls  $k \geq 2$ . Falls  $k = 1$ , sei  $J_1^1$  stattdessen die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X^0$ , die den Basispunkt  $x_0$  nicht enthalten. Für jedes  $j \in J_1^k$  sei  $\varphi_j^k: S^{k-1} \rightarrow X^{k-1}$  eine punktierte Abbildung, die das entsprechende Element von  $\pi_{k-1}(X^{k-1})$  darstellt. Da  $[f^{k-1} \circ \varphi_j^k] = 0 \in \pi_{k-1}(Y)$ , existiert eine Abbildung  $g_j^k: D^k \rightarrow Y$  mit  $g_j^k|_{S^{k-1}} = f^{k-1} \circ \varphi_j^k$ . Wir kleben eine Zelle  $\bar{e}_j^k$  mit  $\varphi_j^k$  an  $X^{k-1}$  an und setzen  $f^{k-1}$  durch  $f_j^k$  auf  $\bar{e}_j^k$  fort, so dass

$$\begin{array}{ccc} D^k & \xrightarrow{\Phi_j^k} & X^{k-1} \cup \bar{e}_j^k \xrightarrow{f_j^k} Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^{k-1} & \xrightarrow{\varphi_j^k} & X^{k-1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{g_j^k} \\ \nearrow f^{k-1} \end{array}$$

Sei  $\psi^k: \coprod_{j \in J_1^k} S^{k-1} \rightarrow X^{k-1}$  durch die  $\varphi_j^k$  für  $j \in J_1^k$  induziert, dann setzen wir

$$X_1^k = \left( \prod_{j \in J_1^k} D^k \right) \cup_{\psi^k} X^{k-1} \quad \text{und} \quad f_1^k = f^{k-1} \cup \bigcup_{j \in J_1^k} f_j^k: X_1^k \rightarrow Y.$$

Im zweiten Schritt wählen wir eine Erzeugermenge  $J_2^k$  von  $\pi_k(Y)$  und Abbildungen  $f_j^k: S^k \rightarrow (Y, y_0)$ , die die entsprechenden Elemente von  $\pi_k(Y)$  repräsentieren. Als Verklebeabbildung für die neuen  $k$ -Zellen wählen wir die konstante Abbildung  $S^{k-1} \rightarrow \{x_0\} \rightarrow X^{k-1}$ . Jetzt sei  $J^k = J_1^k \sqcup J_2^k$ , und wir erhalten

$$X^k = x_1^k \vee \bigvee_{j \in J_2^k} S^k \quad \text{und} \quad f^k = f_1^k \vee \bigvee_{j \in J_2^k} f_j^k: X^k \rightarrow Y.$$

Da die Abbildung  $f^{k-1}$  über  $f^k$  faktorisiert, folgt  $\text{im } f_*^{k-1} \subset \text{im } f_*^k \subset \pi_j(Y)$  für alle  $j$ . Nach Konstruktion ist  $f_{1*}^k: \pi_{k-1}(X_1^k) \rightarrow \pi_{k-1}(Y)$  injektiv. Auf der anderen Seite ist die Inklusion  $X^{k-1} \hookrightarrow X^k$  nach Folgerung 4.25 eine  $(k-1)$ -zusammenhängende Abbildung, also folgt induktiv

$$\begin{aligned} \text{im } f_*^{k-1} &= \text{im } f_*^k \subset \pi_j(Y) && \text{für alle } j \leq k-1, \\ \text{und } \ker f_*^k &= 0 \subset \pi_j(X) && \text{für alle } n \leq j \leq k-1. \end{aligned}$$

Außerdem ist  $f_*^k: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$  nach Konstruktion surjektiv.

Wenn alle  $f^k: X^k \rightarrow Y$  konstruiert sind, setzen wir schließlich

$$X = \varinjlim X^k \quad \text{und} \quad f = \varinjlim f^k: X \rightarrow Y.$$

Aus Folgerung 4.25 und der obigen Konstruktion folgt, dass  $(X, A)$  ein  $n$ -zusammenhängendes Paar ist, da  $X^n = A$ . Da  $\pi_k(X) = \pi_k(X^{k+1})$  für alle  $k$ , ist  $f_*: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$  injektiv für  $k = n$  und ein Isomorphismus für alle  $k > n$ .

Für die zweite Behauptung erhalten wir  $X^0$  und  $f^0: X^0 \rightarrow Y$ , indem wir zu jeder Wegzusammenhangskomponente  $Y_0$  von  $Y$ , die keinen Punkt aus  $A$  enthält, einen Punkt  $y_0 \in Y_0$  zu  $A$  hinzunehmen. Anschließend wählen wir für jede Wegzusammenhangskomponente von  $Y$  einen Punkt aus  $X^0$  als Basispunkt, und verfahren dann weiter wie im obigen Beweis, beginnend bei  $k = 1$ .

Zur letzten Behauptung nehmen wir an, dass  $X^n = A$  falls  $n \geq 0$ . Andernfalls bilden wir wie oben ein  $n$ -zusammenhängendes CW-Modell  $(X', A)$  von  $(X, A)$  mit  $X'^n = A$ . Nach dem Satz 4.27 von Whitehead sind  $(X', A)$  und  $(X, A)$  homotopieäquivalent relativ zu  $A$ , so dass wir  $(X, A)$



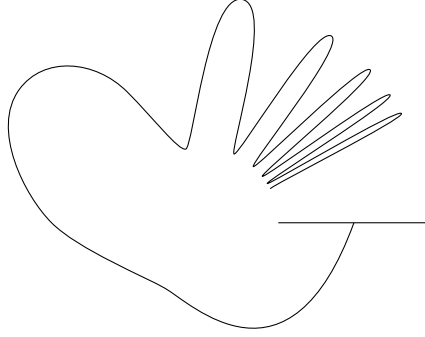


ABBILDUNG 4.2. Das Topologische Huhn

durch  $(X', A)$  ersetzen dürfen. Außerdem nehmen wir an, dass  $Z \rightarrow W$  eine Inklusionsabbildung ist, die wir  $\iota$  nennen. Andernfalls ersetzen wir  $(W, B)$  durch den relativen Abbildungszyylinder  $(Z_B f_2, B)$ , der  $(W, B)$  als Deformationsretrakt enthält, und  $g$  durch die entsprechende Abbildung im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 (X', A) & \xrightarrow{\sim} & (X, A) & \xrightarrow{f_1} & (Y, A) \\
 \downarrow \ell & \swarrow & \downarrow & \searrow g & \downarrow \\
 (Z, B) & \xrightarrow{\iota} & (Z_B f_2, B) & \xrightarrow{\sim} & (W, B) \\
 & \searrow f_2 & & & 
 \end{array}$$

Da  $\iota_*: \pi_m(Z) \hookrightarrow \pi_m(W)$  injektiv ist und  $\iota_*: \pi_k(Z) \hookrightarrow \pi_k(W)$  ein Isomorphismus für alle  $k > m$ , folgt  $\pi_k(W, Z) = 0$  für alle  $k > m$  nach der langen exakten Sequenz 3.19. Im Falle  $m = -1$  gilt das bezüglich jedes Basispunkts in  $Z$ .

Jetzt können wir induktiv Zelle für Zelle eine Homotopie  $h: X \times I \rightarrow W$  mit  $h(\cdot, 0) = g \circ f_1$  konstruieren, so dass  $h(\cdot, 1)$  Werte in  $Z \subset W$  annimmt und zellulär ist. Nach Voraussetzung gilt  $X^n = A$ , und wir setzen  $h^n = (g \circ f_1 \circ p_X)|_{A \times I}: A \times I \rightarrow B \subset Z$ .

Sei jetzt  $h^{k-1}: X^{k-1} \times I \rightarrow W$  bereits konstruiert, so dass  $\text{im}(h^{k-1}(\cdot, 1)) \subset Z^{k-1}$ . Sei  $\bar{e}_j^k$  eine  $k$ -Zelle von  $X$ . Ähnlich wie im Beweis des Satzes 4.27 von Whitehead betrachte

$$\begin{array}{ccccc}
 D^k & \xrightarrow{\cdot \times 0} & D^k \times I & \longleftarrow & S^{k-1} \times I \\
 \Phi_j^k \downarrow & & \downarrow & & \downarrow (\varphi_j^k \times \text{id}_I) \\
 X & \xrightarrow{g \circ f_1} & W & \xleftarrow{h^{k-1}} & X^{k-1} \times I
 \end{array}$$

Wir erhalten also eine Abbildung

$$(D^k, S^{k-1}) \cong (D^k \times \{0\} \cup S^{k-1} \times I, S^{k-1} \times \{1\}) \longrightarrow (W, Z^{k-1}).$$

Da  $m \leq n < k$ , gilt  $\pi_k(W, Z) = 0$ , und wie im Beweis der zellulären Approximation 4.24 können wir die obige Abbildung so auf  $D^k \times I$  fortsetzen, dass ganz  $D^k \times \{1\}$  nach  $Z^k$  abgebildet wird. Auf diese Weise setzen wir  $h^{k-1}$  auf  $\bar{e}_j^k \times I \subset X^k \times I$  fort und definieren  $h^k$  Zelle für Zelle. Schließlich leisten  $h = \varinjlim h^k$  und  $\ell = h(\cdot, 1)$  das gewünschte.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien  $\ell_0, \ell_1: X \rightarrow Z$  wie oben gegeben. Die zugehörigen Homotopien  $h_0, h_1: X \times I \rightarrow W$  liefern eine Homotopie relativ zu  $A$  von  $\ell_0$  und  $\ell_1$  als Abbildungen nach  $W$ . Mit dem gleichen Trick wie oben können wir diese Homotopie relativ zu  $A \times I \cup X \times \{0, 1\}$  Zelle für Zelle zu einer Homotopie zwischen  $\ell_0$  und  $\ell_1$  mit Werten in  $Z$  deformieren, was noch zu zeigen war.  $\square$

4.33. BEISPIEL. Wir betrachten das *topologische Huhn*

$$Y = \left\{ \left( 2 + \sin \frac{2\pi^2}{\varphi} \right) e^{i\varphi} \mid \varphi \in (0, 2\pi] \right\} \cup [1, 3] \subset \mathbb{C},$$

siehe Abbildung 4.2, auch bekannt als *polnischer Kreis*. Die starken Oszillationen machen den Übergang von Punkten mit positivem Argument zur positiven reellen Achse zu einem unüberwindbaren Hindernis für Abbildungen  $S^k \rightarrow Y$ , somit ist  $\pi_k(Y) = 0$  für alle  $k$ . Eine CW-Approximation wäre demnach ein einzelner Punkt  $X = \{x_0\}$ , den wir auf  $y_0$  abbilden. Dass  $X \rightarrow Y$  keine Homotopieäquivalenz ist, sehen wir daran, dass es eine nicht-zusammenziehbare Abbildung  $Y \rightarrow S^1$  gibt, gegeben durch  $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ . Da alle CW-Approximationen nach Satz 4.32 homotopieäquivalent sind, sagen wir, dass  $Y$  nicht den *Homotopietyp eines CW-Komplexes* hat. Wir haben jetzt also auch ein Beispiel von schwach äquivalenten, aber nicht homotopieäquivalenten Räumen.

In Übung 4.59 können wir jetzt zeigen, dass je zwei schwach äquivalente CW-Komplexe homotopieäquivalent sind, und dass schwach äquivalente topologische Räume homotopieäquivalente CW-Approximationen besitzen.

4.34. BEMERKUNG. Die Sätze 4.24, 4.27 und 4.32 zusammen erklären die Rolle der Homotopiegruppen und der CW-Komplexe in der Homotopietheorie.

- (1) Zu jedem topologischen Raum  $Y$  gibt es eine CW-Approximation  $f_1: X \rightarrow Y$ , und zu jedem Morphismus  $g: Y \rightarrow W$  und jeder CW-Approximation  $f_2: Z \rightarrow W$  gibt es bis auf Homotopie einen entsprechenden Morphismus  $\ell: X \rightarrow Z$ . Wenn wir eine „Homotopiekategorie der topologischen Räume bis auf schwache Äquivalenz“ definieren könnten, wäre sie durch CW-Approximation äquivalent zur Homotopiekategorie der CW-Komplexe mit zellulären Abbildungen.
- (2) Umgekehrt zeigt Beispiel 4.33 zwar, dass alle Homotopiegruppen  $\pi_k$  zusammen nicht ausreichen, um bei einer Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen zu erkennen, dass sie keine Homotopieäquivalenz ist. Die Homotopiegruppen sind dazu aber mächtig genug, wenn  $X$  und  $Y$  zu CW-Komplexen homotopieäquivalent sind. Also könnten wir statt der Kategorie  $kw\mathcal{H}$  die „topologischen Räume vom Homotopietyp von CW-Komplexen“ (also zu CW-Komplexen homotopieäquivalente Räume) als „angenehme“ Kategorie topologischer Räume zu benutzen, und alle anderen Räume als „pathologisch“ anzusehen. So weit wollen wir nicht gehen; wir werden stattdessen die Kategorie  $CW$  der CW-Komplexe und zellulären Abbildungen als eine sehr wichtige Unterkategorie von  $kw\mathcal{H} \subset \mathcal{Top}$  ansehen.

Letztlich sollte es nicht allzusehr verwundern, dass CW-Komplexe und Homotopiegruppen so gut zusammenarbeiten: Homotopiegruppen basieren auf dem Verhalten von Abbildungen der Paare  $(D^k, S^{k-1})$  in topologische Räume, und CW-Komplexe sind aus genau diesen Paaren zusammengebaut.

Als letztes in diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, welche der Standardkonstruktionen aus CW-Komplexen wieder CW-Komplexe machen.

4.35. PROPOSITION. *Die folgenden Konstruktionen mit CW-Konstruktion in der Kategorie  $kw\mathcal{H}$  liefern wieder CW-Komplexe:*

- (1) beliebige Koprodukte,
- (2) Pushouts entlang zellulärer Abbildungen von einem Unterkomplex in einen anderen CW-Komplex,
- (3) Kolimiten von Inklusionen von Unterkomplexen,
- (4) Produkte und reduzierte Produkte endlich vieler CW-Komplexe.

In (4) dürfen wir nicht mit dem gewöhnlichen topologischen Produkt arbeiten.

BEWEIS. In jedem der Punkte (1)–(4) findet sich eine natürliche CW-Struktur auf dem neu konstruierten Raum. In (1)–(3) liefern die universellen Eigenschaften, dass diese CW-Struktur die gleiche Topologie induziert wie die universelle Konstruktion. Die Details sind Übung 4.61.

Wir führen daher nur den Beweis von (4) vor. Dazu seien  $X$  und  $Y$  CW-Komplexe mit charakteristischen Abbildungen  $(\Phi_j^n: D^n \rightarrow X)_{n,j \in J^n}$  und  $(\Psi_k^n: D^n \rightarrow Y)_{n,k \in K^n}$ . Es bezeichne  $X \times Y$  das  $kw\mathcal{H}$ -Produkt beider Räume, und es bezeichne  $Z$  den CW-Komplex auf der Trägermenge von  $X \times Y$  mit den charakteristischen Abbildungen

$$(\Phi_j^p \times \Psi_k^q: D^n \cong D^p \times D^q \rightarrow Z)_{\substack{p+q=n, \\ j \in J^p, k \in J^q}} .$$

Wir betrachten zunächst die Identität  $f = \text{id}: Z \rightarrow X \times Y$ . Da alle  $\Phi_j^p: D^p \rightarrow X$  und alle  $\Psi_k^q: D^q \rightarrow Y$  stetig sind, sind auch alle Abbildungen

$$f \circ (\Phi_j^p \times \Psi_k^q): D^n \longrightarrow X \times Y$$

stetig. Damit ist  $f$  selbst nach Definition der schwachen Topologie auf  $Z$  ebenfalls stetig.

Fixiere jetzt  $k \in J^q$ . Für jedes  $j \in J^p$  induziert die charakteristische Abbildung  $\Phi_j^p \times \Psi_k^q$  von  $Z$  eine stetige Abbildung

$$D^p \longrightarrow \text{hom}(D^q, Z) .$$

Nach Definition der schwachen Topologie auf  $X$  ist dann auch die Abbildung  $X \rightarrow \text{hom}(D^q, Z)$  stetig, und aufgrund des Exponentialgesetzes 4.13 in  $kw\mathcal{H}$  auch die Abbildung

$$\text{id}_X \times \Psi_k^q: X \times D^q \longrightarrow Z .$$

Diese Abbildung induziert wiederum eine stetige Abbildung

$$D^q \longrightarrow \text{hom}(X, Z)$$

für alle  $q$  und alle  $k \in J^q$ . Mit der schwachen Topologie auf  $Y$  erhalten wir eine stetige Abbildung  $Y \rightarrow \text{hom}(X, Z)$ . Somit ist die Abbildung  $\text{id}: X \times Y \rightarrow Z$  ebenfalls stetig, das heißt,  $X \times Y$  und  $Z$  sind homöomorph. Hieraus leitet man mit (2) das analoge Resultat für  $X \wedge Y$  ab.  $\square$

Für kompliziertere Konstruktionen sind CW-Komplexe leider nicht mächtig genug. Immerhin gilt aber folgendes Resultat, das wir ohne Beweis angeben.

4.36. SATZ (Milnor). *Es seien  $X, Y$  homotopieäquivalent zu CW-Komplexen, dann ist auch der Abbildungsraum  $C(X, Y)$  homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex.*

#### 4.d. Faser- und Kofaser-Sequenzen

In den Homotopiekategorien  $\mathcal{HTop}$  und  $\mathcal{Hkw}\mathcal{H}$  topologischer Räume gibt es keinen natürlichen Begriff exakter Sequenzen. In diesem Abschnitt lernen wir zwei Typen von Sequenzen kennen, die sich ähnlich wie exakte Sequenzen verhalten. Dazu ersetzen wir Abbildungen durch homotopieäquivalente Faserungen beziehungsweise Kofaserungen.

Wir erinnern uns an den Begriff der Faserung aus Abschnitt 3.c und den der Kofaserung aus Abschnitt 3.f. Wir können die Faser einer Faserung  $E \rightarrow B$  als Pullback auf den Basispunkt verstehen, somit erhalten wir dual den Begriff der Kofaser als Pushout entlang einer konstanten Abbildung.

$$\begin{array}{ccc} E & \longleftarrow & F \cong p^{-1}(*) \\ p \downarrow & & \downarrow \\ B & \longleftarrow & * \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Q \cong X/A \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & * \end{array} .$$

Also ist die Kofaser einer Kofaserung nichts anderes als ihr Quotient. In Definition 3.67 haben wir den reduzierten Kegel  $CA = A \wedge (I, 0)$  eines Raumes  $A$  und den Homotopiequotienten  $X//A =$

$X \cup_A CA$  eines Paares  $(X, A)$  kennengelernt. Dabei vertauschen wir hier die Rollen von 0 und  $1 \in I$ , so dass 0 hier stets die Kegelspitze und 1 die Basis bezeichne. Nach Bemerkung 3.68 (2) und (3) ist  $(CA, A)$  immer eine Kofaserung.

4.37. DEFINITION. Es sei  $f: Y \rightarrow X$  eine punktierte Abbildung. Dann definieren wir den (*reduzierten*) *Abbildungskegel* durch

$$Cf = CY \cup_f X,$$

wobei  $f$  auf  $Y \cong Y \times \{1\} \subset CY$  definiert sei.

Insbesondere ist  $X//A$  gerade der Abbildungskegel der Inklusion  $A \hookrightarrow X$ .

4.38. BEMERKUNG. Der Abbildungskegel hat einige schöne Eigenschaften.

- (1) In Analogie zum Abbildungszyylinder aus Definition 3.56 definieren wir den *reduzierten Abbildungszyylinder*  $Zf$  einer punktierten Abbildung  $f: Y \rightarrow X$  als Pushout

$$Zf = (Y \wedge I_+) \cup_f X \quad \text{mit} \quad f: Y \times \{1\} \cong Y \rightarrow X.$$

Er enthält  $Y \cong Y \times \{0\}$  als Unterraum, und  $(Zf, Y)$  ist eine Kofaserung. Außerdem betrachten wir die Abbildung  $\bar{f}: Y \times \{0, 1\} \rightarrow X$  mit

$$\bar{f}(y, t) = \begin{cases} * & \text{für } t = 0, \text{ und} \\ f(y) & \text{für } t = 1. \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass

$$Cf = CY \cup_f X \cong Zf/Y \cong (Y \wedge I_+) \cup_{\bar{f}} X.$$

- (2) Es sei  $Z$  ein weiterer punktierter Raum. Aus der universellen Eigenschaft 1.75 eines Pushouts folgt, dass eine Abbildung  $k: Cf \rightarrow Z$  genau einer Abbildung  $g: X \rightarrow Z$  und einer punktierten Nullhomotopie  $h$  von der konstanten Abbildung  $Y \rightarrow \{z_0\} \hookrightarrow Z$  zu  $g \circ f$  entspricht.

$$\begin{array}{ccccc} & & & h & \\ & & & \curvearrowright & \\ Y \wedge I_+ & \longrightarrow & Cf & \xrightarrow{k} & Z \\ \uparrow & & \uparrow & \nearrow g & \\ Y \times \{0, 1\} & \xrightarrow{\bar{f}} & X & & \end{array}$$

- (3) Betrachte die Inklusion  $\iota: X \rightarrow Cf$ . Wir schreiben  $f^* = \cdot \circ f: [X, Z] \rightarrow [Y, Z]$ . Mit (2) sieht man, dass die Sequenz

$$[Cf, Z] \xrightarrow{\iota^*} [X, Z] \xrightarrow{f^*} [Y, Z]$$

punktierter Mengen für alle  $Z$  bei  $[X, Z]$  exakt ist.

Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir jeder punktierten Abbildung  $f: Y \rightarrow X$  eine Sequenz topologischer Räume und für jeden Raum  $Z$  eine exakte Sequenz zuordnen. Auf diese Konstruktion kommen wir später in der Kohomologietheorie zurück.

4.39. SATZ (Barratt-Puppe-Sequenz). *Zu jeder Abbildung  $f: Y \rightarrow X$  existiert eine Sequenz*

$$\dots \longleftarrow S^2 Cf \xleftarrow{S^2 \iota} S^2 X \xleftarrow{S^2 f} S^2 Y \xleftarrow{S^2 j} SCf \xleftarrow{S^2 \iota} SX \xleftarrow{S^2 f} SY \xleftarrow{S^2 j} Cf \xleftarrow{\iota} X \xleftarrow{f} Y \quad (1)$$

punktierter Abbildungen, so dass für je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen in der Sequenz ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Ck & & \\ \ell \downarrow \sim & \swarrow & \\ W & \longleftarrow & V \xleftarrow{k} U \end{array} \quad (2)$$

existiert, bei dem  $\ell$  eine Homotopieäquivalenz ist. Dann ist für jeden Raum  $Z$  die induzierte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow [S^2 Cf, Z] &\xrightarrow{(S^2 \iota)^*} [S^2 X, Z] \xrightarrow{(S^2 f)^*} [S^2 Y, Z] \xrightarrow{(Sj)^*} [SCf, Z] \xrightarrow{(S\iota)^*} \\ &\longrightarrow [SX, Z] \xrightarrow{(Sf)^*} [SY, Z] \xrightarrow{j^*} [Cf, Z] \xrightarrow{\iota^*} [X, Z] \xrightarrow{f^*} [Y, Z] \end{aligned} \quad (3)$$

exakt.

Die Sequenz (1) heißt auch *Kofasersequenz*. Nach Bemerkung 3.76 (1) ist die *Puppe-Sequenz* (3) bis zur Stelle  $[SY, Z]$  eine exakte Sequenz von Gruppen, und nach 3.76 (2) sogar eine Sequenz abelscher Gruppen bis zur Stelle  $[S^2 Y, Z]$ .

Allgemeiner heißt eine Sequenz

$$\dots \longleftarrow X_3 \longleftarrow X_2 \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_0$$

mit der Eigenschaft (3) *Homotopie-koexakt*. Die Sequenz (1) wird durch diese Eigenschaft allein nicht eindeutig bestimmt. Beispielsweise können wir  $Cf$  durch einen Raum  $W$  ersetzen, der  $Cf$  als Retrakt besitzt, und die Sequenz (1) links von  $X$  durch die entsprechende Sequenz zur Abbildung  $X \rightarrow W$  ersetzen, ohne die Exaktheit von (3) zu zerstören. Die Homotopieäquivalenz  $k$  in (2) ist ebenfalls nicht eindeutig bestimmt, denn die Gruppe  $[SU, W]$  operiert auf der Menge der möglichen Homotopieklassen von Homotopieäquivalenzen.

BEWEIS. Wir beweisen (2), dann folgt die Exaktheit der Sequenz (3) aus Bemerkung 4.38 (3). Dazu betrachten wir den Abbildungskegel

$$C\iota = CX \cup_{\iota} Cf.$$

Da  $(CY, Y)$  eine Kofaserung ist, sind  $(Cf, X)$  und  $(C\iota, CX)$  nach Proposition 3.64 ebenfalls Kofaserungen. Außerdem ist  $CX$  zusammenziehbar, also ist die Quotientenabbildung  $p: C\iota \rightarrow C\iota/CX$  eine Homotopieäquivalenz nach Proposition 3.62. Da  $CX$  die „Basis“ des Abbildungskegels  $C\iota$  ist, ist  $C\iota/CX$  natürlich homöomorph zur Einhängung  $SY$ . Wir beweisen (2) an der Stelle  $Cf$ , indem wir die Abbildung  $j: Cf \rightarrow SY$  definieren wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C\iota & \xleftarrow{J} & Cf \xleftarrow{\iota} X \\ p \downarrow \sim & \swarrow & \searrow j \\ & & SY \end{array}$$

Im nächsten Schritt sei  $J: Cf \rightarrow C\iota$  die natürliche Inklusion. Wie oben ist  $CJ = C(Cf) \cup_j C\iota$ , und  $(CJ, C(Cf))$  ist eine Kofaserung. Da die „Basis“  $C(Cf)$  von  $CJ$  zusammenziehbar ist, erhalten wir wieder eine Homotopieäquivalenz

$$q: CJ \xrightarrow{\sim} CJ/C(Cf) \cong SX.$$

Das linke Quadrat in Abbildung 4.3 kommutiert bis auf die punktierte Homotopie  $h: C\iota \rightarrow SX$  mit

$$\begin{aligned} h((y, s), t) &= (f(y), s(1-t)) && \text{für } (y, s) \in CY \subset C\iota, \\ \text{und } h((x, s), t) &= (x, 1-st) && \text{für } (x, s) \in CX \subset C\iota, \end{aligned}$$

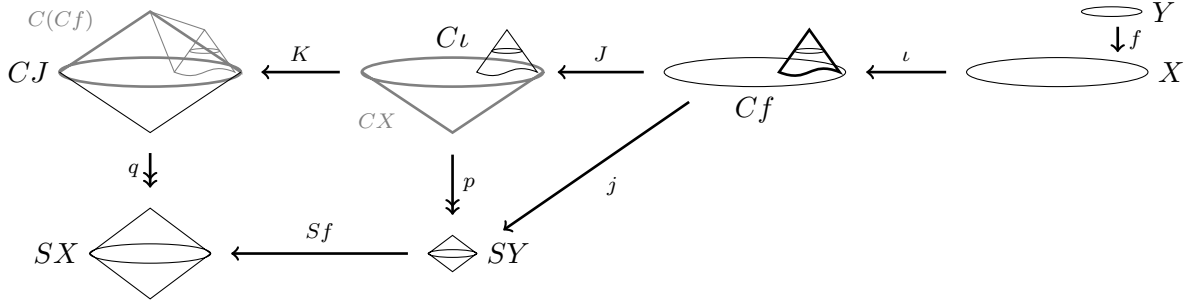


ABBILDUNG 4.3. Zur Kofasersequenz der Abbildung  $f: Y \rightarrow X$

wobei der Kegelparameter  $s$  jeweils an der Spitze den Wert 0 und an der Basis den Wert 1 annimmt. Betrachte außerdem  $-\text{id}_{SX} = (-\text{id}_{S^1}) \wedge \text{id}_X: SX \rightarrow SX$ , dann folgt  $h(\cdot, 0) = (-\text{id}_{SX}) \circ Sf \circ p$  und  $h(\cdot, 1) = q' \circ K$ , wobei  $K: C\iota \rightarrow CJ$  wieder die natürliche Inklusion und  $q': CJ \rightarrow SX$  die Quotientenabbildung bezeichne. Indem wir  $q'$  durch  $q = (-\text{id}_{SX}) \circ q'$  ersetzen, erhalten wir das kommutative Diagramm in Abbildung 4.3. Damit ist (2) an der Stelle  $SY$  ebenfalls gezeigt.

Um einzusehen, dass sich diese Sequenz beliebig weit nach links fortsetzt, müssen wir nur noch zeigen, dass sich die Sequenz beim Einhängen um drei Schritte nach links verschiebt. Dazu überlegen wir uns, dass

$$SCX = S^1 \wedge (I, 0) \wedge X \cong (I, 0) \wedge S^1 \wedge X = CSX$$

und  $S(Cf) = S(CY \cup_f X) \cong SCY \cup_{Sf} SX \cong CSY \cup_{Sf} SX = C(Sf)$ .

Somit ist die um drei Schritte verschobene Sequenz von gleicher Bauart wie die ursprüngliche, und (2) und (3) folgen induktiv.  $\square$

4.40. BEISPIEL. Es sei  $f: S^3 \rightarrow S^2$  die Hopf-Faserung. Wenn wir an  $S^2$  eine Zelle mit der Verklebeabbildung  $f$  ankleben, erhalten wir die komplex projektive Ebene  $\mathbb{C}P^2$ , siehe Übung 1.130. Insbesondere ist  $\mathbb{C}P^2 \cong Cf$ , da  $D^4 \cong CS^3$ . Der Quotient von  $\mathbb{C}P^2$  nach dem 2-Gerüst  $S^2$  ist homöomorph zu  $S^4$ . Wir erhalten also eine Kofasersequenz

$$\dots \longleftarrow S^3 \xleftarrow{Sf} S^4 \longleftarrow \mathbb{C}P^2 \longleftarrow S^2 \xleftarrow{f} S^3.$$

Völlig analog führen wir jetzt Fasersequenzen ein. Dabei lassen wir uns wie in Abschnitt 3.f vom Prinzip der Eckmann-Hilton-Dualität leiten. Wir erinnern uns daran, dass  $Y^{I+} = C(I, Y)$  die unpunktierten und  $Y^I$  die punktierten Abbildungen von  $I = (I, 0)$  nach  $Y$  bezeichnet. Diese Räume sind dual zum reduzierten Zylinder  $Y \wedge I_+$  beziehungsweise zum reduzierten Kegel  $CY$ .

4.41. DEFINITION. Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine punktierte Abbildung. Dann definieren wir die *Pfad-Faserung*

$$p: Pf \longrightarrow Y^{I+} \xrightarrow{\text{ev}_0} Y,$$

indem wir  $Pf = \{(\gamma, x) \in Y^{I+} \times X \mid \gamma(1) = f(x)\} \rightarrow Y^{I+}$  als Pullback

$$\begin{array}{ccc} Y^{I+} & \longleftarrow & Pf \\ \text{ev}_1 \downarrow & & \downarrow f^* \text{ev}_1 \\ Y & \xleftarrow{f} & X \end{array}$$

konstruieren. Die typische Faser der Pfadfaserung ist die *Homotopiefaser*

$$Ff = \{(\gamma, x) \in Y^{I+} \times X \mid \gamma(0) = y_0 \text{ und } \gamma(1) = f(x)\} = \{(\gamma, x) \in Y^I \times X \mid \gamma(1) = f(x)\}.$$

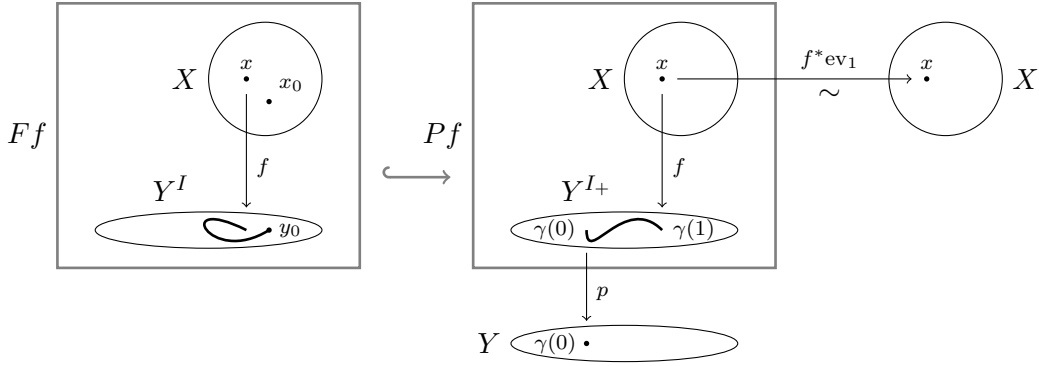


ABBILDUNG 4.4. Die Pfadfaserung einer Abbildung  $f: X \rightarrow Y$

4.42. BEMERKUNG. Die Pfadfaserung hat folgende Eigenschaften, siehe auch Abbildung 4.4 und Übung 4.62.

(1) Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{ev}_0: Y^{I+} &\longrightarrow Y, & \text{ev}_1: Y^{I+} &\longrightarrow Y, \\ p: Pf &\longrightarrow Y & \text{und} & f^*\text{ev}_1: Pf \longrightarrow X \end{aligned}$$

sind Hurewicz-Faserungen mit Faser  $Y^I$  beziehungsweise  $Ff$ , siehe Definition 3.22.

(2) Wenn wir  $Y$  mit den konstanten Pfaden in  $Y^{I+}$  identifizieren, ist  $Y$  ein Deformationsretrakt von  $Y^{I+}$ . Dabei können wir  $\text{ev}_0$  oder  $\text{ev}_1$  als Retraktionsabbildung wählen. Wählen wir entsprechend zu  $x \in X$  den konstanten Pfad im Punkt  $f(x)$  und benutzen  $\iota: X \rightarrow Pf$  mit

$$\iota(x) = (t \mapsto f(x), x)$$

um  $X$  mit  $\text{im } \iota \subset Pf$  zu identifizieren, so wird  $X$  zu einem Deformationsretrakt von  $Pf$ .

(3) Es gilt  $p \circ \iota = f$ , und  $f \circ f^*\text{ev}_1$  ist punktiert homotop zu  $p$ , somit können wir jede beliebige Abbildung  $f$  durch eine Hurewicz-Faserung  $p: Pf \rightarrow Y$  mit homotopieäquivalentem Totalraum ersetzen.

(4) Wenn  $f: X \rightarrow Y$  bereits eine Hurewicz-Faserung ist, dann ist die Homotopiefaser  $Ff$  homotopieäquivalent zur Faser  $f^{-1}(y_0)$ .

4.43. BEMERKUNG. Dual zu Bemerkung 4.38 hat die Homotopiefaser folgende Eigenschaften.

(1) Die Homotopiefaser  $Ff$  lässt sich auf zwei Weisen als Pullback darstellen:

$$\begin{array}{ccc} Y^I & \longleftarrow & Ff \\ \text{ev}_1 \downarrow & & \downarrow q = f^*\text{ev}_1 \\ Y & \longleftarrow & X \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} Pf & \longleftarrow & Ff \\ p \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longleftarrow & \text{pt} . \end{array}$$

(2) Eine Abbildung  $k: Z \rightarrow Ff$  entspricht genau einer Abbildung  $g: Z \rightarrow X$  und einer punktierten Nullhomotopie  $h$  von der konstanten Abbildung  $Z \rightarrow \{y_0\} \hookrightarrow Y$  zur Abbildung  $f \circ g$ .

(3) Wir schreiben  $f_* = f \circ \cdot : [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$ . Aus (2) folgt, dass die Sequenz

$$[Z, Ff] \xrightarrow{q_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$$

punktierter Mengen exakt ist.

Der folgende Satz ist Eckmann-Hilton dual zum Satz 4.39 von Barratt-Puppe. Der Beweis ist daher Übung 4.63. Wir überlegen uns aber, dass  $\Omega^k X = X^{S^k}$  zu  $S^k X = X \wedge S^k$  dual ist.

4.44. SATZ. Zu jeder Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  existiert eine Sequenz

$$\dots \rightarrow \Omega^2 Ff \xrightarrow{\Omega^2 q} \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 Y \xrightarrow{\Omega r} \Omega Ff \xrightarrow{\Omega q} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{r} Ff \xrightarrow{q} X \xrightarrow{f} Y \quad (1)$$

punktierter Abbildungen, so dass für je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen in der Sequenz ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Ff & & \\ k \downarrow \sim & \searrow q & \\ W & \xrightarrow{\quad} & V \xrightarrow{f} U \end{array} \quad (2)$$

existiert, bei dem  $k$  eine Homotopieäquivalenz ist. Dann ist für jeden Raum  $Z$  die induzierte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow [Z, \Omega^2 Ff] &\xrightarrow{(\Omega^2 q)_*} [Z, \Omega^2 X] \xrightarrow{(\Omega^2 f)_*} [Z, \Omega^2 Y] \xrightarrow{(\Omega r)_*} [Z, \Omega Ff] \xrightarrow{(\Omega q)_*} \\ &\rightarrow [Z, \Omega X] \xrightarrow{(\Omega f)_*} [Z, \Omega Y] \xrightarrow{r_*} [Z, Ff] \xrightarrow{q_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y] \end{aligned} \quad (3)$$

exakt.

Die Sequenz (1) heißt entsprechend *Fasersequenz*. Allgemeiner heißt eine Sequenz

$$\dots \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0$$

mit der Eigenschaft (3) *Homotopie-exakt*. Wiederum ist die Sequenz (1) nicht allein durch diese Eigenschaft bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig festgelegt, und  $k$  in (2) ist nicht bis auf Homotopie eindeutig bestimmt.

Als Spezialfall der Sequenz (3) mit  $Z = S^0$  erhalten wir die lange exakte Sequenz für Serre-Faserungen aus Satz 3.25, wenn wir  $Ff$  durch die Faser  $F$  und  $[S^0, \Omega^k \cdot]$  mit Hilfe des Exponentengesetzes durch  $[S^k, \cdot]$  ersetzen.

4.45. BEISPIEL. Es sei  $\iota: S^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$  die Inklusion des 2-Gerüsts und  $f: S^3 \rightarrow S^2$  die Hopf-Faserung. Da  $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ , lässt sich die Abbildung  $\iota \circ f$  auf  $D^4 = CS^3$  fortsetzen. Das liefert uns eine Abbildung  $g: S^3 \rightarrow F\iota$ . Der Schleifenraum  $\Omega\mathbb{C}P^\infty$  ist nach Übung 4.64 zu  $S^1$  homotopieäquivalent. Aus der obigen langen exakten Sequenz (3) für  $Z = S^k$  und Beispiel 3.33 folgt, dass  $g_*: \pi_k(S^3) \rightarrow \pi_k(Ff)$  ein Isomorphismus ist für alle  $k \geq 3$ . Für  $k = 1, 2$  überlegt man sich, dass  $\pi_k(\Omega S^2) \rightarrow \pi_j(\Omega\mathbb{C}P^1) = \pi_j(S^1)$  ein Isomorphismus ist für  $j = 0, 1$ . Außerdem sind sowohl  $S^3$  als auch  $Ff$  zusammenhängend. Somit ist  $g$  eine schwache Äquivalenz. Da  $Ff$  nach einer etwas allgemeineren Version des Satzes 4.36 von Milnor den Homotopietyp eines CW-Komplexes hat, ist  $g$  nach dem Satz 4.27 von Whitehead sogar eine Homotopieäquivalenz. Wir erhalten somit eine Fasersequenz

$$\dots \rightarrow S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{f} S^2 \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}P^\infty.$$

Auf der rechten Seite können wir die Fasersequenz sogar noch durch die Abbildung  $\mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$  fortsetzen.

#### 4.e. Übungen zu Kapitel 4

*Übungen zu Abschnitt 4.a.* Zur Erinnerung: unter „kompakt“ verstehen wir stets überdeckungskompakt und Hausdorffsch, siehe Definition 1.50.

4.46. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Hausdorff-Räume sind schwach Hausdorff, und schwache Hausdorff-Räume erfüllen (T1).
- (2) Sei  $X$  schwach Hausdorff,  $K$  kompakt und  $f: K \rightarrow X$  stetig. Dann ist im  $f$  kompakt (insbesondere Hausdorff), und  $f$  ist *eigentlich*, das heißt, Urbilder kompakter Teilmengen sind kompakt.



- (3) Unterräume und Produkte schwacher Hausdorff-Räume sind wieder schwache Hausdorff-Räume.

4.47. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Die  $k$ -offenen Mengen von  $X$  bilden eine Topologie  $\mathcal{O}_{kX}$  auf  $X$ ; diese ist feiner als  $\mathcal{O}_X$ . Schreibe  $kX = (X, \mathcal{O}_{kX})$ , dann ist insbesondere  $\text{id}_X: kX \rightarrow X$  stetig.
- (2) Sei  $K$  kompakt, dann ist  $f: K \rightarrow X$  genau dann stetig, wenn  $f: K \rightarrow kX$  stetig ist.
- (3) Es gilt  $\mathcal{O}_{k(kX)} = \mathcal{O}_{kX}$ , also ist  $kX$  kompakt erzeugt.
- (4) Ein Raum  $X$  ist genau dann kompakt erzeugt, wenn für jeden Raum  $Y$  und jede Abbildung  $g: X \rightarrow Y$  von Mengen äquivalent sind:
  - (a) die Abbildung  $g$  ist stetig, und
  - (b) für jedes Kompaktum  $K$  und jede stetige Abbildung  $f: K \rightarrow X$  ist  $g \circ f: K \rightarrow Y$  stetig.

4.48. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Der Funktor  $k: w\mathcal{H} \rightarrow kw\mathcal{H}$  ist rechtsadjungiert zum Inklusionsfunktor  $i: kw\mathcal{H} \rightarrow w\mathcal{H}$ , das heißt, für alle  $X \in kw\mathcal{H}$ ,  $Y \in w\mathcal{H}$  gibt es eine natürliche Bijektion

$$\text{hom}_{kw\mathcal{H}}(X, kY) = \text{hom}_{w\mathcal{H}}(iX, Y).$$

- (2) Es sei  $X \in kw\mathcal{H}$  und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Dann hat  $kA$  die charakteristische Eigenschaft eines Unterraums in der Kategorie  $kw\mathcal{H}$  aus Satz 1.43.
- (3) Es sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Räumen in  $kw\mathcal{H}$ , dann hat  $k \prod_{i \in I} X_i$  die universelle Eigenschaft eines Produkts in der Kategorie  $kw\mathcal{H}$  aus Satz 1.46.

4.49. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Disjunkte Vereinigungen und Quotienten kompakt erzeugter Räume sind wieder kompakt erzeugt.
- (2) Ein kompakt erzeugter Raum  $X$  ist genau dann schwach Hausdorffsch, wenn die Diagonale  $\Delta X = \{ (x, x) \mid x \in X \} \subset k(X \times X)$  abgeschlossen ist.
- (3) Disjunkte Vereinigungen schwacher Hausdorff-Räume sind schwach Hausdorffsch.
- (4) Sei  $X$  kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum und  $q: X \rightarrow Y$  surjektiv. Dann ist die Quotiententopologie auf  $Y$  genau dann schwach Hausdorffsch, wenn  $(q \times q)^{-1}(\Delta Y) \subset k(X \times X)$  abgeschlossen ist.

4.50. ÜBUNG. Zeigen Sie in Analogie zu Aufgabe 3.125: wenn  $X$  ein kompakt erzeugter schwach Hausdorff-Raum und  $(X, A)$  eine Kofaserung in der Kategorie  $kw\mathcal{H}$  ist, dann ist  $A \subset X$  eine  $k$ -abgeschlossene Teilmenge.

4.51. ÜBUNG. Es sei  $X$  kompakt erzeugt. Wir identifizieren eine Äquivalenzrelation „ $\sim$ “ auf  $X$  mit der Teilmenge

$$R_{\sim} = \{ (x, y) \in X^2 \mid x \sim y \} \subset k(X \times X),$$

und nennen „ $\sim$ “ abgeschlossen, wenn  $R_{\sim}$  eine abgeschlossene Teilmenge ist. Zeigen Sie:

- (1) Es sei  $Y \in kw\mathcal{H}$  und  $f: X \rightarrow Y$  stetig, dann ist  $(f \times f)^{-1}(\Delta Y)$  eine abgeschlossene Äquivalenzrelation.
- (2) Zeigen Sie, dass  $X/\sim$  genau dann schwach Hausdorff ist, wenn  $R_{\sim}$  abgeschlossen ist.
- (3) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt über alle abgeschlossenen Äquivalenzrelationen wieder eine abgeschlossene Äquivalenzrelation ist.
- (4) Es sei  $q: X \rightarrow hX$  der Quotient von  $X$  nach der Relation aus (3), dann faktorisiert jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  in einen Raum  $Y$  aus  $kw\mathcal{H}$  über  $q$ .

4.52. ÜBUNG. Es bezeichne  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} S^1$  den Quotienten topologischer Räume. Bestimmen Sie den Kolimes der Folge

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \dots$$

zum einen in der Kategorie  $\mathcal{Top}$ , zum anderen in der Kategorie  $kw\mathcal{H}$ .

4.53. ÜBUNG. Es sei  $X \in kw\mathcal{H}$ , und es sei  $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X$  eine aufsteigende Folge von Unterräumen in  $kw\mathcal{H}$ , so dass  $X \cong \varinjlim X_n$ . Außerdem sei  $K$  kompakt und  $f: K \rightarrow X$  stetig.

(1) Zeigen Sie, dass  $f \subset X_n$  für ein hinreichend großes  $n$ .

(2) Folgern Sie für  $x_0 \in X_0$ , dass  $\pi_k(X, x_0) = \varinjlim \pi_k(X_n, x_0)$ .

*Hinweis.* Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: es sei  $(x_n)_n$  eine Folge in  $X$ , so dass  $x_n \in X \setminus X_{n-1}$ , dann ist  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$  abgeschlossen.

4.54. ÜBUNG. Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge kompakt erzeugter schwacher Hausdorff-Räume mit Abbildungen  $f_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$  für  $n > 0$ . Zeigen Sie, dass der Raum  $\varprojlim X_n$  mit

$$\varprojlim X_n = \left\{ (x_n)_n \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \mid f_n(x_n) = x_{n-1} \text{ für alle } n > 0 \right\}$$

die universelle Eigenschaft eines (inversen) Limes erfüllt.

4.55. ÜBUNG. Wir betrachten den inversen Limes  $X$  der Folge

$$S^1 \xleftarrow{\cdot 1} S^1 \xleftarrow{\cdot 2} S^1 \xleftarrow{\cdot 3} S^1 \longleftarrow \dots$$

topologischer Räume. Bestimmen Sie eine Abbildung der universellen Überlagerung  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  des ersten Raumes in den Limes  $X$ . Ist diese Einbettung surjektiv?

*Übungen zu Abschnitt 4.b.*

4.56. ÜBUNG. Es sei  $(\mathcal{C}, \otimes, E)$  eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Zeigen Sie:

(1) Für jedes Objekt  $Y$  ist  $\text{hom}(Y, \cdot): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ein kovarianter Funktor mit

$$\text{ev}_{Y,W} \circ (\text{hom}(Y, f) \otimes \text{id}_Y) = f \circ \text{ev}_{Y,Z} \quad \text{für alle } f: Z \rightarrow W.$$

(2) Für jedes Objekt  $Z$  ist  $\text{hom}(\cdot, Z): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ein kontravarianter Funktor mit

$$\text{ev}_{X,Z} \circ (\text{hom}(f, Z) \otimes \text{id}_X) = \text{ev}_{Y,Z} \circ (\text{id}_{\text{hom}(Y,Z)} \otimes f) \quad \text{für alle } f: X \rightarrow Y.$$

(3) Wir erhalten einen Bifunktor  $\text{hom}(\cdot, \cdot)$ , das heißt, für alle  $f: Z \rightarrow W$ ,  $g: X \rightarrow Y$  gilt

$$\text{hom}(X, f) \circ \text{hom}(g, Z) = \text{hom}(g, W) \circ \text{hom}(Y, f): \text{hom}(Y, Z) \longrightarrow \text{hom}(X, W).$$

4.57. ÜBUNG. Es sei  $(\mathcal{C}, \otimes, E)$  eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt „ $\otimes$ “ die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

(1) Für alle Objekte  $X, Y$  gibt es eine Abbildung

$$\otimes_{X,Y}: X \longrightarrow \text{hom}(Y, X \otimes Y).$$

(2) Zu jedem weiteren Objekt  $Z$  und jeder Abbildung  $f: X \rightarrow \text{hom}(Y, Z)$  gibt es genau eine Abbildung  $F: X \otimes Y \rightarrow Z$ , so dass

$$f = \text{hom}(Y, F) \circ \otimes_{X,Y}.$$

*Übungen zu Abschnitt 4.c.*

4.58. ÜBUNG. Beweisen Sie Folgerung 4.21.

4.59. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Schwach äquivalente CW-Komplexe sind homotopieäquivalent.
- (2) Schwach äquivalente topologische Räume haben homotopieäquivalente CW-Approximationen.

4.60. ÜBUNG. Geben Sie  $k$ -zusammenhängende CW-Modelle für  $(\mathbb{C}P^n, *)$  an für alle  $k \leq 2n$ .  
*Zusatz:* Wie sieht es mit  $(\mathbb{H}P^n, *)$  aus?

4.61. ÜBUNG. Präzisieren und beweisen Sie die folgende Aussage:  
Pushouts längst zellulären Abbildungen auf Unterkomplexen sowie Kolimiten einer Folge zellulärer Inklusionen von CW-Komplexen liefern wieder CW-Komplexe.

*Übungen zu Abschnitt 4.d.*

4.62. ÜBUNG. Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine beliebige Abbildung. Beweisen Sie zwei der folgenden Aussagen aus Bemerkung 4.42.

- (1) Die Pfadfaserung  $Pf \rightarrow Y$  ist eine Hurewicz-Faserung mit Faser  $Ff$ .
- (2) Der Unterraum  $\text{im}(\iota) \cong X$  ist ein Deformationsretrakt von  $Pf$ .
- (3) Die Abbildung  $f \circ (f^*ev_1)$  ist zu  $p: Pf \rightarrow Y$  punktiert homotop.
- (4) Wenn  $f$  eine Hurewicz-Faserung ist, ist  $f^{-1}(y_0)$  zur Homotopiefaser  $Ff$  homotopieäquivalent.

4.63. ÜBUNG. Zeigen Sie die Exaktheit der Sequenz (2) aus Satz 4.44 an einer der Stellen  $[Z, Ff]$  oder  $[Z, \omega Y]$ , indem Sie den Beweis von Satz 4.39 mit Eckmann-Hilton-Dualität übertragen.

4.64. ÜBUNG. Es sei  $\iota: S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$  die Inklusion. Die Abbildung  $S^1 \wedge S^1 \cong S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$  induziert eine Abbildung

$$S^1 \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{C}P^\infty).$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine schwache Äquivalenz ist. Aus den Sätzen von Milnor und Whitehead folgt, dass sie sogar eine Homotopieäquivalenz ist.

4.65. ÜBUNG. Es sei  $\iota: S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$  die obige Inklusion und  $F\iota$  ihre Homotopiefaser. Da  $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ , lässt sich die durch die Hopf-Faserung induzierte Abbildung  $g: S^3 \rightarrow S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$  auf ganz  $D^4$  fortsetzen.

Konstruieren Sie damit eine Abbildung  $S^3 \rightarrow F\iota$ . Zeigen Sie mit Hilfe der langen exakten Sequenz 3.25 für Faserungen, dass diese Abbildung eine schwache Äquivalenz ist.



## KAPITEL 5

# Homologie

Wir haben am Ende von Kapitel 3 gesehen, dass stabile Homotopiegruppen etwas leichter zu handhaben sind als die ursprünglichen Homotopiegruppen. Wir nehmen das als Inspiration für die Eilenberg-Steenrod-Axiome für allgemeine Homologie- und Kohomologiefunktoren. In der Literatur ist gern von Homologietheorien die Rede, aber eigentlich ist das ganze nur Teil einer größeren Theorie, daher verwenden wir den etwas bescheideneren Begriff Funktor.

### 5.a. Abelsche Kategorien

Ein Homologiefunktor ordnet im einfachsten Falle jedem Raum eine Folge abelscher Gruppen zu. Wir können aber auch Moduln über einem festen Ring oder Vektorräume über einem festen Körper zulassen. Außerdem möchten wir später zusätzliche Strukturen betrachten können. Daher bietet es sich an, die Zielkategorie eines Homologiefunktors nicht von vornherein auf abelsche Gruppen einzuschränken. Wir verlangen aber, dass die Zielkategorie ähnliche Eigenschaften wie die der abelschen Gruppen hat.

5.1. BEMERKUNG. Da wir nicht davon ausgehen können, dass wir es mit einer Kategorie von Mengen zu tun haben, müssen wir einige elementare Begriffe neu definieren. Nichtsdestoweniger kann man am Ende Mitchells Einbettungssatz beweisen [F, Thm 7.34], wonach jede abelsche Kategorie volle Unterkategorie einer Kategorie von Moduln über einem geeigneten Ring ist. Viele Lemmata in abelschen Kategorien, lassen sich dadurch beweisen, dass man ihre Gültigkeit in der Kategorie  $\text{Mod}_R$  der (Links-)  $R$ -Moduln für jeden unitären, nicht notwendig kommutativen Ring  $R$  zeigt, siehe [F, Thm 4.31].

Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Der Einfachheit halber sei  $\mathcal{C}$  stets lokal klein. Ein Morphismus  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  heißt *Monomorphismus*, wenn für jedes Objekt  $X$  und je zwei Morphismen  $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$  gilt

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h,$$

und *Epimorphismus*, wenn für jedes Objekt  $X$  und je zwei Morphismen  $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)$  gilt

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Ein (*kategorielles*) *Bild* von  $f$  ist eine Faktorisierung  $f = g \circ h$  mit  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B)$ ,  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ , wobei  $g$  ein Monomorphismus ist, mit folgender universeller Eigenschaft: für jede Faktorisierung  $f = k \circ \ell$  mit  $k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$ ,  $\ell \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ , wobei  $k$  ein Monomorphismus ist, existiert ein Morphismus  $m: C \rightarrow X$  mit  $g = \ell \circ m$ . Da  $k$  Monomorphismus ist, ist  $m$  eindeutig. Da  $g$  Monomorphismus ist, ist  $m$  ebenfalls Monomorphismus. Dadurch ist das Bild bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt, und wir schreiben  $\text{im } f = C$ , falls ein Bild  $C$  wie oben existiert.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow & \searrow & \uparrow k \\
 & & X \\
 \text{im } f & \dashrightarrow & X
 \end{array}$$

Den dazu dualen Begriff des Kobildes  $\text{coim } f$  brauchen wir nicht zu erklären.

5.2. BEMERKUNG. Wir listen einige elementare Eigenschaften dieser Begriffe ohne Beweis auf.

- (1) In den Kategorien  $Set$ ,  $Ab$ ,  $Grp$  und  $Vec_{\mathbb{k}}$  sind Monomorphismen genau die injektiven und Epimorphismen genau die surjektiven Morphismen. Das gilt aber nicht in jeder Kategorie, deren Objekte Mengen sind. Beispielsweise ist die Inklusion einer dichten Teilmenge in einen topologischen Raum ein Epimorphismus in  $kw\mathcal{H}$ , auch wenn sie nicht surjektiv ist.
- (2) Jeder Isomorphismus ist sowohl Monomorphismus als auch Epimorphismus. Das obige Beispiel in  $kw\mathcal{H}$  zeigt, dass die Umkehrung nicht in jeder Kategorie gilt.
- (3) Seien  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$  und  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  gegeben. Wenn  $f \circ g$  Monomorphismus ist, dann auch  $f$ . Wenn  $f$  und  $g$  Monomorphismen sind, dann auch  $f \circ g$ . Die dualen Aussagen gelten für Epimorphismen.
- (4) Es sei  $A$  Retrakt von  $B$  in  $\mathcal{C}$ , das heißt, es gibt  $\iota \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  und  $r \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  mit  $r \circ \iota = \text{id}_A$ . Dann ist  $\iota$  Mono- und  $r$  Epimorphismus.
- (5) Sind  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  und  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$  Monomorphismen, dann gibt es höchstens eine Abbildung  $h \in \text{Hom}(B, C)$  mit  $f = h \circ g$ . Wenn  $h$  ein Isomorphismus ist, nennen wir  $f$  und  $g$  äquivalent. Eine Äquivalenzklasse von Monomorphismen nach  $A$  heißt *Unterojekt* von  $A$ , und wir schreiben  $B \subset A$ . Dual definieren wir *Quotientenobjekte* von  $A$  als Äquivalenzklassen von Epimorphismen aus  $A$  heraus.

Es sei jetzt  $\mathcal{C}$  eine punktierte Kategorie wie in Bemerkung 4.12, das heißt, es gibt ein Nullobjekt  $0$ , das gleichzeitig initial und terminal ist. In jeder Morphismenmenge  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  gibt es genau einen Nullmorphismus  $f$ , das heißt, es gilt  $f = g \circ h$  mit  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, B)$  und  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 0)$ . Wir schreiben  $f = 0 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ .

Ein (*kategorieller*) *Kern* von  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  ist ein Morphismus  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$  mit der universellen Eigenschaft, dass  $f \circ g = 0$ , und für jedes Objekt  $X$  und jeden Morphismus  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$  mit  $f \circ h = 0$  existiert genau ein  $k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C)$ , so dass  $h = g \circ k$ . Aufgrund der universellen Eigenschaft sind Kerne bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & \longrightarrow & 0 \\
 & \swarrow & \downarrow h & \nearrow & \downarrow \\
 \ker f & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Man kann zeigen, dass  $\ker f \rightarrow A$  ein Monomorphismus ist, also ist  $\ker f$  ein Unterojekt, und wir schreiben  $\ker f \subset A$ .

Dual dazu ist ein (*kategorieller*) *Kokern* von  $f$  ein Morphismus  $g: B \rightarrow \text{coker } f$  mit  $g \circ f = 0$ , so dass für jedes Objekt  $X$  und jeden Morphismus  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)$  mit  $h \circ f = 0$  genau ein  $k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{coker } f, X)$  mit  $h = k \circ g$  existiert.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & \text{coker } f \\
 \downarrow & & \downarrow h & \nearrow & \swarrow \\
 0 & \longrightarrow & X & & 
 \end{array}$$

Zu guter Letzt heißt ein Monomorphismus *normal*, wenn er Kern eines anderen Morphismus ist, und ein Epimorphismus heißt *konormal*, wenn er Kokern eines anderen Morphismus ist.

- 5.3. BEMERKUNG. (1) In einer punktierten Kategorie ist  $0 \rightarrow A$  stets ein Mono- und  $A \rightarrow 0$  stets ein Epimorphismus.
- (2) In den Kategorien  $Ab$ ,  $Mod_R$  und  $Vec_{\mathbb{k}}$  sind die algebraischen Kerne beziehungsweise Kokerne auch kategorielle Kerne beziehungsweise Kokerne.

- (3) In einer punktierten Kategorie gilt  $\ker f = 0$  für jeden Monomorphismus  $f$  und  $\operatorname{coker} f = 0$  für jeden Epimorphismus  $f$ .

5.4. DEFINITION. Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt *abelsch*, wenn

- (1) sie punktiert ist, also ein Nullobjekt  $0$  besitzt,
- (2) alle endlichen Produkte und Koprodukte existieren,
- (3) jeder Morphismus Kern und Kokern besitzt,
- (4) jeder Monomorphismus normal und jeder Epimorphismus konormal ist.

5.5. BEISPIEL. Die Kategorien  $\mathcal{A}b$ ,  $\mathcal{M}od_R$  und  $\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$  sind abelsch.

Die obige Definition hat viele, wichtige Konsequenzen. Für die obigen Beispiele ist das klar, daher verzichten wir auf den Beweis.

5.6. PROPOSITION. *Es sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie.*

- (1) *Alle Morphismenmengen  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}$  sind abelsche Gruppen unter einer Addition, der Nullmorphismus ist neutrales Element, und Verknüpfung von Morphismen ist bilinear.*
- (2) *Für endlich viele Objekte  $A_1, \dots, A_n$  ist die natürliche Abbildung*

$$A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \longrightarrow A_1 \times \dots \times A_n$$

*stets ein Isomorphismus.*

- (3) *Für jeden Morphismus  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  gibt es natürliche Isomorphismen*

$$\operatorname{im} f \cong \ker \operatorname{coker} f \cong \operatorname{coker} \ker f \cong \operatorname{coim} f ,$$

*und wir schreiben*

$$A / \ker f = \operatorname{coim} f \cong \operatorname{im} f \subset B .$$

*Insbesondere gilt der Homomorphiesatz.*

- (4) *Ein Morphismus  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  ist genau dann Monomorphismus, wenn  $\ker f = 0$  oder äquivalent  $\operatorname{coim} f = A$ , und genau dann ein Epimorphismus, wenn  $\operatorname{coker} f = 0$  oder äquivalent  $\operatorname{im} f = B$ .*
- (5) *Wenn  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  sowohl Mono- als auch Epimorphismus ist, ist  $f$  Isomorphismus.*
- (6) *In  $\mathcal{C}$  existieren Pushouts und Pullbacks. Wenn  $B$  und  $C$  Unterobjekte von  $A$  sind, schreiben wir  $B \cap C$  für ihren Pullback und nennen  $B \cap C$  den Durchschnitt von  $B$  und  $C$ . Der Pushout von  $B \cap C \hookrightarrow B$  und  $B \cap C \hookrightarrow C$  ist dann ebenfalls ein Unterobjekt von  $A$ , und wir schreiben  $B + C \subset A$ .*

$$\begin{array}{ccc} B \cap C & \hookrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \hookrightarrow & B + C \hookrightarrow A . \end{array}$$

*Es folgt der Noethersche Isomorphiesatz  $B / (B \cap C) \cong (B + C) / C$ .*

5.7. BEMERKUNG. Wir erinnern uns an den Begriff der Sequenz aus Definition 3.17. Wir können diesen Begriff auf abelsche Kategorien übertragen. Eine *Sequenz* in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein Folge von Abbildungen

$$\dots \longleftarrow M_{i-1} \xleftarrow{f_i} M_i \xleftarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longleftarrow \dots$$

Eine Sequenzabbildung ist ein kommutatives Diagramm wie ebendort. Eine Sequenz in einer abelschen Kategorie heißt *Komplex*, wenn  $f_i \circ f_{i+1} = 0$  für alle  $i$  gilt. In diesem Fall folgt  $\text{im } f_{i+1} \subset \ker f_i$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \ker f_i & \subset & \text{im } f_{i+1} & \\
 & & & \swarrow & & \uparrow & \\
 & & & 0 & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & \\
 \dots & \longleftarrow & M_{i-1} & \xleftarrow{f_i} & M_i & \xleftarrow{f_{i+1}} & M_{i+1} & \longleftarrow \dots \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & \\
 & & M_i / \ker f_i = \text{coim } f_i & & \text{coker } f_{i+1} = M_i / \text{im } f_{i+1} & & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & & 0 & & & 
 \end{array}$$

Falls  $\text{im } f_{i+1} = \ker f_i$  für alle  $i$  gilt, nennen wir die Sequenz *exakt*. Äquivalent dazu gilt  $\text{coker } f_{i+1} = \text{coim } f_i$ . Kurze exakte Sequenzen definieren wir wieder wie ebendort.

5.8. BEMERKUNG. In abelschen Kategorien gelten „die üblichen Lemmata“. Wir kennen davon zur Zeit nur das Vierer- und Fünfer-Lemma 3.20. Der Beweis dieser Lemmata mit abstrakten Methoden ist umständlich. Stattdessen kommen wir auf die Bemerkung am Anfang dieses Abschnitts zurück, wonach aufgrund von Mitchells Einbettungssatz das „abstrakte“ Fünferlemma aus unserem Beweis folgt.

### 5.b. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome

Wir geben die Eilenberg-Steenrod-Axiome für allgemeine Homologiefunktoren an, leiten einige elementare Schlussfolgerungen ab, und geben ein Beispiel einer solchen Theorie. Weitere Homologiefunktoren konstruieren wir später. Der Einfachheit halber arbeiten wir in der Kategorie  $kw\mathcal{H}$  aus Abschnitt 4.a. Ihre Homotopiekategorie  $\mathcal{H}kw\mathcal{H}$  entsteht, indem wir Morphismen durch Homotopieklassen stetiger Abbildungen ersetzen. Außerdem bezeichne  $\mathcal{Kof}_+$  die Kategorie der (gut) punktierten guten Paare.

Wir betrachten Funktoren mit Werten in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ , die beliebige Koproducte zulässt. Unter dieser Kategorie dürfen wir uns gern die Kategorie  $\mathcal{A}b$  der abelschen Gruppen vorstellen, in einfachen Fällen reicht sogar die Kategorie  $\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$  der  $\mathbb{k}$ -Vektorräume. Nach Bemerkung 5.1 ist der allgemeinste Fall, den wir betrachten müssen, der einer Kategorie  $\mathcal{M}od_R$  über einem unitären, nicht notwendig kommutativen Ring. Wir erinnern uns an den Begriff eines guten Paares aus Definition 3.80.

5.9. DEFINITION. Ein (*allgemeiner*) *reduzierter Homologiefunktor*  $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$  mit Werten in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  mit beliebigen Koproducten besteht aus einer Familie von Funktoren

$$\tilde{h}_\bullet = (\tilde{h}_n : \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{C})_{n \in \mathbb{Z}},$$

und einer Familie natürlicher Transformationen  $\partial_\bullet = (\partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit  $\partial_n(X, A) : \tilde{h}_n(X/A) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(A)$  für alle gut punktierten Kofaserungen  $(X, A)$ , die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

(1) *Homologiesequenz*. Für jedes gute Paar  $(X, A)$  ist die folgende Sequenz exakt:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \tilde{h}_n(A) \xrightarrow{\tilde{h}_n \iota} \tilde{h}_n(X) \xrightarrow{\tilde{h}_n p} \tilde{h}_n(X/A) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{h}_{n-1}(A) \xrightarrow{\tilde{h}_{n-1} \iota} \dots$$

(2) *Summenaxiom*. Sei  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  eine Familie gut punktierter Räume, dann ist die von den Inklusionsabbildungen  $\iota_i : X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$  induzierte Abbildung

$$\bigoplus_{i \in I} \tilde{h}_n \iota_i : \bigoplus_{i \in I} \tilde{h}_n(X_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n \left( \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) \right)$$

ein Isomorphismus.



Man nennt  $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$  einen (*gewöhnlichen*) *reduzierten Homologiefunktor* mit *Koeffizienten*  $M \in \mathcal{C}$ , wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

(3) *Dimensionsaxiom*.

$$\tilde{h}_n(S^0) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da  $\tilde{h}_n$  auf der Homotopiekategorie  $\mathcal{H}kw\mathcal{H}_+$  definiert ist, haben homotopieäquivalente Räume isomorphe Homologien. Axiom (1) spricht nur über Kofaserungen. Für beliebige Paare  $(Y, X)$  und allgemeiner Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  ersetzt man den Quotienten durch den Homotopiequotienten  $X//A$  aus Definition 3.67, beziehungsweise durch den Abbildungskegel aus Definition 4.37. Aufgrund der Homotopieinvarianz von  $\tilde{h}$  gilt Axiom (1) in dieser Situation analog.

Der *Verbindungshomomorphismus* oder die *Randabbildung*  $\partial_n$  im Axiom (1) ist eine natürliche Transformation im Sinne von Definition 3.3 zwischen den zwei Funktoren von der Kategorie  $\mathcal{Kof}_+$  nach  $\mathcal{C}$ , die  $(X, A)$  auf  $\tilde{h}_n(X/A)$  beziehungsweise auf  $\tilde{h}_{n-1}(A)$  abbilden. Sei  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung zwischen Kofaserungen, dann erhalten wir also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & \tilde{h}_n(A) & \xrightarrow{\tilde{h}_n\iota} & \tilde{h}_n(X) & \xrightarrow{\tilde{h}_n p} & \tilde{h}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \tilde{h}_n(f|_A) \downarrow & & \tilde{h}_n f \downarrow & & \tilde{h}_n \bar{f} \downarrow & & \tilde{h}_{n-1}(f|_A) \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & \tilde{h}_n(B) & \xrightarrow{\tilde{h}_n\iota} & \tilde{h}_n(Y) & \xrightarrow{\tilde{h}_n p} & \tilde{h}_n(Y/B) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Dabei ergibt sich die Kommutativität der zwei linken Quadrate aus der Natürlichkeit von  $\iota$  und  $p$  (siehe oben) und der Funktorialität von  $\tilde{h}_n$ , während die Kommutativität des rechten Quadrats aus der Natürlichkeit von  $\partial_\bullet$  folgt. Später schreiben wir meistens nur  $\tilde{h}_\bullet$  anstelle von  $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ . Außerdem kürzen wir gern  $\tilde{h}_k f$  durch  $f_*$  ab, wenn klar ist, zwischen welchen Homologien  $f_*$  abbildet.

In der Literatur gibt es viele Varianten dieser Axiome. Die natürliche lange exakte Sequenz (1) zusammen mit Homotopieinvarianz bilden dabei stets den „harten Kern“. Auf das Summenaxiom (2) können wir wegen Bemerkung 5.14 verzichten, wenn wir nur endliche Koprodukte betrachten wollen; diese reichen aber nicht für alle Anwendungen aus. Andere Axiome können wir bei Bedarf zusätzlich fordern, zum Beispiel, dass  $\tilde{h}_\bullet$  auch unter schwachen Äquivalenzen invariant ist, oder dass (2) sogar für alle abstrakten Limiten gilt. Die ursprünglichen Axiome von Eilenberg und Steenrod beziehen sich übrigens auf *unreduzierte* Homologie, siehe Bemerkung 5.12 (2) unten.

5.10. LEMMA. *Es sei  $X$  ein gut punktierter Raum, der relativ zu seinem Basispunkt zusammenziehbar ist. Dann gilt  $\tilde{h}_k(X) = 0$  für jeden allgemeinen reduzierten Homologiefunktor  $\tilde{h}_\bullet$ .*

BEWEIS. Da  $\tilde{h}_\bullet$  homotopieinvariant ist und  $X$  zusammenziehbar, also homotopieäquivalent zu einem Punkt, reicht es, den Ein-Punkt-Raum  $\text{pt}$  zu betrachten. Es sei also  $(X, A) = (\text{pt}, \text{pt})$ , mit den natürlichen Abbildungen  $\iota = p = \text{id}_X$ . Nach Axiom (1) ist die Sequenz

$$\tilde{h}_n(X/A) \xleftarrow{p_*} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{\iota_*} \tilde{h}_n(A)$$

bei  $\tilde{h}_n(X)$  exakt, also folgt

$$\tilde{h}_n(X) = \text{im}(\text{id}) = \ker(\text{id}) = 0 \subset \tilde{h}_n(X),$$

das heißt,  $\tilde{h}_n(\{*\}) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  und für jeden allgemeinen reduzierten Homologiefunktor.  $\square$

Wir kennen bereits einen allgemeinen Homologiefunktor. Dieser wird uns später dabei helfen, weitere Homologiefunktoren zu konstruieren.

5.11. FOLGERUNG (aus Satz 3.81 und den Propositionen 3.78 und 3.83). *Die stabilen Homotopiegruppen bilden einen allgemeinen Homologiefunktor  $\pi_\bullet^s: \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \rightarrow \text{Ab}$ .*

Stabile Homotopiegruppen erfüllen aber nicht das Dimensionsaxiom, denn nach Satz 3.101 gilt  $\pi_1^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2 \neq 0$ .

5.12. BEMERKUNG. Wir betrachten die Rolle des Basispunktes von  $X$ .

- (1) Betrachte die punktierte Abbildung  $r: X_+ = X \sqcup \{*\} \rightarrow S^0$ , die ganz  $X$  auf denjenigen Punkt von  $S^0$  abbildet, der nicht der Basispunkt ist. Nach Übung 5.88 erhalten wir für jeden reduzierten Homologiefunktor  $\tilde{h}_\bullet$  einen natürlichen Isomorphismus

$$\tilde{h}_k(X) \xrightarrow{\cong} \ker(r_*: \tilde{h}_k(X_+) \rightarrow \tilde{h}_k(S^0)) .$$

Man beachte, dass die rechte Seite nicht von der Wahl des Basispunktes in  $X$  abhängt, und auch dann wohldefiniert ist, wenn  $X$  überhaupt keinen guten Basispunkt besitzt. Im Gegensatz zu den höheren Homotopiegruppen (siehe Folgerung 3.8) hängt  $\tilde{h}_k(X)$  also nicht von der Wahl eines Basispunktes ab; allerdings darf  $X$  nicht leer sein. Bezeichne  $\mathcal{H}kw\mathcal{H}_{\neq\emptyset}$  die volle Unterkategorie von  $\mathcal{H}kw\mathcal{H}$  der nicht-leeren Räume, dann lässt sich jeder Homologiefunktor  $\tilde{h}_k$  über  $\mathcal{H}kw\mathcal{H}_{\neq\emptyset}$  faktorisieren als

$$\mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}kw\mathcal{H}_{\neq\emptyset} \longrightarrow \mathcal{C} .$$

Links steht hier der vergessliche Funktor, während wir den rechten auch als  $\tilde{h}_k$  schreiben können.

- (2) Zu jedem allgemeinen reduzierten Homologiefunktor  $\tilde{h}_\bullet$  definieren wir einen allgemeinen *unreduzierten* Homologiefunktor  $h_\bullet$  auf  $\mathcal{H}kw\mathcal{H}$  durch

$$h_k(X) = \tilde{h}_k(X_+) .$$

Für Paare  $(X, U)$  definiert man einen *relativen Homologiefunktor*  $h_\bullet$  durch

$$h_k(X, U) = \tilde{h}_k(X//U) ,$$

siehe Übungen 5.94 und 5.95 für CW-Komplexe. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome [ES, Section I.3] fordern die lange exakte Sequenz für alle Paare  $(X, U)$ , nicht nur für Kofaserungen. Außerdem benötigt man ein Ausschneidungsaxiom, siehe Satz 7.36. Diese Forderungen sind dann zu 5.9 (1) äquivalent.

- (3) Sobald man einen Basispunkt in  $X$  auszeichnet, erhält man einen Isomorphismus

$$h_\bullet(X) \cong \tilde{h}_\bullet(X) \oplus \tilde{h}_\bullet(S^0) ,$$

der allerdings von der Wahl des Basispunktes abhängt. Als Beispiel betrachte zunächst

$$h_\bullet(\text{pt}) = \tilde{h}_\bullet(\text{pt}_+) = \tilde{h}_\bullet(S^0) .$$

Sei jetzt  $X = \{1, \dots, n\}$  eine endliche diskrete Menge, dann gilt

$$h_\bullet(X) = \bigoplus_{i=1}^n \tilde{h}_\bullet(S^0) \cong \tilde{h}_\bullet(X) \oplus \tilde{h}_\bullet(S^0) .$$

Dabei entspricht dem Summanden  $\tilde{h}_\bullet(S^0)$  rechts derjenige Summand auf der linken Seite, der zum gewählten Basispunkt gehört.

- (4) Wir erhalten wegen Satz 3.97, Folgerung 5.11 und (2) als Beispiel eines allgemeinen unreduzierten Homologiefunktors den gerahmten Bordismus

$$\Omega_\bullet^{\text{fr}}(X) = \pi_\bullet^s(X_+) .$$

In Zukunft meinen wir immer reduzierte Homologiefunktoren, solange wir nicht anderes sagen. Als nächstes wollen wir einige möglichst allgemeine Sätze über Homologiefunktoren aus den Axiomen herleiten.

5.13. SATZ (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es sei  $X = A \cup B$ , so dass  $(A, A \cap B)$  und  $(B, A \cap B)$  Kofaserungen sind, und es sei  $\tilde{h}$  ein allgemeiner Homologiefunktor. Bezeichne die natürlichen Inklusionen mit*

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow b & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{j} & X \end{array}.$$

*Dann existiert ein natürlicher Verbindungshomomorphismus  $\partial: \tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(A \cap B)$ , so dass die Sequenz*

$$\cdots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(A \cap B) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{i_* + j_*} \tilde{h}_n(A) \oplus \tilde{h}_n(B) \xleftarrow{(a_*, -b_*)} \tilde{h}_n(A \cap B) \longleftarrow \cdots$$

*exakt ist.*

BEWEIS. Wir wissen aus Folgerung 3.66, dass  $(X, A)$  und  $(X, B)$  unter den obigen Voraussetzungen ebenfalls Kofaserungen sind. Außerdem gilt  $X/A \cong B/(A \cap B)$  und  $X/B \cong A/(A \cap B)$ . Wir fassen die  $\tilde{h}$ -Sequenzen für die Paare  $(X, A)$ ,  $(X, B)$ ,  $(A, A \cap B)$  und  $(B, A \cap B)$  im folgenden Diagramm zusammen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \xrightarrow{r_*} & & \xrightarrow{\partial} & & \xrightarrow{s_*} & & \xrightarrow{-\partial} & & \\ \tilde{h}_{n-1}(X/B) & & & \tilde{h}_{n-1}(A) & & \tilde{h}_n(X/A) & & \tilde{h}_n(B) & & \tilde{h}_{n+1}(X/B) & \\ & \swarrow q_* & & \swarrow i_* & \swarrow a_* & \swarrow \partial & \swarrow p_* & \swarrow j_* & \swarrow b_* & \swarrow -\partial & \\ & & \tilde{h}_{n-1}(X) & & \tilde{h}_{n-1}(A \cap B) & & \tilde{h}_n(X) & & \tilde{h}_n(A \cap B) & & \\ & \swarrow p_* & \swarrow j_* & \swarrow b_* & \swarrow -\partial & \swarrow q_* & \swarrow i_* & \swarrow a_* & \swarrow \partial & & \\ \tilde{h}_{n-1}(X/A) & & \tilde{h}_{n-1}(B) & & \tilde{h}_n(X/B) & & \tilde{h}_n(A) & & \tilde{h}_{n+1}(X/A) & & \\ & \swarrow s_* & & \swarrow -\partial & & \swarrow r_* & & \swarrow \partial & & & \end{array}$$

Die linke und die rechte Raute kommutieren, weil  $\tilde{h}_\bullet$  ein Funktor ist. Die „runden Dreiecke“ kommutieren wegen der Natürlichkeit der langen exakten Sequenz (1), angewandt auf die Paarabbildung  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  beziehungsweise  $(A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$ , und weil  $X/A \cong B/(A \cap B)$  beziehungsweise  $X/B \cong A/(A \cap B)$ . Die Kommutativität der mittleren Raute können wir erst später in Bemerkung 5.15 zeigen; sie wird im Folgenden auch nicht benutzt.

Als Verbindungshomomorphismus wählen wir  $\partial \circ p_* = -\partial \circ q_*$ . Da  $\partial$  natürlich ist, ist dieser Verbindungshomomorphismus ebenfalls natürlich, hängt allerdings von der Reihenfolge der Mengen  $A$  und  $B$  ab. Um zu zeigen, dass die Sequenz exakt ist, veranstalten wir eine Diagrammjagd zwischen den (oben schwarz gezeichneten) exakten Sequenzen der Paare  $(X, A)$  und  $(B, A \cap B)$ .

Beispielsweise folgt die Exaktheit bei  $\tilde{h}_n(A) \oplus \tilde{h}_n(B)$  aus folgendem Argument. Sei zunächst  $\gamma \in \tilde{h}_n(A \cap B)$ . Aus der Kommutativität der rechten Raute folgt

$$((i_* + j_*) \circ (a_*, -b_*))(\gamma) = (i_* \circ a_*)(\gamma) - (j_* \circ b_*)(\gamma) = 0.$$

Seien jetzt  $\alpha \in \tilde{h}_n(A)$  und  $\beta \in \tilde{h}_n(B)$  gegeben, so dass  $i_*\alpha + j_*\beta = 0$ . Dann liegt  $\xi = -j_*\beta = i_*\alpha$  im Bild von  $i_*$ , also im Kern von  $p_*$ . Es folgt  $s_*\beta = -p_*\xi = 0$ , also existiert ein Element  $\gamma' \in \tilde{h}_n(A \cap B)$  mit  $-b_*\gamma' = \beta$ . Da  $(i_* \circ a_*)\gamma' = (j_* \circ b_*)\gamma' = \xi = i_*\alpha$ , also  $i_*(\alpha - a_*\gamma') = 0$ , existiert ein  $\delta \in \tilde{h}_{n+1}(X/A)$  mit  $\partial\delta = \alpha - a_*\gamma' \in \tilde{h}_n(A)$ . Dann ist  $\gamma = \gamma' + \partial\delta \in \tilde{h}_n(A \cap B)$  das gesuchte Urbild von  $(\alpha, \beta)$ .

Exaktheit an den anderen Stellen ist etwas einfacher und ist daher Inhalt der Übung 5.89.  $\square$

5.14. BEMERKUNG. Mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz sehen wir, dass das Summenaxiom (2) für endliche Summen bereits aus Homotopieinvarianz und (1) folgt, denn mehr haben wir im obigen Beweis nicht gebraucht. Sei dazu  $X = Y \vee Z$  mit Basispunkt in  $Y \cap Z = \text{pt}$ , dann erhalten wir mit Lemma 5.10, dass

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_{n-1}(\text{pt})}_{=0} \longleftarrow \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{i_*+j_*} \tilde{h}_n(Y) \oplus \tilde{h}_n(Z) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(\text{pt})}_{=0} \longleftarrow \cdots$$

5.15. BEMERKUNG. Aufgrund der Symmetrie des Diagramms im Beweis von Satz 5.13 erhalten wir analog zur Mayer-Vietoris-Sequenz eine zweite Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(X) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_n(A \cap B) \xleftarrow{\partial-\partial} \tilde{h}_n(X/A) \oplus \tilde{h}_n(X/B) \xleftarrow{(p_*, -q_*)} \tilde{h}_n(X) \longleftarrow \cdots$$

Nun kann man sich überzeugen, dass  $X/(A \cap B) \cong (X/A) \vee (X/B)$ , indem man  $X/(A \cap B)$  als Pushout von  $A/(A \cap B)$  längs  $\text{pt} \rightarrow B/(A \cap B)$  schreibt. Dann entspricht die obige Sequenz nach Bemerkung 5.14 gerade der exakten Sequenz des Paares  $(X, A \cap B)$ . Aus ihrer Exaktheit schließen wir, dass auch die mittlere Raute im obigen Diagramm kommutiert.

5.16. BEMERKUNG. Nach Folgerung 5.11 bilden die stabilen Homotopiegruppen  $\pi_*^s$  einen Homologiefunktor, somit ist die Mayer-Vietoris-Sequenz für  $\pi_*^s$  exakt. Wenn ähnliche Zusammenhangsvoraussetzungen für die Paare  $(A, A \cap B)$  und  $(B, A \cap B)$  wie in Folgerung 3.66 gelten, existiert eine ähnliche endliche exakte Sequenz für die „instabilen“ Homotopiegruppen  $\pi_\bullet$ . Wir überlassen Konstruktion und Beweis dem Leser als Übung 5.90. Allerdings muss man für  $\pi_1$  aufpassen, da der Satz 2.42 von Seifert-van Kampen sich nur dann gut in die lange exakte Sequenz einfügt, wenn mindestens eine der Gruppen  $\pi_1(A)$ ,  $\pi_1(B)$  oder  $\pi_1(A \cap B)$  verschwindet.

5.17. SATZ. *Es sei  $\tilde{h}_\bullet$  ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor und  $k, n \in \mathbb{Z}$  mit  $n \geq 1$ . Dann existiert für jeden gut punktierten Raum  $X$  ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{h}_k(S^n X) \cong \tilde{h}_{k-n}(X). \quad (1)$$

Falls  $\tilde{h}_\bullet$  ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten  $M$  in  $\mathcal{C}$  ist, gilt insbesondere

$$\tilde{h}_k(S^n) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2)$$

Aussage (1) liefert für  $\tilde{h}_\bullet = \pi_*^s$  eine offensichtliche Folgerung aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.75.

Jetzt wird auch der Name „Dimensionsaxiom“ klar: ein reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten  $M \neq 0$  „sieht“ die Dimension der Sphären  $S^n$ . Daher lassen sich manche der Anwendungen des Satzes 3.42 von Brouwer-Hopf aus (2) folgern, beispielsweise der Fixpunktsatz 3.44 von Brouwer und der Satz 3.51 von der Invarianz der Dimension. Für den Satz 3.48 vom Igel benötigen wir zusätzlich den Abbildungsgrad, siehe Satz 5.18 unten.

BEWEIS. Diesen Beweis können wir entweder analog zum Satz 3.42 oder mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz führen. Wir entscheiden uns für Letzteres. Für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen. Für  $n \geq 1$  zerlegen wir  $S^n X$  in zwei reduzierte Kegel  $C_\pm^n X \cong (I, 0) \wedge \cdots \wedge (I, 0) \wedge X \cong D^n \wedge X$  mit Basispunkt auf dem Durchschnitt  $S^{n-1} X = C_+^n X \cap C_-^n X$ . Da  $(C_\pm^n X, S^{n-1} X)$  Kofaserungen sind und  $C_\pm^n X$  zusammenziehbar, erhalten wir mit Lemma 5.10 und Satz 5.13 die exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_{k-1}(C_+^n X) \oplus \tilde{h}_{k-1}(C_-^n X)}_{=0} \longleftarrow \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1} X) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_k(S^n X) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(C_+^n X) \oplus \tilde{h}_k(C_-^n X)}_{=0} \longleftarrow \cdots$$

Wir erhalten induktiv den gesuchten Isomorphismus

$$\tilde{h}_k(S^n X) \cong \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1} X) \cong \tilde{h}_{k-n}(X) .$$

Wenn  $\tilde{h}_\bullet$  ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten  $M$  in  $\mathcal{C}$  ist, folgt die zweite Behauptung aus der ersten und dem Dimensionsaxiom 5.9 (3).  $\square$

Wir betrachten jetzt stetige Abbildungen  $f: S^n \rightarrow S^n$ . Nach dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf und Übung 3.117 ist für alle  $n \geq 1$  der Abbildungsgrad aus Definition 3.45 ein Ringisomorphismus  $\deg: \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Wegen Homotopieinvarianz hängt  $f_*: \tilde{h}_k(S^n) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$  nur vom Abbildungsgrad  $\deg f$  ab. Für spätere Anwendungen ist die Charakterisierung des Abbildungsgrades für differenzierbare  $f$  aus Folgerung 3.91 hilfreich, bei der es reicht, die Urbilder eines regulären Wertes von  $f$  mit dem durch die jeweilige Orientierung von  $df$  gegebenen Vorzeichen zu zählen.

Da  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie ist, ist  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{h}(S^n), \tilde{h}(S^n))$  eine abelsche Gruppe, oder äquivalent ein  $\mathbb{Z}$ -Modul. Wir können also Elemente von  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{h}(S^n), \tilde{h}(S^n))$  mit ganzen Zahlen multiplizieren.

5.18. SATZ. Sei  $\tilde{h}_\bullet$  ein Homologiefunktor, und  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $f: S^m \rightarrow S^n$  seien stetig.

- (1) Falls  $m < n$ , gilt  $f_* = 0: \tilde{h}_k(S^m) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$ .
- (2) Falls  $m = n$ , gilt  $f_* = \deg f: \tilde{h}_k(S^n) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$ .
- (3) Falls  $m > n$  und falls  $\tilde{h}_\bullet$  das Dimensionsaxiom (3) erfüllt, gilt  $f_* = 0: \tilde{h}_k(S^m) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$ .

Insbesondere liefert dieser Satz eine weitere Charakterisierung des Abbildungsgrades. Allerdings können wir den Abbildungsgrad nur dann mit Hilfe von  $\tilde{h}_\bullet$  bestimmen, wenn  $\mathbb{Z}$  treu auf  $\tilde{h}_\bullet(S^0)$  wirkt. Das ist beispielsweise nicht der Fall, wenn  $\tilde{h}_\bullet$  ein gewöhnlicher Homologiefunktor mit Koeffizienten  $\mathbb{Z}/n$  ist für ein  $n \neq 0$ .

BEWEIS. Nach Satz 3.42 (1) ist  $f$  homotop zur konstanten Abbildung, falls  $m < n$ . In diesem Fall faktorisiert  $f_*$  über  $\tilde{h}_k(\text{pt}) = 0$ , und es folgt Behauptung (1).

Falls  $\tilde{h}_\bullet$  das Dimensionsaxiom erfüllt und  $m \neq n$ , gilt  $\tilde{h}_k(S^m) = 0$  oder  $\tilde{h}_k(S^n) = 0$ , und es folgt (3).

Zu (2) reicht es, zu zeigen, dass  $\tilde{h}: \pi_n(S^n) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(\tilde{h}_k(S^n))$  mit  $f \mapsto f_*$  ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist. Denn  $\deg \text{id}_{S^n} = 1$ , und wegen Folgerung 3.46 und Funktorialität folgt

$$f_* = (\deg f \cdot \text{id}_{S^n})_* = \deg f \cdot (\text{id}_{S^n})_* = \deg f .$$

Wegen des Summenaxioms (2) oder besser wegen Bemerkung 5.14 zur Mayer-Vietoris-Sequenz induzieren die Inklusionsabbildungen  $i, j: S^n \rightarrow S^n \vee S^n$  auf die einzelnen Summanden eine Identifikation

$$(i_* + j_*): \tilde{h}_k(S^n) \oplus \tilde{h}_k(S^n) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_k(S^n \vee S^n) \quad \text{mit} \quad (x, y) \mapsto i_*x + j_*y .$$

Mit der universellen Eigenschaft des Koproduktes erhalten wir zwei Abbildungen  $p, q: S^n \vee S^n \rightarrow S^n$ , die jeweils eine der beiden Sphären auf den Basispunkt kollabieren, so dass

$$p \circ i = q \circ j = \text{id}_{S^n} \quad \text{und} \quad p \circ j = q \circ i = 0 .$$

Wegen Funktorialität sind daher  $p_*$  und  $q_*: \tilde{h}_k(S^n) \oplus \tilde{h}_k(S^n) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$  gerade die Projektionen auf die beiden direkten Summanden.

Es sei  $S^{n-1} \subset S^n$  der Äquator, der auch den Basispunkt enthalte. Wir betrachten die Quotientenabbildung

$$d: S^n \longrightarrow S^n/S^{n-1} \cong S^n \vee S^n .$$

Da  $p \circ d$  und  $q \circ d$  homotop zu  $\text{id}_{S^n}$  sind, folgt  $p_* \circ d_* = q_* \circ d_* = \text{id}_{\tilde{h}_k(S^n)}$ , also ist  $d_*$  die Diagonalabbildung

$$d_*: \tilde{h}_k(S^n) \longrightarrow \tilde{h}_k(S^n) \oplus \tilde{h}_k(S^n) \quad \text{mit} \quad d_*x = (x, x) .$$

Es seien jetzt  $f, g \in \pi_n(S^n)$  gegeben. Nach der universellen Eigenschaft des Koproduktes existiert eine Abbildung  $f \vee g: S^n \vee S^n \rightarrow S^n$ , so dass  $(f \vee g) \circ i = f$  und  $(f \vee g) \circ j = g$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (f \vee g)_*(x, 0) &= (f \vee g)_*(i_*x) = ((f \vee g) \circ i)_*x = f_*x \\ \text{und} \quad (f \vee g)_*(0, y) &= (f \vee g)_*(j_*y) = ((f \vee g) \circ j)_*y = g_*y, \\ \text{also} \quad (f \vee g)_*(x, y) &= (f \vee g)_*(x, 0) + (f \vee g)_*(0, y) = f_*x + g_*y. \end{aligned}$$

Indem wir  $S^n$  mit  $I^n/\partial I^n$  identifizieren, sehen wir mit Definition 3.1, dass

$$(f \vee g) \circ d = (f + g): S^n \rightarrow S^n.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$(f + g)_*(x) = (f \vee g)_*(d_*x) = (f \vee g)_*(x, x) = f_*x + g_*x = (f_* + g_*)(x).$$

Also ist  $\tilde{h}: \pi_n(S^n) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(\tilde{h}_k(S^n))$  tatsächlich ein Homomorphismus, was noch zu zeigen war.  $\square$

5.19. BEMERKUNG. Aussage (3) gilt nicht für allgemeine Homologiefunktoren. Dazu betrachten wir wieder  $\pi_{\bullet}^s$ . Es sei  $f: S^3 \rightarrow S^2$  die Hopf-Faserung. Aus Satz 3.101 wissen wir, dass  $0 \neq [f] \in \pi_3^s(S^2) = \pi_1^s(S^0)$ . Außerdem sei  $1 = [\text{id}_{S^3}] \in \pi_0^s(S^0)$ . Es folgt

$$f_*(1) = f_*[\text{id}_{S^3}] = [f \circ \text{id}_{S^3}] = [f] \neq 0 \in \pi_3^s(S^2).$$

### 5.c. Zelluläre Homologie

Wir zeigen, dass sich die (gewöhnliche) Homologie  $\tilde{h}_{\bullet}$  von CW-Komplexen allein aus den Koeffizienten  $\tilde{h}_{\bullet}(S^0)$  und gewissen Daten der CW-Struktur berechnen lässt. Dieses Ergebnis ist aus zwei Gründen interessant:

- Es zeigt, dass die Eilenberg-Steenrod-Axiome gewöhnliche Homologiefunktoren auf der Unterkategorie der CW-Komplexe bereits vollständig festlegen;
- Für einfach konstruierte Räume erhalten wir sehr effizientes Verfahren zur Bestimmung der Homologiegruppen.

Alle Überlegungen in diesem Abschnitt gelten für gewöhnliche Homologiefunktoren mit Werten in einer beliebigen abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ .

Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen. Im folgenden sei  $\tilde{h}_{\bullet}$  stets ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten  $M = \tilde{h}_0(S^0)$  in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ . Wir fixieren Homöomorphismen  $D^n/S^{n-1} \cong S^n$  und benutzen die Isomorphismen

$$\partial_n: \tilde{h}_n(S^n) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$$

aus dem Beweis von Satz 5.17, um induktiv  $\tilde{h}_n(S^n)$  mit  $\tilde{h}_0(S^0) = M$  zu identifizieren.

Sei  $(X, \{x_0\})$  ein CW-Paar wie in Definition 4.17 mit den  $n$ -Gerüsten  $X^n$  für  $n \geq -1$  und den Indexmengen  $J^n$  für die  $n$ -Zellen für  $n \geq 0$ . Insbesondere gilt  $X^{-1} = \{x_0\}$  und  $X^0 \cong J^0 \sqcup \{x_0\}$ . Wir schreiben

$$M^{\oplus J^n} = \bigoplus_{j \in J^n} M \quad \text{und} \quad \sum_{j \in J^n} a_j e_j^n = (a_j)_{j \in J^n} \in M^{\oplus J^n},$$

wobei wir verlangen, dass  $a_j = 0$  außer für endlich viele  $j \in J^n$ .

Es seien  $\Phi_j^n$  die charakteristischen Abbildungen von  $X$  für  $j \in J^n$ . Für  $n > 0$  fassen wir  $\Phi_j^n$  als Abbildung von Paaren  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$  auf und bezeichnen die induzierte punktierte Abbildung auf den Quotienten mit  $\bar{\Phi}_j^n: S^n \rightarrow X^n/X^{n-1}$ . Für  $n = 0$  fixieren wir einen Punkt von  $S^0$  als Basispunkt. Für  $j \in J^0$  bezeichne  $\bar{\Phi}_j^0: S^0 \rightarrow X^0 = X^0/X^{-1}$  die punktierte Abbildung, die den anderen Punkt von  $S^0$  auf  $e_j^0 \in X^0 \setminus \{x_0\}$  abbildet.

5.20. LEMMA. Es sei  $k \in \mathbb{Z}$  und  $n \geq 0$ . Wir erhalten natürliche Isomorphismen

$$M^{\oplus J^n} \cong \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \quad \text{mit} \quad a_j e_j^n \mapsto \tilde{h}_n \bar{\Phi}_j^n(a_j) \quad \text{für alle } j \in J^n, \quad (1)$$

$$0 \cong \tilde{h}_k(X^n/X^{n-1}) \quad \text{falls } k \neq n, \quad (2)$$

$$0 \cong \tilde{h}_k(X^n) \quad \text{falls } k > n, \quad (3)$$

$$\text{und} \quad \tilde{h}_k(X) \cong \tilde{h}_k(X^n) \quad \text{falls } n > k. \quad (4)$$

BEWEIS. Für  $n = 0$  schreiben wir

$$X^0 = \bigvee_{i \in J^0} S^0$$

mit gemeinsamem Basispunkt  $x_0$ , und erhalten

$$\tilde{h}_k(X^0/X^{-1}) = \tilde{h}_k(X^0) = \bigoplus_{j \in J^0} \tilde{h}_k(S^0) = \begin{cases} M^{\oplus J^0} & \text{für } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } k \neq 0. \end{cases}$$

aus dem Summenaxiom (2) und dem Dimensionsaxiom (3) aus Definition 5.9.

Für  $n > 0$  erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j \in J^n} (D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\bigcup_{j \in J^n} \Phi_j^n} & X^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigvee_{j \in J^n} S^n & \xrightarrow{\bigvee_{j \in J^n} \bar{\Phi}_j^n} & X^n/X^{n-1}. \end{array}$$

und die Abbildung  $\bigvee_j \bar{\Phi}_j^n$  ist ein Homöomorphismus. Die Behauptungen (1) und (2) folgen jetzt wieder aus dem Summenaxiom und aus Satz 5.17.

Punkt (3) folgt aus (2) für  $n = 0$  und ergibt sich für  $n > 0$  induktiv aus der langen exakten Sequenz des Paares  $(X^n, X^{n-1})$  aus Axiom (1) und Behauptung (2) für  $k > n$ , da

$$\dots \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^n/X^{n-1})}_{\cong 0} \leftarrow \tilde{h}_k(X^n) \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^{n-1})}_{\cong 0} \leftarrow \dots$$

Behauptung (4) folgt aus der langen exakten Sequenz des Paares  $(X, X^n)$ , wenn wir zeigen können, dass  $\tilde{h}_k(X/X_n) \cong 0$  für alle  $k \leq n$ , denn für  $k < n$  erhalten wir dann

$$\dots \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X/X_n)}_{\cong 0} \leftarrow \tilde{h}_k(X) \leftarrow \tilde{h}_k(X_n) \xleftarrow{\partial} \underbrace{\tilde{h}_{k+1}(X/X_n)}_{\cong 0} \leftarrow \dots$$

Der Raum  $Y = X/X^n$  ist wieder ein CW-Komplex mit  $Y^0 = \dots = Y^n = X^{-1} = \{*\}$  und mit charakteristischen Abbildungen  $p \circ \Phi_j^m$  für  $m > n$  und  $j \in J^m$ , wobei  $p: X \rightarrow Y$  die Projektion auf den Quotienten bezeichne. Für  $k \leq n$  gilt also  $\tilde{h}_k(Y^0) = \dots = \tilde{h}_k(Y^n) \cong 0$ . Für  $m > n$  folgt aus der langen exakten Sequenz

$$\dots \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(Y^m/Y^{m-1})}_{\cong 0} \leftarrow \tilde{h}_k(Y^m) \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(Y^{m-1})}_{\cong 0} \leftarrow \dots$$

des Paares  $(Y^m, Y^{m-1})$  mit (2) induktiv, dass  $\tilde{h}_k(Y^m) \cong 0$  für alle  $m \in \mathbb{Z}$ . Damir haben wir (4) bewiesen, falls  $X = X^m$  endlich dimensional ist.

Im allgemeinen Fall betrachten wir das *Teleskop*

$$Z = \bigcup_{m=0}^{\infty} Y^m \times [m, \infty) \subset Y \times [0, \infty)$$







für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Man definiert Objekte  $B_n(C_\bullet, d_\bullet) \subset Z_n(C_\bullet, d_\bullet) \subset C_n$  und  $H_n(C_\bullet, d_\bullet)$  in  $\mathcal{C}$  durch

$$\begin{aligned} Z_n(C_\bullet, d_\bullet) &= \ker d_n, \\ B_n(C_\bullet, d_\bullet) &= \operatorname{im} d_{n+1} \\ \text{und} \quad H_n(C_\bullet, d_\bullet) &= Z_n(C_\bullet, d_\bullet) / B_n(C_\bullet, d_\bullet). \end{aligned}$$

Elemente von  $C_n, Z_n(C_\bullet, d_\bullet)$  und  $B_n(C_\bullet, d_\bullet)$  heißen  $n$ -Ketten,  $n$ -Zykel beziehungsweise  $n$ -Ränder des Komplexes. Das Objekt  $H_n(C_\bullet, d_\bullet)$  heißt die  $n$ -te Homologie des Komplexes.

Eine Kettenabbildung  $f_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$  vom Grad  $a$  ist eine Sequenzabbildung vom Grad  $a$ . Die induzierten Abbildungen zwischen den Homologien bezeichnet man mit

$$H_n f_\bullet = f_*: H_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow H_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet).$$

Man überlegt sich leicht, dass sich jede Kettenabbildung  $f_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$  zu Abbildungen

$$Z_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow Z_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet) \quad \text{und} \quad B_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow B_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet)$$

einschränken lässt, so dass die Abbildung  $f_*$  tatsächlich wohldefiniert ist. Die Kettenkomplexe in  $\mathcal{C}$  bilden eine Kategorie  $\mathcal{Ch}_{\mathcal{C}}$  mit den Kettenabbildungen als Morphismen, und die  $n$ -te Homologie ist ein Funktor  $H_n: \mathcal{Ch}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ . Im Falle von  $\mathbb{k}$ -Vektorräumen oder  $R$ -Moduln schreiben wir anstelle von  $\mathcal{Ch}_{\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}}$  und  $\mathcal{Ch}_{\mathcal{M}od_R}$  kurz  $\mathcal{Ch}_{\mathbb{k}}$  beziehungsweise  $\mathcal{Ch}_R$ .

Wir verwenden im Folgenden Kleinbuchstaben  $\tilde{h}$  für (reduzierte) Homologiefunktoren im Sinne der Eilenberg-Steenrod-Axiome 5.9 und Großbuchstaben für die Homologie von Kettenkomplexen.

Nach unseren obigen Überlegungen ist  $\tilde{h}_k(X)$  zur Homologie eines Kettenkomplexes  $(\tilde{C}_\bullet^{CW}, d_\bullet^{CW})$  isomorph. Wir identifizieren  $\tilde{C}_n^{CW}(X; M) = \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1})$  mit  $M^{\oplus J^n}$  wie in Lemma 5.20 (1). Als nächstes suchen wir eine explizite Formel für den Randoperator  $d_n^{CW}: M^{\oplus J^n} \rightarrow M^{\oplus J^{n-1}}$ . Wir betrachten dazu für  $j \in J^n$  die Projektionsabbildung

$$q_j^n: X^n/X^{n-1} \longrightarrow X^n / \left( X^{n-1} \cup \bigcup_{i \in J^n \setminus \{j\}} e_i^n \right) \xrightarrow{(\bar{\Phi}_j^n)^{-1}} S^n.$$

Ähnlich wie im Beweis von Satz 5.18 gilt

$$q_j^n \circ \bar{\Phi}_i^n = \begin{cases} \operatorname{id}_{S^n} & \text{falls } i = j \in J^n, \text{ und} \\ \text{konstant} & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$

und für  $\sum_{i \in J^n} a_i e_i^n \in M^{\oplus J^n} = \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1})$  folgt

$$(q_j^n)_* \sum_{i \in J^n} a_i e_i^n = \sum_{i \in J^n} (q_j^n \circ \bar{\Phi}_i^n)_*(a_i) = a_j \in M.$$

Wir betrachten die Paarabbildungen  $\Phi_i^n: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$  und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{(f_{ij}^n)_*} & \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow[\cong]{\partial^n} & \tilde{h}_n(S^n) \\ (q_j^{n-1})_* \uparrow & & (\varphi_i^n)_* \downarrow & & (\bar{\Phi}_i^n)_* \downarrow \\ \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xleftarrow[p_*^{n-1}]{} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & \xleftarrow[\partial^n]{} & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \end{array}$$

für  $i \in J^n, j \in J^{n-1}$  mit  $f_{ji}^n = q_j^{n-1} \circ p^{n-1} \circ \varphi_i^n: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Dabei kommutiert das rechte Quadrat wegen der Natürlichkeit von  $\partial_n$ , und das linke nach Definition von  $f_{ji}^n$ . Nach Satz 5.18 (2) operiert  $(f_{ji}^n)_*$  auf  $M = \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$  durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad  $d_{ij}^n = \deg f_{ji}^n$ .

Insgesamt wird der zelluläre Randoperator  $d_n^{\text{CW}}$  für  $n \geq 2$  also durch die Matrix

$$d_n^{\text{CW}} = (d_{ji}^n)_{j,i} \in M_{J^{n-1}, J^n}(\mathbb{Z}) \subset \text{hom}_R(M^{\oplus J^n}, M^{\oplus J^{n-1}})$$

beschrieben. Die Koeffizienten  $d_{ji}^n$  dieser Matrix heißen auch die *Inzidenzzahlen* von  $X$ . Man beachte, dass  $S^{n-1}$  kompakt ist und  $\varphi_i^n$  nach Bemerkung 1.51 (2) und Satz 1.86 (siehe auch Proposition 4.18) daher nur endlich viele Zellen  $e_j^{n-1}$  trifft, so dass  $e_i^n \in M \cong \text{im}(\tilde{h}_n \bar{\Phi}_i^n)$  auf eine endliche Linearkombination, also ein Element der direkten Summe  $M^{\oplus J^{n-1}}$  abgebildet wird. Man beachte, dass der reduzierte Homologiefunktor  $\tilde{h}_\bullet$  in dieser Beschreibung des reduzierten zellulären Kettenkomplexes überhaupt nicht mehr auftaucht. Das liegt an Folgerung 3.46 aus dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf, sowie an Satz 5.18.

5.22. DEFINITION. Es sei  $X$  ein CW-Komplex und  $M$  Objekt in  $\mathcal{C}$ . Der *reduzierte zelluläre Kettenkomplex* von  $X$  mit Koeffizienten  $M$  ist definiert als  $(\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M), d_\bullet^{\text{CW}})$  mit  $\tilde{C}_n^{\text{CW}} = M^{\oplus J^n}$  und

$$d_n^{\text{CW}} \sum_{i \in J^n} a_i e_i^n = \sum_{j \in J^{n-1}} \sum_{i \in J^n} \text{deg}(q_j^{n-1} \circ p^{n-1} \circ \varphi_i^n) a_i e_j^{n-1} = \sum_{j \in J^{n-1}} \sum_{i \in J^n} d_{ji}^n a_i \cdot e_j^{n-1}.$$

Die Homologie  $\tilde{H}_\bullet^{\text{CW}}(X; M) = H_\bullet(\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M), d_\bullet^{\text{CW}})$  dieses Komplexes heißt die *reduzierte zelluläre Homologie* von  $X$  mit Koeffizienten in  $M$ .

Wir erinnern uns an die Definitionen 1.88 und 4.23 zellulärer Abbildungen zwischen CW-Komplexen. Die CW-Komplexe mit den zellulären Abbildungen bilden eine Kategorie  $\mathcal{CW}$ .

Es sei  $Y$  ein CW-Komplex mit  $\tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1}) = M^{\oplus K^n}$ . Eine zelluläre Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  induziert Abbildungen  $\tilde{f}^n: X^n/X^{n-1} \rightarrow Y^n/Y^{n-1}$ , also auch Abbildungen  $f_{\#n} = \tilde{f}_*^n: M^{\oplus J^n} \rightarrow M^{\oplus K^n}$  für alle  $n$ . Mit einem ähnlichen Argument wie oben sieht man, dass

$$f_{\#n} \sum_{j \in J^n} a_j e_j^n = \sum_{j \in J^n} \sum_{k \in K^n} \text{deg}(q_k^n \circ \tilde{f}^n \circ \bar{\Phi}_j^n) a_j e_k^n.$$

Die Familie  $f_{\#\bullet}$  ist eine Kettenabbildung vom Grad 0, da das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xleftarrow{p_*^{n-1}} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \\ \tilde{f}_*^{n-1} \downarrow & & \tilde{f}_*^{n-1} \downarrow & & \tilde{f}_*^n \downarrow \\ \tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}/Y^{n-2}) & \xleftarrow{p_*^{n-1}} & \tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1}) \end{array}$$

kommutiert. Wir bezeichnen die induzierten Abbildungen mit

$$f_*^{\text{CW}} = \tilde{H}^{\text{CW}} f_n: \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(Y; M).$$

5.23. SATZ (Zelluläre Homologie). Sei  $M$  Objekt einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  und  $n \in \mathbb{Z}$ .

- (1) Die  $n$ -te reduzierte zelluläre Homologie mit Koeffizienten  $M$  ist ein Funktor  $\tilde{H}_n^{\text{CW}}(\cdot; M): \mathcal{CW} \rightarrow \mathcal{C}$ .
- (2) Für jeden reduzierten Homologiefunktor  $\tilde{h}_n$  mit Koeffizienten  $M$  existiert ein natürlicher Isomorphismus  $\tilde{h}_n|_{\mathcal{CW}} \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(\cdot; M)$ .

Eine ähnliche Beschreibung können wir auch für den Randoperator  $\partial$  aus Definition 5.9 angeben. Da wir zur Definition des reduzierten zellulären Kettenkomplexes einen Basispunkt  $x_0$  wählen mussten, sieht es zunächst so aus, als würde  $\tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$  von dieser Wahl abhängen. Ähnlich wie in Bemerkung 5.12 (1) können wir zeigen, dass es in Wirklichkeit nicht auf  $x_0$  ankommt, siehe auch Bemerkung 5.30 (2) unten.

BEWEIS. Wir haben zu jeder zellulären Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine induzierte Abbildung  $f_*^{\text{CW}}: \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(Y; M)$  konstruiert. Funktorialität (1) folgt, da  $h_n \bar{\text{id}}_n = h_n \text{id} = \text{id}$  und

$$(f \circ g)_*^{\text{CW}} = \tilde{h}_n(\overline{f \circ g})_n = \tilde{h}_n(\bar{f}_n \circ \bar{g}_n) = \tilde{h}_n \bar{f}_n \circ \tilde{h}_n \bar{g}_n = f_*^{\text{CW}} \circ g_*^{\text{CW}}.$$

Wir haben oben Isomorphismen

$$\tilde{h}_n(X) \leftarrow \tilde{h}_n(X^n) / \text{im } \partial_{n+1} \longrightarrow \text{im } \tilde{h}_n p^n / \text{im}(\tilde{h}_n p^n \circ \partial_{n+1}) = \ker d_n / \text{im } d_{n+1} = \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$$

konstruiert, die alle von natürlichen Abbildungen zwischen Homologiemoduln induziert werden. Also ist auch der zusammengesetzte Isomorphismus  $\tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$  natürlich, und es folgt (2).  $\square$

5.24. BEMERKUNG. Wir können uns zelluläre Homologie vereinfacht wie folgt vorstellen. Jede  $n$ -Zelle ist ein  $n$ -dimensionales Objekt in  $X$  mit einem  $(n-1)$ -dimensionalen Rand, und Ketten  $c \in \tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; M)$  sind  $M$ -Linearkombinationen davon. Den Rand  $d_n^{\text{CW}} c$  einer solchen Kette  $c$  schreiben wir wieder als  $M$ -Linearkombination von  $(n-1)$ -Zellen, dabei hängen die Vorzeichen von einer Art „Orientierung“ auf dem Rand ab, siehe Folgerung 3.91. Wenn also der Rand von  $c$  eine bestimmte Zelle  $a$ -mal „richtig herum“ und  $b$ -mal „falsch herum“ trifft, dann kommt diese Zelle  $(a-b)$ -mal in  $d_n^{\text{CW}} c$  vor.

Ketten  $c$  mit Rand  $d_n^{\text{CW}} c = 0$  heißen Zykel. Wir stellen sie uns als „geschlossene“  $n$ -dimensionale Objekte in  $X$  vor. Jeder Zykel repräsentiert ein „Loch“ in  $X^n$ . Wenn dieses Loch in  $X^{n+1}$  von einer Kette  $b \in C_{n+1}^{\text{CW}}(X; M)$  „gestopft“ wird, das heißt, wenn  $c = d_{n+1}^{\text{CW}} b$ , vergessen wir es. Alle anderen Löcher bleiben nach Lemma 5.20 (4) dann auch in  $X$  „ungestopft“. Somit dürfen wir uns  $\tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$  als Menge der Linearkombinationen von Löchern in  $X$  vorstellen. Man vergleiche das mit der Beschreibung des gerahmten Bordismus in Bemerkung 3.98.

Ein Beispiel ist das Loch in der Mitte der  $n$ -Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , das sich nach den Sätzen 5.17 und 5.23 dadurch manifestiert, dass  $H_n^{\text{CW}}(S^n) \cong M$ . Allerdings sehen wir dieses Loch erst „mit bloßem Auge“, wenn wir  $S^n$  in den  $\mathbb{R}^{n+1}$  einbetten, während die Homologie es immer findet.

5.25. BEISPIEL. Die reduzierte zelluläre Homologie lässt sich besonders einfach berechnen, wenn der zelluläre Randoperator  $d_n^{\text{CW}}$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  verschwindet. Das passiert etwa dann, wenn  $X$  keine Zellen in aufeinanderfolgenden Dimensionen hat. Ein Beispiel sind die komplex und quaternionisch projektiven Räume aus den Übungen 1.129 und 1.130, siehe Übung 5.91.

5.26. BEISPIEL. Wir betrachten jetzt den reell projektiven Raum  $X = \mathbb{R}P^n$  mit der CW-Struktur aus Übung 1.130. Dann existiert neben  $\{x_0\} = \mathbb{R}P^0$  genau eine Zelle  $e^k$  in jeder Dimension  $1 \leq k \leq n$ , und die Verklebeabbildung ist die Projektion

$$\varphi^k: S^{n-1} \rightarrow X^{k-1} = \mathbb{R}P^{k-1} = S^{n-1} / \{1, -1\}.$$

Dabei wird der Äquator  $S^{k-2}$  gerade auf den Unterkomplex  $X^{k-2} = \mathbb{R}P^{k-2}$  abgebildet. Ähnlich wie bei der Konstruktion der „Summe“ stetiger Abbildungen erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^{k-1} & \longrightarrow & S^{k-1}/S^{k-2} & \xrightarrow{\cong} & S^{k-1} \vee S^{k-1} \\ \varphi^k \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi_+^k \vee \varphi_-^k \\ \mathbb{R}P^{k-1} & \xrightarrow{p^{k-1}} & \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} & \xrightarrow[\cong]{q^{k-1}} & S^{k-1} \end{array}.$$

Also gilt  $[q^{k-1} \circ \varphi^k] = [\varphi_+^k] + [\varphi_-^k] \in \pi_{k-1}(\mathbb{R}P^{k-1})$ ; hierbei werden  $\varphi_{\pm}^k: S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$  durch die Einschränkung von  $q^{k-1} \circ \varphi^k$  auf je eine der beiden Halbkugeln induziert. Da  $\varphi_-^k = \varphi_+^k \circ (-\text{id})$  nach

Konstruktion, folgt aus Beispiel 3.47 bei geeigneter Wahl der Verklebeabbildungen, dass

$$d_k^{\text{CW}} = \deg(q^{k-1} \circ \varphi^k) = 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

- (1) Wir wählen  $\mathbb{Z}$  in der Kategorie  $\mathcal{A}b \cong \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$  als Koeffizienten. Für gerade  $n$  und erhalten wir in den Graden 0 bis  $n$  den reduzierten zellulären Kettenkomplex

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{2} \mathbb{Z}$$

für ungerade  $n$  hingegen

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z},$$

und daher

$$\tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = n \text{ ungerade, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier taucht gelegentlich der Modul  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  auf. Im Sinne von Bemerkung 5.24 beschreibt das Element  $0 \neq c \in \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ein „Loch“ in  $\mathbb{R}P^k$ , das in  $\mathbb{R}P^{k+1}$  nicht gestopft wird; erst das zweimal umlaufene Loch  $2c$  tritt als Rand einer  $(k+1)$ -Kette auf.

- (2) Wir bleiben in der Kategorie  $\mathcal{A}b$  und wählen  $\mathbb{Z}/2$  als Koeffizienten. Da  $2 \equiv 0$  in  $\mathbb{Z}/2$ , verschwindet der Randoperator komplett, und wir erhalten

$$\tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } 0 < k \leq n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten in der Kategorie  $\text{Vec}_{\mathbb{Z}/2}$ . Wir sehen also modulo 2 mehr „Löcher“ als über  $\mathbb{Z}$ .

- (3) Es sei jetzt  $\mathbb{k}$  ein Körper der Charakteristik  $\neq 2$ . Dann ist Multiplikation mit 2 invertierbar. Sowohl in der Kategorie  $\mathcal{A}b$  als auch in  $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$  erhalten wir daher nur noch

$$\tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) \cong \begin{cases} \mathbb{k} & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

5.27. DEFINITION. Es sei  $\mathbb{k}$  ein Körper,  $\tilde{h}_\bullet$  ein reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten  $\mathbb{k}$  und  $X$  ein topologischer Raum, dann heißen die Dimensionen  $\tilde{b}_k(X; \mathbb{k}) = \dim_{\mathbb{k}} \tilde{h}_k(X) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  der Homologie-Vektorräume von  $X$  die (reduzierten) *Betti-Zahlen* von  $X$  über  $\mathbb{k}$ . Falls alle Betti-Zahlen endlich sind und fast alle verschwinden, ist die *Euler-Zahl* oder *Euler-Charakteristik* von  $X$  definiert als

$$\chi(X) = 1 + \sum_k (-1)^k \tilde{b}_k(X; \mathbb{k}).$$

Die Betti-Zahlen von  $X$  hängen im allgemeinen vom gewählten reduzierten Homologiefunktor  $\tilde{h}_\bullet$  ab. Nach Satz 5.23 hängen sie nur von  $\mathbb{k}$  ab, genauer von seiner Charakteristik, wenn  $X$  ein CW-Komplex ist. Aber selbst für CW-Komplexe können verschiedene Körper unterschiedliche Betti-Zahlen liefern, siehe Beispiel 5.26. Die Euler-Zahl hängt zumindest für kompakte CW-Komplexe nicht von  $\mathbb{k}$  ab, wie der folgende Satz zeigt. Dazu beachten wir, dass CW-Komplexe nach Satz 1.86 genau dann kompakt sind, wenn sie insgesamt nur aus endlich vielen Zellen bestehen.

5.28. SATZ. Sei  $\mathbb{k}$  ein Körper und  $X = X^n$  ein punktierter CW-Komplex mit endlich vielen Zellen in jeder Dimension  $k$  und  $\tilde{c}_k(X) = \#J^k < \infty$ . Für alle  $m$  gilt

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \tilde{c}_k(X) \geq \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \tilde{b}_k(X, \mathbb{k}), \quad (1)$$

$$\tilde{c}_m(X) \geq \tilde{b}_m(X, \mathbb{k}), \quad (2)$$

$$\chi(X) = 1 + \sum_k (-1)^k \tilde{c}_k(X) \quad \text{falls } X \text{ kompakt ist.} \quad (3)$$

Nach Definition 4.17 wird der Basispunkt nicht als 0-Zelle gezählt, da  $X^{-1} = \{x_0\}$ .

BEWEIS. Man leitet (1) aus den Dimensionsformeln für  $\mathbb{k}$ -Vektorräume ab. Sei etwa  $U \subset V$  ein Untervektorraum und  $f: V \rightarrow W$  linear, dann gilt

$$\dim_{\mathbb{k}} U + \dim_{\mathbb{k}}(V/U) = \dim_{\mathbb{k}} V \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{k}} V = \dim_{\mathbb{k}} \ker f + \dim_{\mathbb{k}} \operatorname{im} f.$$

Die Ungleichungen (2) und die Gleichung (3) folgen aus (1). Die Details sind Übung 5.93.  $\square$

5.29. BEISPIEL. Für die 2-Sphäre erhalten wir  $\chi(S^2) = 2$ , da die übliche CW-Struktur nur aus  $x_0$  und einer 2-Zelle besteht. Die Oberfläche eines konvexen Polyeders im  $\mathbb{R}^3$  liefert eine andere CW-Struktur  $X$  auf  $S^2$  mit  $e = 1 + \tilde{c}_0(X) = \#I^0$  „Ecken“,  $k = \tilde{c}_1(X)$  „Kanten“ und  $f = \tilde{c}_2(X)$  „Flächen“. Wir erhalten den Eulerschen Polyedersatz

$$2 = e + f - k.$$

5.30. BEMERKUNG. Um Verwirrung zu vermeiden, bezeichnen wir den Randoperator im reduzierten zellulären Kettenkomplex jetzt mit  $\tilde{d}_{\bullet}^{\text{CW}}$ . In der Konstruktion von  $(\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M), \tilde{d}_{\bullet}^{\text{CW}})$  spielt der Basispunkt  $x_0 = e_{i_0}^0$  eine Sonderrolle. Wir betrachten daher zwei weitere verwandte Kettenkomplexe.

- (1) Der (unreduzierte) zelluläre Kettenkomplex  $(C_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M), d_{\bullet}^{\text{CW}})$  ist definiert als  $C_n^{\text{CW}}(X; M) = \tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; M)$  für  $n \neq 0$  und  $C_0^{\text{CW}}(X; M) = M^{\oplus X^0}$ , sowie

$$d_n^{\text{CW}} \sum_{i \in I^n} a_i e_i^n = \begin{cases} \sum_{i \in I^n} \sum_{j \in J^{n-1}} d_{ji}^n a_i e_j^{n-1} & \text{für } n \neq 1, \\ \sum_{i \in I^1} \sum_{j \in J^0} d_{ji}^1 a_i (e_j^0 - e_{i_0}^0) & \text{für } n = 1. \end{cases}$$

Er hängt nicht von der Wahl von  $i_0$  ab, siehe Übung 5.94 (1), und unterscheidet sich nur in  $C_0^{\text{CW}}$  und  $d_1^{\text{CW}}$  vom reduzierten zellulären Kettenkomplex. Seine Homologie heißt (unreduzierte) zelluläre Homologie  $H_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M)$  mit Koeffizienten  $M$ .

- (2) Der augmentierte zelluläre Kettenkomplex  $(\bar{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M), \bar{d}_{\bullet}^{\text{CW}})$  unterscheidet sich vom unreduzierten zellulären Kettenkomplex nur durch

$$\bar{C}_{-1}^{\text{CW}}(X; M) = M \quad \text{und} \quad \bar{d}_0^{\text{CW}} \sum_{i \in I^0} a_i e_i^0 = \sum_{i \in I^0} a_i.$$

Die Abbildung  $\bar{d}_0^{\text{CW}}$  heißt Augmentierung und wird mit  $\varepsilon$  bezeichnet.

Für die zugehörigen Homologien erhält man natürliche Isomorphismen

$$H_n^{\text{CW}}(X; M) \cong \bar{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \cong \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \quad \text{für alle } n \neq 0.$$

Für  $n = 0$  erhält man einen natürlichen Isomorphismus  $\bar{H}_0^{\text{CW}}(X; M) \cong \tilde{H}_0^{\text{CW}}(X; M)$  und eine natürliche kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \bar{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \hookrightarrow H_0^{\text{CW}}(X; M) \twoheadrightarrow M \longrightarrow 0,$$

vergleiche Bemerkung 5.12 (1). Die Sequenz spaltet erst nach Wahl eines Basispunktes  $x_0 \in X^0$ , der Isomorphismus  $\tilde{H}_0^{\text{CW}}(X; M) \cong M \oplus \tilde{H}_0^{\text{CW}}(X; M)$  ist daher nicht natürlich, siehe 5.12 (3) und Übung 5.94 (1). Da der augmentierte Kettenkomplex die gleiche Homologie wie der reduzierte Kettenkomplex liefert, aber keine Basispunkte benötigt, definiert man die reduzierte zelluläre Homologie später lieber als die Homologie des augmentierten Kettenkomplexes.

### 5.d. Homologiefunktoren und Spektren

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass gewöhnliche Homologiefunktoren auf CW-Komplexen eindeutig bestimmt und (prinzipiell) mittels Kettenkomplexen berechenbar sind. Es bleibt die Existenz solcher Funktoren zu zeigen. In diesem Abschnitt geben wir eine Konstruktion allgemeiner Homologiefunktoren mit Hilfe von Spektren an. Wir arbeiten zumindest am Anfang mit beliebigen abelschen Kategorien, später gehen wir aus technischen Gründen zu Kategorien von Moduln über.

Als erstes führen wir noch ein weiteres Axiom ein, das es uns später dann mit Hilfe des CW-Approximationssatzes 4.32 erlaubt, viele Berechnungen und Beweise auf CW-Komplexe zurückzuführen. Wir erinnern uns dazu an den Begriff der schwachen Äquivalenz aus Definition 4.26. Wir nennen einen Raum  $Z$  *schwach zusammenziehbar*, wenn  $\pi_k(Z) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

5.31. DEFINITION. Ein Homologiefunktor  $\tilde{h}_\bullet$  heißt *invariant unter schwachen Äquivalenzen*, wenn

$$\tilde{h}_n(Z) = 0$$

für alle schwach zusammenziehbaren Räume  $Z$  gilt.

5.32. BEMERKUNG. Diesen Begriff erklärt folgende Beobachtung.

- (1) Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine schwache Äquivalenz, und es sei  $Cf = Zf/X$  ihr Abbildungskegel. Wir dürfen annehmen, dass  $X$  und  $Y$  wegzusammenhängend sind, andernfalls betrachten wir  $f$  für jede Wegzusammenhangskomponente einzeln. Der Abbildungszylinder  $Zf$  enthält  $Y$  als Deformationsretrakt. Da  $f$  schwache Äquivalenz ist, ist die Inklusion  $X \rightarrow Zf$  eine  $p$ -zusammenhängende Abbildung für alle  $p$ . Daher liefert Folgerung 3.71 für das Paar  $(Zf, X)$  eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(Zf) \xleftarrow{\cong} \pi_{k-1}(X) \xleftarrow{\partial} \pi_k(Cf) \longleftarrow \pi_k(Zf) \xleftarrow{\cong} \pi_k(X) \longleftarrow \cdots,$$

insbesondere ist  $Cf$  schwach zusammenziehbar. Wenn  $\tilde{h}_\bullet$  invariant unter schwachen Äquivalenzen ist, betrachten wir die lange exakte  $\tilde{h}_\bullet$ -Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(Cf)}_{=0} \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(Zf)}_{\cong \tilde{h}_n(Y)} \longleftarrow \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{\partial} \underbrace{\tilde{h}_{n+1}(Cf)}_{=0} \longleftarrow \cdots$$

des Paares  $(Zf, X)$  aus Definition 5.9 (1), und erhalten für alle  $n \in \mathbb{Z}$  Isomorphismen

$$f_*: \tilde{h}_n(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n(Y).$$

- (2) Die stabilen Homotopiegruppen bilden nach Folgerung 5.11 einen allgemeinen Homologiefunktor  $\pi_\bullet^s$ . Wegen Folgerung 3.79 ist  $\pi_\bullet^s$  invariant unter schwachen Äquivalenzen.

Für den nächsten Schritt erinnern wir uns an die Kofasersequenz

$$SA \xleftarrow{q} X // A \xleftarrow{j} X \xleftarrow{\iota} A$$

der Inklusion  $A \hookrightarrow X$  aus Satz 4.39.

5.33. PROPOSITION. *Es gibt eine Bijektion zwischen allgemeinen Homologiefunktoren  $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$  und Paaren  $(\tilde{h}_\bullet, \sigma_\bullet)$  aus je einem Funktor  $\tilde{h}_k: \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{C}$  und einem natürlichen Stabilisierungs- isomorphismus  $\sigma_k: \tilde{h}_k(S \cdot) \rightarrow \tilde{h}_{k-1}$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , mit folgenden Eigenschaften.*

(1') Quotientenaxiom. *Für jedes gute Paar  $(X, A)$  ist die folgende Sequenz exakt:*

$$\tilde{h}_k(X/A) \longleftarrow \tilde{h}_k(X) \longleftarrow \tilde{h}_k(A).$$

(2) Summenaxiom. *Es gilt das Summenaxiom 5.9 (2).*

*Dabei bezeichnet  $\tilde{h}_\bullet$  in beiden Paaren denselben Funktor, und für alle guten Paare  $(X, A)$  kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_k(SA) & \xleftarrow{q^*} & \tilde{h}_k(X//A) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_k(X/A). \end{array}$$

*Eine natürliche Transformation zwischen zwei solchen Funktoren kommutiert genau dann mit den Randoperatoren  $\partial_\bullet$ , wenn sie mit den Stabilisierungs- isomorphismen  $\sigma_\bullet$  kommutiert.*

BEWEIS. Es sei zunächst ein allgemeiner Homologiefunktor  $\tilde{h}_\bullet$  gegeben. Wir betrachten die Abbildungen von Paaren  $(X \cup_A ZA, A) \rightarrow (CA, A)$ , bei der  $X$  zu einem Punkt zusammengezogen wird, und  $(X \cup_A ZA, A) \rightarrow (X, A)$ , bei der der Zylinder  $ZA$  auf  $A$  gestaut wird. Wegen der Natürlichkeit von  $\partial$  erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\sigma=\partial} & \tilde{h}_k(SA) & \longleftarrow & \tilde{h}_k(CA) \\ \parallel & & \uparrow q^* & & \uparrow \\ \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_k(X//A) & \longleftarrow & \tilde{h}_k(X \cup_A ZA) \\ \parallel & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_k(X/A) & \longleftarrow & \tilde{h}_k(X). \end{array}$$

Mit diesem Diagramm definieren wir  $\sigma$  und erhalten das Quotientenaxiom (1') aus der langen exakten Sequenz 5.9 (1).

Seien umgekehrt  $(\tilde{h}_\bullet, \sigma_\bullet)$  gegeben. Wir wenden den Funktor  $\tilde{h}_k$  auf die Kofasersequenz der Inklusion  $A \hookrightarrow X$  an. Nach Satz 4.39 (2) ist jeder Abschnitt der Kofasersequenz aus zwei aufeinanderfolgenden Abbildungen homotopieäquivalent zu einer Sequenz  $Y/B \leftarrow Y \leftarrow B$  für eine passende Kofaserung  $(Y, B)$ , also ist die obere Sequenz im folgenden Diagramm nach dem Quotientenaxiom (1') exakt. Wir konstruieren die lange exakte Homologie-Sequenz des Paares  $(X, A)$  als

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{h}_k(SX) & \xleftarrow{(Sl)_*} & \tilde{h}_k(SA) & \xleftarrow{q^*} & \tilde{h}_k(X//A) & \xleftarrow{j^*} & \tilde{h}_k(X) & \xleftarrow{\iota^*} & \tilde{h}_k(A) \\ \sigma \downarrow & & \sigma \downarrow & & \cong \downarrow & \swarrow & & & \\ \tilde{h}_{k-1}(X) & \xleftarrow{\iota^*} & \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_k(X/A) & & & & \end{array}$$

Aus den obigen Konstruktionen folgt sofort, dass eine natürliche Transformation zwischen zwei solchen Funktoren genau dann mit  $\sigma$  verträglich ist, wenn sie mit  $\partial$  verträglich ist.  $\square$

Diese Überlegung vereinfacht die Konstruktion eines allgemeinen Homologiefunktors.



5.34. LEMMA. Es sei  $\tilde{h}_\bullet: \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{C}$  ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor, und  $E$  ein gut punktierter Raum in  $kw\mathcal{H}_+$ . Dann ist  $\tilde{h}_\bullet^E = \tilde{h}_\bullet(E \wedge \cdot)$  ebenfalls ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor. Wenn  $\tilde{h}_\bullet$  invariant unter schwachen Äquivalenzen ist, dann ist es  $\tilde{h}_\bullet^E$  auch.

BEWEIS. Es gilt  $S(E \wedge X) \cong E \wedge (SX)$ . Somit erbt  $\tilde{h}_\bullet^E$  den Stabilisierungsisomorphismus  $\sigma$  von  $\tilde{h}_\bullet$ .

Für ein gutes Paar  $(X, A)$  ist auch  $(E \wedge X, E \wedge A)$  ein gutes Paar nach Übung 3.129, und es gilt

$$(E \wedge X)/(E \wedge A) \cong E \wedge (X/A).$$

Also erfüllt  $\tilde{h}_\bullet^E$  genau wie  $\tilde{h}_\bullet$  das Quotientenaxiom aus Proposition 5.33 (1').

Es sei jetzt  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie gut punktierter Räume. Mit den universellen Eigenschaften von Koproduct und Smash-Produkt erhalten wir eine natürliche stetige Abbildung

$$\bigvee_{i \in I} (E \wedge X_i) \longrightarrow E \wedge \bigvee_{i \in I} X_i, \quad (*)$$

die als Abbildung von Mengen eine Bijektion ist, siehe Übung 3.128. Für jedes  $i \in I$  induziert die Inklusion  $E \wedge X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (E \wedge X_i)$  eine Abbildung  $X_i \rightarrow \text{hom}(E, \bigvee_{i \in I} (E \wedge X_i))$ , und wir erhalten eine Abbildung

$$\bigvee_{i \in I} X_i \rightarrow \text{hom}\left(E, \bigvee_{i \in I} (E \wedge X_i)\right).$$

Aufgrund des Exponentialgesetzes 4.13 in  $kw\mathcal{H}_+$  schließen wir, dass (\*) ein Homöomorphismus ist. Wir erhalten das Summenaxiom für  $\tilde{h}_\bullet^E$  aus dem Summenaxiom für  $\tilde{h}_\bullet$ , denn

$$\bigoplus_{i \in I} \tilde{h}_n(E \wedge X_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n\left(\bigvee_{i \in I} (E \wedge X_i)\right) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n\left(E \wedge \bigvee_{i \in I} X_i\right).$$

Zu guter Letzt sei  $X$  schwach zusammenziehbar. Aus Übung 3.106 und dem Ausschneidungssatz 3.66 für Kofaserungen erhalten wir Isomorphismen

$$\pi_k(E \times X) \xleftarrow{\cong} \pi_k E \xleftarrow{\cong} \pi_k(E \vee X),$$

falls  $E$  zusammenhängend ist. Andernfalls erhalten wir die obigen Isomorphismen, indem wir die Zusammenhangskomponente des Basispunkts in  $E$  separat betrachten.

Da  $(E \times X, E \vee X)$  somit  $p$ -zusammenhängend ist für jedes  $p$ , liefert Folgerung 3.71 wieder eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(E \times X) \xleftarrow{\cong} \pi_{k-1}(E \vee X) \xleftarrow{\partial} \pi_k(E \wedge X) \longrightarrow \pi_k(E \times X) \xleftarrow{\cong} \pi_k(E \vee X) \longleftarrow \cdots$$

Daher ist  $E \wedge X$  schwach zusammenziehbar. Also ist  $\tilde{h}_\bullet^E$  invariant unter schwachen Äquivalenzen, wenn dasselbe für  $\tilde{h}_\bullet$  gilt.  $\square$

Wir wären jetzt fertig, wenn wir einen Raum  $E_0$  mit  $\pi_0^s(E_0) = M \in \mathcal{A}b$  und  $\pi_k^s(E_0) = 0$  für alle  $k \neq 0$  angeben könnten. Denn dann würden wir  $\tilde{h}_\bullet = \pi_\bullet^s$  wählen und erhielten einen Homologiefunktor mit Koeffizienten

$$\tilde{h}_k^{E_0}(S^0) = \pi_k^s(E_0 \wedge S^0) = \pi_k^s(E_0).$$

Leider geht es aber nicht so einfach. Denn  $\pi_k^s(E_0)$  erkennen wir wegen Folgerung 3.79 erst am Raum  $S^{k+2}E_0$ . Um ein Element von  $\pi_k^s(E_0)$  wie im Beweis von Satz 4.32 zu beseitigen, müssten wir also eine  $(2k+3)$ -Zelle an  $S^{k+2}E_0$  ankleben. Den gleichen Effekt können wir in der Regel nicht dadurch erreichen, dass wir eine  $(k+1)$ -Zelle an  $E_0$  ankleben.

Wir können stattdessen für  $i \geq 2$  einen Raum  $E_i$  betrachten mit  $\pi_i(E_i) \cong M$  und  $\pi_k(E_i) = 0$  für  $k \neq i$ . Dann betrachten wir

$$\tilde{h}_k^i(X) = \pi_{k+i}^s(E_i \wedge X).$$

Da  $E_i$  und  $E_i \wedge X$  dann  $(i-1)$ -zusammenhängend sind, sehen wir mit Folgerung 3.79, dass

$$\tilde{h}_k^i(S^0) = \pi_{k+i}^s(E_i) \cong \begin{cases} M & \text{für } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } i \neq k \leq i-2. \end{cases}$$

Für größere  $k$  erhalten wir nach wie vor keine Aussage. Je größer  $i$  ist, desto besser „approximieren“ wir also eine gewöhnliche Homologietheorie mit Koeffizienten  $M$ .

Wenn wir natürliche Transformationen zwischen den obigen allgemeinen Homologietheorien zu  $E_i$  hätten, könnten wir jetzt eine gewöhnliche Homologietheorie  $\tilde{h}$  mit Koeffizienten  $M$  durch

$$\tilde{h}_k(X) = \varinjlim \tilde{h}_k^i(X) = \varinjlim \pi_{k+i}(E_i \wedge X)$$

konstruieren. Das motiviert die folgenden Definitionen.

5.35. DEFINITION. Ein *Spektrum*  $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  ist eine Folge von CW-Komplexen  $E_i$  und punktierten Abbildungen  $s_i: SE_i \rightarrow E_{i+1}$ , den *Stabilisierungsabbildungen*.

Ein Spektrum  $\mathbb{E}$  heißt *Suspensionsspektrum* oder *Einhängungsspektrum*, wenn ein  $n_0$  existiert, so dass die Abbildungen  $s_i$  für alle  $i \geq n_0$  schwache Äquivalenzen sind, und  $\omega$ -*Spektrum*, wenn die induzierten Abbildungen  $E_i \rightarrow \Omega^1(E_{i+1}) = \text{hom}(S^1, E_{i+1})$  für alle  $i \geq n_0$  schwache Äquivalenzen sind.

Wenn unsere Spektren erst bei einer bestimmten Zahl  $n_0$  beginnen, können wir  $E_i = \text{pt}$  für alle  $i < n_0$  setzen, und für  $s_i: \text{pt} = SE_i \rightarrow E_{i+1}$  die Nullabbildung wählen. In anderen Büchern heißen unsere Spektren oft Präspektren, da dort oft zusätzliche Anforderungen gestellt werden. Da wir als Räume in der obigen Definition CW-Komplexe verwenden, ist es aufgrund der Sätze von Whitehead und Milnor egal, ob wir in der Definition von Suspensions- und  $\omega$ -Spektren schwache Äquivalenzen oder Homotopieäquivalenzen verlangen.

Für ein Spektrum  $\mathbb{E}$  und einen Homologiefunktor  $\tilde{h}_\bullet$  definieren wir mit Lemma 5.34 weitere Homologiefunktoren  $\tilde{h}_\bullet^{\mathbb{E}, i}$  durch

$$\tilde{h}_k^{\mathbb{E}, i}(X) = \tilde{h}_{k+i}(E_i \wedge X).$$

Die Stabilisierungsabbildungen induzieren für alle Räume  $X$  natürliche Abbildungen

$$\tau_k^i: \tilde{h}_k^{\mathbb{E}, i}(X) = \tilde{h}_{k+i}(E_i \wedge X) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_{k+i+1}(E_i \wedge S^1 \wedge X) \xrightarrow{(s_i \wedge \text{id}_X)^*} \tilde{h}_{k+i+1}(E_{i+1} \wedge X) = \tilde{h}_k^{\mathbb{E}, i+1}(X).$$

Diese Abbildungen sind offensichtlich mit den Stabilisierungsisomorphismen verträglich, und nach Proposition 5.33 dann auch mit den Randoperatoren.

Da wir im Beweis des folgenden Lemma elementweise in Kolimiten arbeiten möchten, lassen wir nur noch Kategorien von Moduln zu, also beispielsweise  $\mathcal{A}b = \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$  oder  $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$ .

5.36. LEMMA. *Es sei  $(\tilde{h}_\bullet^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  eine Folge allgemeiner Homologiefunktoren in der Kategorie  $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$  der (rechts-)  $R$ -Moduln, und es seien  $\tau_\bullet^i: \tilde{h}_\bullet^i \rightarrow \tilde{h}_\bullet^{i+1}$  natürliche Transformationen, die mit den Randoperatoren  $\partial$  verträglich sind. Dann ist auch der Kolimes*

$$\tilde{h}_\bullet(X) = \varinjlim \tilde{h}_\bullet^i(X)$$

*ein allgemeiner Homologiefunktor. Wenn alle  $\tilde{h}_\bullet^i$  unter schwachen Äquivalenzen invariant sind, gilt das auch für  $\tilde{h}_\bullet$ .*

BEWEIS. Die Stabilisierungsisomorphismen für  $\tilde{h}_\bullet^i$  induzieren im Kolimes einen Stabilisierungsisomorphismus  $\sigma$  für  $\tilde{h}_\bullet$ .

Es sei  $(X, A)$  ein gutes Paar, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{h}_k^i(X/A) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}_k^i(X) & \xleftarrow{\iota_*} & \tilde{h}_k^i(A) \\
\tau_k^i \downarrow & & \tau_k^i \downarrow & & \tau_k^i \downarrow \\
\tilde{h}_k^{i+1}(X/A) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}_k^{i+1}(X) & \xleftarrow{\iota_*} & \tilde{h}_k^{i+1}(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\tilde{h}_k(X/A) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}_k(X) & \xleftarrow{\iota_*} & \tilde{h}_k(A)
\end{array}$$

Wir überprüfen Exaktheit der Grenzsequenz bei  $X$ . Für jedes  $\alpha \in \tilde{h}_k(A)$  existiert ein  $\alpha^i \in \tilde{h}_k^i(A)$ , das im Kolimes auf  $\alpha$  abgebildet wird. Es gilt  $(q_* \circ \iota_*)(\alpha^i) = 0 \in \tilde{h}_k^i(X/A)$ , wegen Kommutativität also auch  $(q_* \circ \iota_*)(\alpha) = 0 \in \tilde{h}_k(X/A)$ .

Zu jedem  $\xi \in \ker(q_*) \subset \tilde{h}_k(X)$  gibt es ein  $\xi^i \in \tilde{h}_k^i(X)$ , das im Kolimes auf  $\xi$  abgebildet wird, und ein  $j \geq i$ , so dass  $x_j = (\tau_{j-1} \circ \dots \circ \tau_i)(\xi^i) \in \ker(q_*) \subset \tilde{h}_k^j(X)$ . Folglich existiert  $\alpha^j \in \tilde{h}_k^j(A)$  mit  $\iota_*(\alpha^j) = \xi^j$ . Das Bild  $\alpha$  in  $\tilde{h}_k(A)$  wird dann auf  $\xi$  abgebildet. Somit erhalten wir das Quotientenaxiom 5.33 (1'), und Natürlichkeit ist offensichtlich.

Zum Summenaxiom (2) betrachten wir  $X = \bigvee_{j \in J} X_j$ . Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
& & \bigoplus \tilde{h}_\bullet^i(X_j) & \xrightarrow{\bigoplus \iota_{j*}} & \tilde{h}_\bullet^i(\bigvee X_j) \\
\tilde{h}_\bullet^i(X_j) & \xrightarrow{\quad} & \downarrow \iota_{j*} & \xrightarrow{\cong} & \downarrow \\
& & \bigoplus \tilde{h}_\bullet(X_j) & \xrightarrow{\bigoplus \iota_{j*}} & \tilde{h}_\bullet(\bigvee X_j) \\
\tilde{h}_\bullet(X_j) & \xrightarrow{\quad} & \downarrow \iota_{j*} & \xrightarrow{\quad} & \downarrow
\end{array}$$

Die untere Abbildung  $\bigoplus \iota_{j*}$  ist surjektiv, da jedes Element  $\xi \in \tilde{h}_\bullet(\bigvee X_j)$  von einem  $\xi_i \in \tilde{h}_\bullet^i(\bigvee X_j)$  kommt, das ein Urbild  $\sigma_i \in \bigoplus \tilde{h}_\bullet^i(X_j)$  hat. Für das Bild  $\sigma \in \bigoplus \tilde{h}_\bullet(X_j)$  folgt  $\bigoplus \iota_{j*}(\sigma) = \xi$ .

Sei jetzt  $\sigma \in \ker(\bigoplus \iota_{j*}) \subset \bigoplus \tilde{h}_\bullet(X_j)$ . Dann liegt  $\sigma$  in einem endlichen Teil der direkten Summe, hat also zu einer endlichen Zeit  $i$  ein Urbild  $\sigma_i \in \bigoplus \tilde{h}_\bullet^i(X_j)$ . Es gibt ein  $i' \geq i$ , so dass  $\bigoplus \iota_{j*}(\sigma_{i'}) = 0$ , also folgt  $\sigma_{i'} = 0 = \sigma$ . Nach Proposition 5.33 ist  $\tilde{h}$  also ein allgemeiner Homologiefunktor.

Wenn wir schließlich annehmen, dass alle  $\tilde{h}_\bullet^i$  unter schwachen Äquivalenzen invariant sind, dann erhalten wir für jeden schwach zusammenziehbaren Raum  $Z$  und alle  $k \in \mathbb{Z}$ , dass

$$\tilde{h}_k(Z) = \varinjlim \tilde{h}_k^i(Z) = \varinjlim 0 = 0. \quad \square$$

5.37. SATZ UND DEFINITION. Zu jedem Spektrum  $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  existiert ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor  $\tilde{E}_\bullet$  mit Werten in  $\mathcal{Ab}$ , gegeben durch

$$\tilde{E}_k(X) = \varinjlim \pi_{k+i}^s(E_i \wedge X) \cong \varinjlim \pi_{k+i}(E_i \wedge X),$$

der unter schwachen Äquivalenzen invariant ist.

Man nennt  $\tilde{E}_\bullet$  den (reduzierten) Homologiefunktor zum Spektrum  $\mathbb{E}$ .

BEWEIS. Aus den Lemmata 5.34 und 5.36 und der Konstruktion der natürlichen Transformationen  $\tau$  nach Definition 5.35 folgt, dass  $\tilde{E}_k$  ein reduzierter Kohomologiefunktor ist.

Die Abbildungen  $\pi_{k+i}(E_i \wedge X) \rightarrow \pi_{k+i}^s(E_i \wedge X)$  liefern eine natürliche Abbildung

$$\lim_{\rightarrow} \pi_{k+i}(E_i \wedge X) \longrightarrow \lim_{\rightarrow} \pi_{k+i}^s(E_i \wedge X) = \tilde{E}_k(X) \quad (*)$$

Für die Umkehrabbildung repräsentieren wir  $a \in \tilde{E}_k(X)$  durch ein Element  $a_i \in \pi_{k+i}^s(E_i \wedge X)$ , und dieses wiederum durch  $a_{i,\ell} \in \pi_{k+i+\ell}(S^\ell E_i \wedge X)$ . Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \dots & \\
 & & & \nearrow & \\
 & & \pi_{k+2}(S^2 E_0 \wedge X) & & \dots \\
 & & \nearrow^S & \searrow_{(S s_0 \wedge \text{id}_X)_*} & \nearrow \dots \\
 \pi_{k+1}(S E_0 \wedge X) & & \pi_{k+2}(S E_1 \wedge X) & & \dots \\
 \nearrow^S & \searrow_{(s_0 \wedge \text{id}_X)_*} & \nearrow^S & \searrow_{(s_1 \wedge \text{id}_X)_*} & \nearrow \dots \\
 \pi_k(E_0 \wedge X) & & \pi_{k+1}(E_1 \wedge X) & & \pi_{k+2}(E_2 \wedge X)
 \end{array}$$

Mehrfaches Anwenden der Stabilisierungsabbildungen  $s_\bullet$  liefert  $a_{i+\ell,0} \in \pi_{k+i+\ell}(E_{i+\ell} \wedge X)$ , welches das Bild von  $a_i$  in  $\pi_{k+i+\ell}^s(E_{i+\ell} \wedge X)$  und damit ebenfalls  $a \in \tilde{E}_k(X)$  repräsentiert. Dann bilden wir  $a$  auf das Bild von  $a_{i+\ell,0}$  in  $\lim_{\rightarrow} \pi_{k+i}(E_i \wedge X)$  ab, das liefert die Umkehrabbildung zu (\*).  $\square$

5.38. BEISPIEL. Das *Sphärenspektrum*  $\mathbb{S}$  ist definiert als  $(S^i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , mit  $s_i = \text{id}_{S^{i+1}}: S S^i \rightarrow S^{i+1}$ . Es ist demnach ein Suspensionsspektrum. Der zugehörige Homologiefunktor besteht aus den stabilen Homotopiegruppen aus Folgerung 5.11. Wir erhalten also (noch) nichts Neues.

5.39. BEMERKUNG. Die obige Konstruktion ist sehr allgemein. Sie liefert uns im nächsten Abschnitt alle gewöhnlichen Homologiefunktoren mit Koeffizienten in  $\mathcal{A}b$ . Später lernen wir Spektren kennen, die verschiedene Bordismustheorien liefern.

Der Brownsche Darstellungssatz besagt, dass jeder allgemeine Homologiefunktor, der invariant unter schwachen Äquivalenzen und invariant unter gerichteten Kolimiten ist, von einem Spektrum herkommt. Dabei ist Invarianz unter gerichteten Kolimiten eine Verschärfung des Summenaxioms.

### 5.e. Das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum

Um die Existenz eines gewöhnlichen Homologiefunktors zu zeigen, müssen wir jetzt nur noch das passende Spektrum konstruieren. Da wir mit stabilen Homotopiegruppen starten, arbeiten wir jetzt in der Kategorie  $\mathcal{A}b = \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$  der abelschen Gruppen. Andere mögliche Konstruktionen gewöhnlicher Homologiefunktoren sind singuläre Homologie oder Garbenkohomologie.

Am Schluss dieses Abschnitts betrachten wir die so konstruierten Homologiefunktoren  $\tilde{H}_\bullet(\cdot; G)$  genauer und beweisen insbesondere den Satz von Hurewicz, der die erste nicht verschwindende Homotopiegruppe eines zusammenhängenden Raumes mit der entsprechenden Homologiegruppe  $\tilde{H}_k(X; \mathbb{Z})$  in Verbindung bringt. Als Folgerung erhalten wir auch eine homologische Fassung des Satzes 4.27 von Whitehead.

5.40. DEFINITION. Es sei  $G$  eine Gruppe und  $n \geq 1$ . Ein *Eilenberg-Mac Lane-Raum* zu  $G$  im Grad  $n$  ist ein punktierter CW-Komplex  $K(G, n)$  in  $kw\mathcal{H}_+$  mit  $\pi_k(K(G, n)) = 0$  für alle  $k \neq n$  zusammen mit einem Isomorphismus

$$\varphi: \pi_n(K(G, n)) \xrightarrow{\cong} G. \quad (1)$$

Ein *Eilenberg-Mac Lane-Spektrum* zur abelschen Gruppe  $G$  ist ein Spektrum  $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , für das ein  $n_0 \geq 1$  existiert, so dass  $HG_n$  für alle  $n \geq n_0$  ein Eilenberg-Mac Lane-Raum mit

einem Isomorphismus  $\varphi_n: \pi_n(HG_n) \rightarrow G$  ist, und so dass für alle  $n \geq n_0$  das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(HG_n) & \xrightarrow[\cong]{S} & \pi_{n+1}(SHG_n) \\ \varphi_n \downarrow \cong & & s_{n*} \downarrow \cong \\ G & \xleftarrow[\cong]{\varphi_{n+1}} & \pi_{n+1}(HG_{n+1}) . \end{array} \quad (2)$$

Ein Eilenberg-Mac Lane-Raum hat nur eine nicht verschwindende Homotopiegruppe. Dabei sind die Isomorphismen  $\varphi$  wichtig. Die Notationen  $K(G, n)$  und  $HG_n$  sind beide gebräuchlich, die letztere passt etwas besser zu unser Notation für Spektren.

Nach Proposition 3.5 kann es Eilenberg-Mac Lane-Räume zu nicht-abelschen Gruppen nur in Grad 1 geben. Da diese in manchen Bereichen der Topologie und Geometrie recht wichtig sind, haben wir sie hier bereits mitdefiniert.

5.41. BEISPIEL. Wir können bereits einige Eilenberg-Mac Lane-Räume angeben.

- (1) Der Kreis  $S^1$  ist ein  $K(\mathbb{Z}, 1)$  nach Beispiel 3.27.
- (2) Nach Übung 3.106 ist der  $n$ -Torus  $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$  ein  $K(\mathbb{Z}^n, 1)$ .
- (3) Sei allgemeiner  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung, dann ist ihre universelle Überlagerung  $\tilde{M}$  nach dem Satz von Hadamard-Cartan zusammenziehbar. Nach Folgerung 3.26 ist  $M$  dann ein  $K(\pi_1(M), 1)$ .
- (4) Der reell projektive Raum  $\mathbb{R}P^\infty$  ist ein  $K(\mathbb{Z}/2, 1)$ .
- (5) Der komplex projektive Raum  $\mathbb{C}P^\infty$  ist ein  $K(\mathbb{Z}, 2)$  nach Beispiel 5.26 und Lemma 5.20 (4).
- (6) Der quaternionisch projektive Raum  $\mathbb{H}P^\infty$  ist kein Eilenberg-Mac Lane-Raum, denn es gilt  $\pi_4(\mathbb{H}P^\infty) \cong \pi_4(S^4) = \mathbb{Z}$  und  $\pi_5(\mathbb{H}P^\infty) \cong \pi_5(S^4) = \mathbb{Z}/2 \neq 0$  nach Satz 3.101.

5.42. SATZ. Zu jeder abelschen Gruppe  $G$  existiert ein Eilenberg-MacLane-Spektrum  $(HG_\bullet, s_\bullet)$  aus CW-Komplexen mit  $HG_n = 0$  für alle  $n \leq 0$  und  $HG_n \cong K(G, n)$  für alle  $n \geq 1$ . Diese können so konstruiert werden, dass  $HG_n$  außer dem Basispunkt keine Zellen der Dimension  $< n$  enthält. Zu jedem Homomorphismus  $f: G \rightarrow K$  existiert eine bis auf Homotopie eindeutige Familie von Abbildungen  $Hf_n: HG_n \rightarrow HK_n$  zu  $(HG_\bullet, s_\bullet)$  und  $(HK_\bullet, t_\bullet)$ , so dass die folgenden Diagramme für alle  $n \geq 1$  kommutieren.

$$\begin{array}{ccc} SHG_{n-1} & \xrightarrow{s_{n-1}} & HG_n \\ SHf_{n-1} \downarrow & & \downarrow Hf_n \\ SHK_{n-1} & \xrightarrow{t_{n-1}} & HK_n \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \pi_n(HG_n) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & G \\ Hf_{n*} \downarrow & & \downarrow f \\ \pi_n(HK_n) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & K . \end{array}$$

Aus der zweiten Aussage folgt insbesondere, dass die einzelnen Räume  $HG_n$  bis auf Homotopieäquivalenz und die einzelnen Abbildungen  $s_n$  bis auf Homotopie eindeutig bestimmt sind. Außerdem ist die Zuordnung  $G \rightsquigarrow (HG_\bullet, s_\bullet)$  fast funktoriell: seien  $f: G \rightarrow K$  und  $g: K \rightarrow L$  Homomorphismen abelscher Gruppen, dann sind die Abbildungen  $H(g \circ f)$  und  $Hg \circ Hf$  homotop. Man beachte, dass wir bei  $Hf_\bullet$  nicht von „Abbildungen von Spektren“ sprechen — dieser Begriff hat später eine andere, allgemeinere Bedeutung.

BEWEIS. Unsere Konstruktion lehnt sich an den Beweis des CW-Approximationssatzes 4.32 an. Wir starten mit  $HG_n = \text{pt}$  für alle  $n \leq 0$ .

Sei jetzt  $n \geq 1$  und  $HG_{n-1}$  bereits konstruiert. Wir konstruieren ein CW-Paar  $(HG_n, SHG_{n-1})$  und definieren  $s_{n-1}: SHG_{n-1} \rightarrow HG_n$  als Inklusionsabbildung. Im Fall  $n = 1$  wählen wir  $\text{pt} =$

$SHG_0$  als 0-Skelett. Als Indexmenge  $J_1^1$  wählen wir eine Erzeugermenge von  $G$  und erhalten

$$HG_1^1 = \bigvee_{j \in J_1^1} S^1 \quad \text{und} \quad \pi_1(HG_1^1) = \prod_{j \in J_1^1} \mathbb{Z}.$$

Als  $J_1^2$  wählen wir eine Menge von Relationen, das sind Erzeuger von  $\ker(\pi_1(HG_1^1) \rightarrow G)$  als Normalteiler in  $\pi_1(HG_1^1)$ , siehe Satz 2.52. Wir erhalten  $HG_1^2$  durch entsprechendes Ankleben von 2-Zellen. Anschließend kleben wir induktiv  $k$ -Zellen für  $k \geq 3$  so an, dass  $\pi_{k-1}(HG_1) \cong \pi_{k-1}(HG_1^k) = 0$ . Wegen Folgerung 4.25 existiert der in Definition 5.40 (1) verlangte Isomorphismus

$$\varphi: \pi_1(HG_1) \cong \pi_1(HG_1^2) \longrightarrow G.$$

Im Fall  $n = 2$  ist die Abbildung  $S: \pi_1(HG_1) \rightarrow \pi_2(SHG_1)$  nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.75 surjektiv. Nach Folgerung 3.79 gilt

$$\pi_2(S(HG_1^1)) = \pi_2^s(S(HG_1^1)) \cong \bigoplus_{j \in J_1^1} \pi_2^s(S^2) \cong \bigoplus_{j \in J_1^1} \mathbb{Z},$$

und diese Gruppe bildet surjektiv auf  $G$  ab. Für jedes  $j \in J_1^2$  realisiert  $S\varphi_j^2: S^2 \rightarrow S(HG_1^1)$  dieselbe Relation in  $G$  wie bei der Konstruktion von  $HG_1^2$ . Daher ist die Abbildung  $\pi_2(SHG_1) \rightarrow \pi_2(HG_2)$  sogar ein Isomorphismus. Indem wir Zellen der Dimension  $\geq 4$  an  $SHG_1$  ankleben, erhalten einen  $K(G, 2)$  zusammen mit dem kommutativen Diagramm in Definition 5.40 (2) für  $n = 1$ .

Für  $n \geq 3$  ist  $HG_{n-1}$  nach Voraussetzung ein  $K(G, n-1)$  und daher  $(n-2)$ -zusammenhängend. Daher ist die Abbildung  $\pi_{k-1}(HG_{n-1}) \rightarrow \pi_k(SHG_{n-1})$  nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.75 ein Isomorphismus für  $k \leq 2n-3 \geq n$  und surjektiv für  $k = 2n-2$ , so dass  $\pi_k(SHG_{n-1}) = \pi_{k-1}(HG_{n-1}) = 0$  für alle  $k \leq 2n-2$  mit Ausnahme von  $k = n$ . Wir erhalten also einen  $K(G, n)$ , indem wir Zellen der Dimension  $\geq 2n$  ankleben. Der Isomorphismus  $\varphi_n: \pi_n(SHG_{n-1}) \cong \pi_n(HG_n) \rightarrow G$  ist durch das Diagramm in Definition 5.40 (2) bereits bestimmt.

Seien jetzt Eilenberg-Mac Lane-Spektren  $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)$  und  $\mathbb{H}K = (HK_n, t_n)$  wie im Satz gegeben. Wir nehmen zunächst an, dass  $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)$  wie oben konstruiert wurde. Dann setzen wir  $Hf_n = 0: \text{pt} \rightarrow HK_n$  für  $n \leq 0$ . Für  $n = 1$  wählen wir zu jeder 1-Zelle  $e_k^1$  einen Repräsentanten  $\gamma: S^1 \rightarrow HK_1$  des Bildes des entsprechenden Erzeugers von  $G$  unter  $f$  in  $\pi_1(HK_1) = K$  und definieren dadurch

$$Hf_1^1: HG_1^1 = \bigvee_{j \in J_1^1} S^1 \rightarrow HK_1.$$

Sei  $\varphi_j^2$  die Anklebeabbildung einer 2-Zelle  $e_j^2$  von  $HG$ . Da  $f$  ein Gruppenhomomorphismus ist, ist dann  $Hf_1^1 \circ \varphi_j^2$  in  $HK_1$  zusammenziehbar, und wir können  $Hf_1^1$  zu  $Hf_1^2: HG_1^2 \rightarrow HK_1$  ausdehnen. Da  $HK_1$  ein  $K(K, 1)$  ist, können wir  $Hf_1$  induktiv auf allen höheren Skeletten definieren. Nach Konstruktion kommutiert das rechte Diagramm im Satz für  $n = 1$ .

Sei jetzt  $n \geq 2$ . Nach Konstruktion erhalten wir zunächst eine Abbildung

$$SHf_{n-1}: SHG_{n-1} \longrightarrow SHK_{n-1} \xrightarrow{t_{n-1}} HK_n,$$

diese können wir wie oben Zelle für Zelle auf ganz  $HG_n$  ausdehnen, so dass das linke Diagramm im Satz kommutiert. Das rechte Diagramm kommutiert dann ebenfalls, denn nach Konstruktion und

Definition 5.40 (2) kommutieren alle Seiten des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
& & \pi_n(SHG_{n-1}) & \xleftarrow[\cong]{S} & \pi_{n-1}(HG_{n-1}) \\
& \swarrow^{(s_{n-1})_*} & \downarrow \varphi & \swarrow \varphi & \downarrow (Hf_{n-1})_* \\
\pi_n(HG_n) & \xrightarrow[\cong]{(SHf_{n-1})_*} & G & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & \pi_{n-1}(HG_{n-1}) \\
\downarrow (Hf_n)_* & \downarrow (SHf_{n-1})_* & \downarrow f & \downarrow \varphi & \downarrow (Hf_{n-1})_* \\
\pi_n(HK_n) & \xrightarrow[\cong]{(t_{n-1})_*} & \pi_n(SHK_{n-1}) & \xleftarrow[\cong]{S} & \pi_{n-1}(HK_{n-1}) \\
& \downarrow \varphi & \downarrow \varphi & \downarrow \varphi & \downarrow \varphi \\
& & K & & \pi_{n-1}(HK_{n-1})
\end{array}$$

mit Ausnahme der vorderen.

Falls das Spektrum  $\mathbb{H}G$  nicht wie oben konstruiert wurde, sei  $\mathbb{E}$  zu  $G$  wie oben konstruiert. Wir erhalten kommutierende Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc}
SHG_n & \longleftarrow & SE_n & \longrightarrow & SHK_n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
HG_{n+1} & \longleftarrow & E_{n+1} & \longrightarrow & HK_{n+1} .
\end{array}$$

Nach dem Satz 4.27 von Whitehead sind die Abbildungen  $E_n \rightarrow HG_n$  Homotopieäquivalenzen, so dass wir auch eine passende Abbildung  $HG_n \rightarrow HK_n$  erhalten.

Seien schließlich eine weitere Folge von Abbildungen  $g_n: HG_n \rightarrow HK_n$  mit  $g_n|_{SHG_{n-1}} = Sg_{n-1}$  und  $g_{n*} = f: \pi_n(HG_n) \rightarrow \pi_n(HK_n)$  gegeben. Da  $\pi_k(HK_n) = 0$  für alle  $k \neq n$ , lässt sich induktiv eine Familie von Homotopien  $h_n: HG_n \times I \rightarrow HK_n$  zwischen  $Hf_n$  und  $g_n$  konstruieren.  $\square$

Mit den so konstruierten Eilenberg-Mac Lane-Spektren können wir jetzt gewöhnliche Homologiefunktoren konstruieren. Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse in einem Satz zusammen.

5.43. SATZ. *Es sei  $G$  eine abelsche Gruppe.*

(1) *Es existiert ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor  $\tilde{H}_\bullet(\cdot; G): \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \rightarrow Ab$  mit*

$$\tilde{H}_k(X; G) = \varinjlim \pi_{k+\ell}^s(HG_\ell \wedge X) \cong \varinjlim \pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X) ,$$

*der das Dimensionsaxiom 5.9 (3) mit  $\tilde{H}_0(S^0; G) = G$  erfüllt und unter schwachen Äquivalenzen invariant ist.*

(2) *Jeder andere gewöhnliche reduzierte Homologiefunktor mit den obigen Eigenschaften ist zu  $\tilde{H}_\bullet(\cdot; G)$  natürlich isomorph.*

(3) *Zu jedem Gruppenhomomorphismus  $f: G \rightarrow K$  existiert eine natürliche Transformation  $\tau_{f,\bullet}: \tilde{H}_\bullet(\cdot; G) \rightarrow \tilde{H}_\bullet(\cdot; K)$ , so dass  $\tau_{f,0}(S^0) = f: \tilde{H}_0(S^0; G) = G \rightarrow K = \tilde{H}_0(S^0; K)$ .*

BEWEIS. Die Existenzaussage (1) folgt aus den Sätzen 5.37 und 5.42.

Zur Eindeutigkeit sei ein weiterer solcher Funktor  $\tilde{h}_\bullet$  und ein Raum  $Y$  in  $kw\mathcal{H}$  gegeben. Es sei  $g: X \rightarrow Y$  eine CW-Approximation von  $Y$ , dann sind die Abbildungen  $g_*: \tilde{h}_k(X) \rightarrow \tilde{h}_k(Y)$  und  $g_*: \tilde{H}_k(X; G) \rightarrow \tilde{H}_k(Y; G)$  Isomorphismen und durch Satz 4.32 eindeutig festgelegt. Satz 5.23 (2) liefert den in (2) gesuchten natürlichen Isomorphismus.

Schließlich konstruieren wir die natürliche Transformation zu (3) durch

$$\tau_{f,k}(X) = \varinjlim ((Hf_\ell \wedge \text{id}_X)_*: \pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X) \longrightarrow \pi_{k+\ell}(HK_\ell \wedge X)) . \quad \square$$

5.44. PROPOSITION. *Sei  $HG_\bullet$  ein Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zur abelschen Gruppe  $G$ . Für jeden topologischen Raum  $X$  gilt*

$$\tilde{H}_k(X; G) = \pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X) \quad \text{für alle } \ell \geq k + 2 . \quad (1)$$

Falls  $X$  ein  $n$ -zusammenhängender Raum ist für ein  $n \geq 0$ , gilt sogar

$$\tilde{H}_k(X; G) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } k \leq n, \text{ und} \\ \pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X) & \text{für alle } k > n \text{ und alle } \ell \geq k - n. \end{cases} \quad (2)$$

BEWEIS. Da alle auftretenden Funktoren unter schwachen Äquivalenzen invariant sind, dürfen wir nach Satz 4.32 annehmen, dass  $X$  ein CW-Komplex ist. Wenn  $X$  ein  $n$ -zusammenhängender Raum ist, dürfen wir außerdem annehmen, dass das  $n$ -Skelett nur aus einem Punkt besteht. Andernfalls setzen wir  $n = -1$  und  $X^{-1} = \text{pt}$ .

Wenn wir  $HG_\ell$  wie im Beweis des Satzes 5.42 konstruieren, besteht  $HG_\ell$  nur aus Zellen der Dimension  $\geq \ell$ . Also besteht  $HG_\ell \wedge X$  nach der Konstruktion zu Proposition 4.35 (4) nur aus Zellen der Dimension  $> n + \ell$ . Es gilt

$$\pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X) = 0 \quad \text{für alle } k \leq n,$$

also  $\tilde{H}_k(X; G) = 0$  für alle  $k \leq n$ .

Es sei jetzt  $k > n$ . Da wir beim Übergang von  $SHG_\ell$  zu  $HG_{\ell+1}$  im Beweis von Satz 5.42 nur Zellen der Dimension  $\geq 2(\ell + 1)$  ankleben, ist die Abbildung

$$SHG_\ell \wedge X \xrightarrow{s_\ell \wedge \text{id}_X} HG_{\ell+1} \wedge X$$

nach Folgerung 4.25 eine  $(n + 2\ell + 2)$ -zusammenhängende Abbildung. Außerdem ist  $HG_\ell \wedge X$  ein  $(n + \ell)$ -zusammenhängender Raum. Nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.75 ist daher

$$\pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X) \xrightarrow{\cong} \pi_{k+\ell}(SHG_\ell \wedge X) \xrightarrow{\cong} \pi_{k+\ell}(HG_{\ell+1} \wedge X) \quad \text{für alle } \ell \geq k - n > 0,$$

sofern  $\ell \geq k - 2n$  und  $\ell \geq k - n$ . Mit Satz 5.43 (1) folgt (1) und der zweite Fall in (2).  $\square$

5.45. BEMERKUNG. Somit brauchen wir einerseits die Räume  $HG_\ell$  für beliebig große  $\ell$ , um entsprechend hohe Homologiegruppen eines festen Raumes  $X$  zu beschreiben, andererseits brauchen wir nicht durch Einhängung zu stabilisieren. Schließlich hängt  $\pi_{k+\ell}(HG_\ell \wedge X)$  wegen Folgerung 4.25 nur vom  $(k + \ell - n)$ -Skelett von  $HG_\ell$  ab, und da  $\ell \geq k - n$ , sogar nur vom  $2\ell$ -Skelett. Wir erhalten also einen isomorphen Homologiefunktor mit einem Spektrum  $\mathbb{E}$ , bei dem  $E_n = \text{pt}$  für  $n \leq 0$ , bei dem  $E_0 \setminus \text{pt}$  aus Erzeugern von  $G$  besteht, und bei dem  $E_n$  aus  $SE_{n-1}$  durch Ankleben von  $2n$ -Zellen entsteht, so dass für  $n \geq 1$  gilt

$$\pi_k(E_n) \cong \begin{cases} G & \text{für } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{für } k \neq n, k < 2n. \end{cases}$$

Sobald wir allerdings Kohomologiefunktoren konstruieren wollen, brauchen wir ein echtes  $\omega$ -Spektrum wie in Definition 5.40.

Wegen Beispiel 5.41 (1) können wir  $H\mathbb{Z}_1 = S^1$  wählen. Nach Proposition 5.44 hat  $\tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  einen offensichtlichen Erzeuger

$$\varepsilon_n = [\text{id}_{S^{n+1}}] \in \pi_{n+1}(S^1 \wedge S^n) = \tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z}).$$

5.46. DEFINITION. Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $n \geq 1$ . Dann ist der *Hurewicz-Homomorphismus*  $\eta_n: \pi_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$  definiert durch

$$\eta_n([f]) = f_*(\varepsilon_n) \in \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}).$$

Wegen der Homotopieinvarianz von  $\tilde{H}_\bullet(\cdot; \mathbb{Z})$  ist  $\eta_n$  wohldefiniert. Seien  $f, g: S^n \rightarrow X$  punktierte Abbildungen. Mit der Notation aus dem Beweis von Satz 5.18 gilt

$$\eta_n([f + g]) = (f + g)_*(\varepsilon_n) = (f \wedge g)_*(d_*\varepsilon_n) = f_*\varepsilon_n + g_*\varepsilon_n = \eta_n([f]) + \eta_n([g]),$$



also ist  $\eta_n: \pi_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$  tatsächlich ein Homomorphismus.

Außerdem erinnern wir uns an die Abelisierung  $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$  aus Bemerkung 2.17 (2).

5.47. SATZ (Hurewicz). *Es sei  $X$  ein zusammenhängender topologischer Raum. Dann induziert  $\eta_1$  einen Hurewicz-Isomorphismus*

$$\pi_1(X)^{\text{ab}} \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_1(X; \mathbb{Z}). \quad (1)$$

Wenn  $X$  ein  $n$ -zusammenhängender Raum ist mit  $n \geq 1$ , erhalten wir einen Isomorphismus

$$\eta_{n+1}: \pi_{n+1}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n+1}(X; \mathbb{Z}). \quad (2)$$

BEWEIS. Aussage (2) folgt aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.75 und Proposition 5.44 (2), da

$$\pi_{n+1}(X) \cong \pi_{n+2}(S^1 \wedge X) \cong \tilde{H}_{n+1}(X; \mathbb{Z}),$$

und  $\eta_{n+1}$  bildet  $[f] \in \pi_{n+1}(X)$  auf

$$f_*[\varepsilon_{n+1}] = [(\text{id}_{S^1} \wedge f) \circ \text{id}_{S^{n+2}}] = [Sf] \in \pi_{n+2}(X \wedge S^1)$$

ab. Somit entspricht  $\eta_{n+1}$  gerade dem Einhängungsisomorphismus  $S$  aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.75.

In Aussage (1) erhalten wir wie oben den surjektiven Einhängungshomomorphismus

$$\eta_1 = S: \pi_1(X) \longrightarrow \pi_2(X \wedge S^1) \cong \tilde{H}_1(X; \mathbb{Z}).$$

Wir dürfen wieder annehmen, dass  $X$  ein CW-Komplex mit 0-Skelett  $X^0 = \text{pt}$  ist. Indem wir Satz 2.52 wie im Beweis von Satz 5.42 benutzen, sehen wir, dass  $\eta_1$  einen Isomorphismus  $\pi_1(X)^{\text{ab}} \rightarrow \tilde{H}_1(X; \mathbb{Z})$  induziert.  $\square$

5.48. BEMERKUNG. Den Satz von Hurewicz kann man auch „rückwärts“ anwenden: Wenn  $X$  zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist und  $\tilde{H}_k(X; \mathbb{Z}) = 0$  für alle  $k \leq n$  gilt, dann ist  $\eta_{n+1}: \pi_{n+1}(X) \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(X; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus. Dazu wenden wir den Satz von Hurewicz induktiv für alle  $k \leq n+1$  an.

Die Voraussetzung, dass  $X$  einfach zusammenhängend ist, ist dabei wichtig. Es gibt nämlich sogenannte *perfekte* Gruppen  $G \neq 0$ , was bedeutet, dass  $[G, G] = G$  gilt und somit  $G^{\text{ab}} = 0$ . In diesem Fall ist  $\tilde{H}_1(X; \mathbb{Z}) = 0$ , aber  $\eta_2: \pi_2(X) \rightarrow \tilde{H}_2(X; \mathbb{Z})$  ist im allgemeinen kein Isomorphismus.

5.49. BEMERKUNG. Sowohl der Satz von Hurewicz als auch die Tatsache, dass der zelluläre Randoperator allein durch die Inzidenzzahlen  $d_{ij}^n \in \mathbb{Z}$  bestimmt ist, legen nahe, dass unter den gewöhnlichen Homologiefunktoren die *ganzzahlige Homologie*  $\tilde{H}_\bullet(\cdot; \mathbb{Z})$  eine Sonderrolle annimmt. Man schreibt daher oft kurz  $\tilde{H}_k(X)$  für  $\tilde{H}_k(X; \mathbb{Z})$ .

Zum Schluss formulieren wir den Satz 4.27 von Whitehead noch einmal mit Hilfe von Homologie um.

5.50. SATZ (Whitehead, homologische Fassung). *Es sei  $f: Y \rightarrow X$  eine punktierte Abbildung von zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden CW-Komplexen, so dass  $f_*: \tilde{H}_k(Y) \rightarrow \tilde{H}_k(X)$  für alle  $k \geq 1$  ein Isomorphismus ist. Dann ist  $f$  eine Homotopie-Äquivalenz.*

BEWEIS. Wir schreiben den Abbildungskegel  $Cf$  als  $Zf \cup_Y CY$ , dabei ist  $Zf$  zu  $X$  homotopieäquivalent. Indem wir den Durchschnitt  $Y$  etwas aufdicken, sehen wir mit dem Satz 2.42 von Seifert-van Kampen, dass  $Cf$  einfach zusammenhängend ist. Wegen der langen exakten Homologie-sequenz 5.9 (1) für das Paar  $(Zf, Y)$  gilt  $\tilde{H}_k(Cf) = 0$  für alle  $k$ . Somit ist  $Cf$  nach Bemerkung 5.48 schwach zusammenziehbar.

Wir zeigen induktiv über  $n$ , dass dann auch  $\pi_k(Zf, Y) = 0$  für alle  $k \leq n$ . Für  $n = 1$  folgt das aus den Voraussetzungen. Sei die Behauptung für ein  $n$  richtig, dann ist  $(Zf, Y) \rightarrow (Cf, *)$  eine

$(n+2)$ -zusammenhängende Abbildung nach Proposition 3.69. Also erhalten wir einen Isomorphismus  $\pi_{n+1}(Zf, Y) \cong \pi_{n+1}(Cf) = 0$ .

Aber dann sind  $Y \hookrightarrow Zf$  und  $f$  schwache Äquivalenzen, somit ist  $f$  eine Homotopieäquivalenz nach dem Satz 4.27 von Whitehead.  $\square$

Hätten wir anstelle von  $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = 0$  nur einen Isomorphismus  $f_*: \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$  vorausgesetzt, so hätten wir zwar immer noch folgern können, dass  $Cf$  schwach zusammenziehbar ist, aber nicht, dass alle  $\pi_k(Zf, Y)$  verschwinden.

### 5.f. Die abgeleiteten Funktoren Tor und Ext

Für den nächsten Abschnitt benötigen wir einige Konstruktion aus der homologischen Algebra, unter anderem Tensor- und Hom-Funktor und die daraus abgeleiteten Torsions- und Erweiterungsprodukte. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Moduln über Hauptidealringen, wobei wir speziell an  $\mathcal{A}b = \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$  denken.

Als erstes beschreiben wir das Tensorprodukt in der Kategorie  $\text{Mod}_R$  der Moduln über einem kommutativen Ring  $R$  mit Eins. Wir erinnern uns zunächst an den internen hom-Funktor

$$\text{hom}(M, N) = \text{hom}_R(M, N) = \{ f: M \rightarrow N \mid f \text{ ist linear.} \}$$

mit der Modulstruktur

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m) \quad \text{und} \quad (rf)(m) = r f(m) = f(rm)$$

für alle  $f, g \in \text{hom}(M, N)$ , alle  $m \in M$  und alle  $r \in R$ . Dann halten wir uns an die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes aus Bemerkung 4.11. Sie ist äquivalent zur charakteristischen Eigenschaft aus Beispiel 4.10 (2), wonach es zu jeder bilinearen Abbildung  $B: L \times M \rightarrow N$  von  $R$ -Moduln genau eine lineare Abbildung  $b: L \otimes M \rightarrow N$  mit  $B = b \circ \otimes$  gibt. Das motiviert die folgende Konstruktion.

5.51. DEFINITION. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins, und es seien  $M$  und  $N$  Moduln über  $R$ . Dann definieren wir das *Tensorprodukt*  $M \otimes_R N$  als den Quotient des Erzeugnisses der Elemente von  $M \times N$  unter der Relation  $\sim$ , die erzeugt wird von

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2, n) &\sim (m_1, n) + (m_2, n), \\ (m, n_1 + n_2) &\sim (m, n_1) + (m, n_2) \\ \text{und} \quad (mr, n) &\sim (m, n)r \sim (m, nr) \end{aligned}$$

für alle  $r \in R$ ,  $m, m_1, m_2 \in M$  und  $n, n_1, n_2 \in N$ . Für die Äquivalenzklasse von  $(m, n)$  schreiben wir kurz  $m \otimes n \in M \otimes N$ . Dann erhalten wir eine Abbildung

$$\otimes: M \times N \longrightarrow M \otimes_R N \quad \text{mit} \quad (m, n) \longmapsto m \otimes n.$$

Wir lassen den Index  $R$  beim Tensorprodukt und beim Homomorphismenmodul weg, wenn klar ist, über welchem Ring wir arbeiten.

5.52. BEMERKUNG. Man überprüft jetzt, dass das Tensorprodukt alle Eigenschaften aus Definition 4.9 erfüllt, siehe Übung 5.97. Für 4.9 (3) betrachten wir den Raum der  $R$ -linearen Abbildungen von  $M$  nach  $N$  als  $R$ -Modul  $\text{hom}(M, N)$  unter punktwiser Addition und Multiplikation mit Elementen aus  $R$ . Außerdem erfüllt das Tensorprodukt die universelle Eigenschaft aus Bemerkung 4.11.

Das Tensorprodukt wird von Elementen der Form  $m \otimes n$  erzeugt, diese heißen auch *zerlegbar*. Ein typisches Element von  $M \otimes N$  ist somit eine Linearkombination solcher Elemente. Als Beispiel sei  $R = \mathbb{k}$  ein Körper und  $V, W$  seien endlich dimensionale  $\mathbb{k}$ -Vektorräume. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus  $\text{hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ . Elemente der Form  $\alpha \otimes w$  entsprechen genau

den Abbildungen  $f: V \rightarrow W$  vom Rang  $\leq 1$ . Abbildungen von höherem Rang lassen sich nur als Linearkombinationen zerlegbarer Elemente von  $V^* \otimes W$  darstellen.

5.53. BEMERKUNG. Aufgrund der universellen Eigenschaft von Produkt und Koprodukt gibt es natürliche Isomorphismen

$$M \otimes \bigoplus_{i \in J} N_i \cong \bigoplus_{i \in J} M \otimes N_i, \quad \left( \bigoplus_{i \in J} M_i \right) \otimes M \cong \bigoplus_{i \in J} M_i \otimes M,$$

$$\text{hom} \left( M, \prod_{i \in J} N_i \right) \cong \prod_{i \in J} \text{hom}(M, N_i) \quad \text{und} \quad \text{hom} \left( \bigoplus_{i \in J} M_i, N \right) \cong \prod_{i \in J} \text{hom}(M_i, N).$$

Man beachte, dass Produkt und Koprodukt für endliche Indexmengen übereinstimmen.

Man nennt einen Funktor zwischen abelschen Kategorien *exakt*, wenn er exakte Sequenzen auf exakte Sequenzen abbildet. Äquivalent dazu erhält (vertauscht) ein ko- (kontra-) varianter exakter Funktor Kerne und Kokerne beliebiger Morphismen. Im allgemeinen sind weder Tensor- noch Hom-Funktoren exakt.

5.54. DEFINITION. Es seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  abelsche Kategorien. Ein kovarianter Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt *rechtsexakt*, wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0 \quad (*)$$

in  $\mathcal{C}$  die Sequenz

$$FA' \rightarrow FA \rightarrow FA'' \rightarrow 0$$

in  $\mathcal{D}$  exakt ist.

Ein kontravarianter Funktor  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt *linksexakt*, wenn

$$0 \rightarrow GA'' \rightarrow GA \rightarrow GA'$$

für jede kurze exakte Sequenz (\*) exakt ist.

Von den vier möglichen Kombinationen haben wir nur die zwei eingeführt, die wir im Folgenden benutzen wollen.

5.55. PROPOSITION. *Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins, und es sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann ist Tensorieren mit  $M$  ein rechtsexakter kovarianter Funktor  $\otimes M: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Mod}_R$ , und der Hom-Funktor  $\text{hom}(\cdot, M): \text{Mod}_R \rightarrow \text{Mod}_R$  ist ein linksexakter kontravarianter Funktor.*

5.56. BEISPIEL. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2 \cdot} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0.$$

(1) Tensorieren mit  $\mathbb{Z}/2$  liefert eine exakte Sequenz

$$\underbrace{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2}_{\cong \mathbb{Z}/2} \xrightarrow{0 \cdot} \underbrace{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2}_{\cong \mathbb{Z}/2} \xrightarrow{\cong} \underbrace{\mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/2}_{\cong \mathbb{Z}/2} \rightarrow 0,$$

und der linke Morphismus hat Kern  $\mathbb{Z}/2 \neq 0$ .

(2) Die Funktoren  $\text{hom}(\mathbb{Z}/2, \cdot)$  und  $\text{hom}(\cdot, \mathbb{Z})$  liefern exakte Sequenzen mit Kokern  $\mathbb{Z}/2$ :

$$0 \rightarrow \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z})}_{\cong 0} \rightarrow \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z})}_{\cong 0} \xrightarrow{0 \cdot} \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)}_{\cong \mathbb{Z}/2}$$

und

$$0 \rightarrow \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z})}_{\cong 0} \rightarrow \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{\cong \mathbb{Z}} \xrightarrow{2 \cdot} \underbrace{\text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{\cong \mathbb{Z}}.$$

Man kann die obigen Sequenzen in natürlicher Weise zu langen exakten Sequenzen fortsetzen. Dazu benötigt man die folgenden Begriffe, von denen wir wieder nur zwei explizit einführen wollen.

5.57. DEFINITION. Ein *kovarianter homologischer  $\delta$ -Funktorkomplex*  $(F_\bullet, \partial_\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  besteht aus einer Folge  $(F_k)_{k \geq 0}$  von Funktoren  $F_k: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und einer Folge von natürlichen Transformationen  $\partial_k$ , so dass für jede kurze exakte Sequenz (\*) die natürliche Sequenz

$$\cdots \rightarrow F_1 A' \rightarrow F_1 A \rightarrow F_1 A'' \xrightarrow{\partial_1} F_0 A' \rightarrow F_0 A \rightarrow F_0 A'' \rightarrow 0$$

in  $\mathcal{D}$  exakt ist.

Analog ordnet ein *kontravarianter kohomologischer  $\delta$ -Funktorkomplex*  $(G^\bullet, \delta^\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  jeder kurzen exakten Sequenz (\*) in  $\mathcal{C}$  eine natürliche lange exakte Sequenz zu:

$$0 \rightarrow G_0 A'' \rightarrow G_0 A \rightarrow G_0 A' \xrightarrow{\delta^0} G_1 A'' \rightarrow G_1 A \rightarrow G_1 A' \rightarrow \cdots$$

Somit ist  $\partial_k$  also eine natürliche Transformation zwischen zwei Funktoren von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in  $\mathcal{C}$  in die Kategorie  $\mathcal{D}$ ; in diesem Sinne ist auch die Natürlichkeit der Sequenz zu verstehen. Man beachte die Ähnlichkeit zwischen der obigen Definition und der Homologiesequenz aus Definition 5.9 (1). In der Konstruktion werden wir — wie in der CW-Homologie — Kettenkomplexe verwenden. Es gibt aber auch einen abstrakteren Rahmen von Modellkategorien, in dem sich diese Analogien formal beschreiben lassen. Die folgende Definition geht analog für jede der vier möglichen Varianten von  $\delta$ -Funktoren.

5.58. DEFINITION. Ein *Morphismus*  $\tau_\bullet: (F_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (G_\bullet, \partial_\bullet)$  zwischen kovarianten homologischen  $\delta$ -Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$  ist eine Folge natürlicher Transformationen  $\tau_k: F_k \rightarrow G_k$ , so dass für jede kurze exakte Sequenz (\*) in  $\mathcal{C}$  und für alle  $k \geq 1$  das folgende Diagramm in  $\mathcal{D}$  kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F_k A'' & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} A' \\ \tau_k \downarrow & & \downarrow \tau_{k-1} \\ G_k A'' & \xrightarrow{\partial_k} & G_{k-1} A' \end{array}$$

Morphismen zwischen kontravarianten kohomologischen  $\delta$ -Funktoren werden entsprechend definiert.

Ein kovarianter homologischer  $\delta$ -Funktorkomplex  $(F_\bullet, \partial_\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt *universell*, wenn es zu jedem kovarianten homologischen  $\delta$ -Funktorkomplex  $(G_\bullet, \partial_\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und jeder natürlichen Transformation  $\tau_0: G_0 \rightarrow F_0$  einen eindeutigen Morphismus  $\tau_\bullet: (G_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (F_\bullet, \partial_\bullet)$  gibt, der  $\tau_0$  fortsetzt. Ein kontravarianter kohomologischer  $\delta$ -Funktorkomplex  $(G^\bullet, \delta^\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt *universell*, wenn es zu jedem kontravarianten kohomologischen  $\delta$ -Funktorkomplex  $(K^\bullet, \delta^\bullet): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und jeder natürlichen Transformation  $\tau_0: G^0 \rightarrow K^0$  einen eindeutigen Morphismus  $\tau_\bullet: (G^\bullet, \delta^\bullet) \rightarrow (K^\bullet, \delta^\bullet)$  gibt, der  $\tau_0$  fortsetzt.

Sei  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein rechtsexakter kovarianter Funktor. Ein *linksderivierter Funktor* zu  $F$  ist ein universeller kovarianter homologischer  $\delta$ -Funktorkomplex  $(F_\bullet, \partial_\bullet)$  mit  $F_0 = F$ . Sei  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein linksexakter kontravarianter Funktor. Ein *rechtsderivierter Funktor* zu  $G$  ist ein universeller kontravarianter kohomologischer  $\delta$ -Funktorkomplex  $(G^\bullet, \delta^\bullet)$  mit  $G^0 = G$ .

5.59. BEMERKUNG. Aufgrund der Universalität sind derivierte Funktoren bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt. Die Notation (Indizes für „homologische“ Funktoren stehen unten, für „kohomologische“ Funktoren oben) und Bezeichnungen (alle Pfeile zeigen nach rechts, woraus sich die Bezeichnungen links-/rechtsexakt und links-/rechtsderiviert ableiten) stimmen mit dem allgemeinen Sprachgebrauch überein, und daher nicht immer mit unseren bisherigen Konventionen. In Zukunft werden wir die „Verbindungshomomorphismen“  $\partial_\bullet$  beziehungsweise  $\delta^\bullet$  in der Notation oft weglassen.

Den Begriff der freien Auflösung führen wir in Proposition 5.64 (1) ein.

5.60. SATZ UND DEFINITION. *Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Dann besitzt jeder rechtsexakte kovariante Funktor  $F: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Mod}_R$  einen linksderivierten Funktor  $(F_\bullet, \partial_\bullet)$ , und jeder linksexakte kontravariante Funktor  $G^\bullet: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Mod}_R$  besitzt einen rechtsderivierten Funktor  $(G^\bullet, \delta^\bullet)$ . Für freie  $R$ -Moduln  $A$  gilt  $F_k(A) = G^k(A) = 0$  für alle  $k \geq 1$ .*

*Wenn  $R$  ein Hauptidealring ist, gilt  $F_k = G^k = 0$  für alle  $k \geq 2$ . Sei  $a: A_1 \rightarrow A_0$  eine freie Auflösung von  $A$ , dann existieren natürliche Isomorphismen*

$$\begin{aligned} F_0 A &\cong \text{coker}(Fa: FA_1 \rightarrow FA_0), & F_1 A &\cong \ker(Fa: FA_1 \rightarrow FA_0), \\ G^0 A &\cong \ker(Ga: GA_0 \rightarrow GA_1), & \text{und} & G^1 A &\cong \text{coker}(Ga: GA_0 \rightarrow GA_1). \end{aligned}$$

*Wenn  $R = \mathbb{k}$  ein Körper ist, gilt  $F_k = G^k = 0$  für alle  $k \geq 1$ , folglich sind  $F$  und  $G$  exakt.*

5.61. DEFINITION. *Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Der linksderivierte Funktor zu  $\otimes_R M$  heißt das *Torsionsprodukt*  $\text{Tor}_\bullet^R(\cdot, M)$ . Der rechtsderivierte Funktor zu  $\text{hom}_R(\cdot, M)$  heißt das *Erweiterungsprodukt*  $\text{Ext}_R^\bullet(\cdot, M)$ .*

Wir werden nur den Spezialfall eines Hauptidealringes betrachten, wobei wir an  $R = \mathbb{Z}$  und  $\mathcal{C} = \text{Mod}_{\mathbb{Z}} = \mathcal{A}b$  denken. In diesem Fall schreiben wir  $\text{Tor}_R$  für  $\text{Tor}_1^R$  und  $\text{Ext}_R$  für  $\text{Ext}_R^1$ ; für  $\text{Tor}_0^R$  und  $\text{Ext}_R^0$  schreiben wir natürlich  $\otimes_R M$  beziehungsweise  $\text{hom}_R(\cdot, M)$ . Für beliebige  $R$  dürfen wir jeden  $R$ -Modul  $M$  als abelsche Gruppe, also als  $\mathbb{Z}$ -Modul auffassen. Das liefert uns Funktoren  $\otimes_{\mathbb{Z}} M$ ,  $\text{hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, M)$ ,  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\cdot, M)$ ,  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\cdot, M): \mathcal{A}b \rightarrow \text{Mod}_R$ .

In Definition 5.21 haben wir Kettenkomplexe und -abbildungen kennengelernt. Die folgende Definition liefert das algebraische Pendant zum Begriff einer Homotopie zwischen stetigen Abbildungen. Als Motivation können wir die Kettenabbildung betrachten, die von einer zellulären Homotopie induziert wird, siehe Übung 5.99.

5.62. DEFINITION. Seien  $f_\bullet, g_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (E_\bullet, e_\bullet)$  zwei Kettenabbildungen vom Grad  $a$ . Eine *Kettenhomotopie*  $h_\bullet: f_\bullet \sim g_\bullet$  zwischen  $f_\bullet$  und  $g_\bullet$  ist eine Familie von Abbildungen  $h_k: C_k \rightarrow E_{k+a+1}$ , so dass

$$g_k - f_k = h_{k-1} \circ d_k + e_{k+a+1} \circ h_k: C_k \rightarrow E_{k+a}.$$

Falls eine solche Kettenhomotopie existiert, heißen  $f_\bullet$  und  $g_\bullet$  *kettenhomotop*.

5.63. BEMERKUNG. Wenn eine Kettenhomotopie  $h_\bullet: f_\bullet \sim g_\bullet$  existiert, dann induzieren  $f_\bullet$  und  $g_\bullet$  die gleiche Abbildung

$$f_* = g_*: H_\bullet(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow H_\bullet(E_\bullet, e_\bullet),$$

denn für alle Zyklen  $c \in Z_k \subset C_k$  erhalten wir einen Rand

$$g_k(c) - f_k(c) = h_{k-1}(\underbrace{d_k(c)}_{=0}) + e_{k+a+1}(h_k(c)).$$

Man überprüft außerdem leicht, dass Kettenhomotopie eine Äquivalenzrelation auf Kettenabbildungen definiert, die mit der Verkettung von Kettenabbildungen verträglich ist, siehe Übung 5.98.

In Analogie zur Homotopiekategorie topologischer Räume können wir daher jetzt eine Homotopiekategorie  $\mathcal{HCh}_{\mathcal{C}}$  von Kettenkomplexen über einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  definieren. In Analogie zu den schwachen Äquivalenzen aus Definition 4.26 definiert man hier schwache Äquivalenzen als Kettenabbildungen, die Isomorphismen auf allen Homologiegruppen induzieren. Diese Konstruktion liefert die Grundlage für die sogenannte *derivierete Kategorie* in der homologischen Algebra.

5.64. PROPOSITION. *Es sei  $R$  ein Hauptidealring. Dann gilt*

- (1) *Jeder Untermodul eines freien Moduls ist frei. Sei insbesondere  $M$  ein  $R$ -Modul, dann existiert eine freie Auflösung  $a$  von  $M$ , das heißt, eine kurze exakte Sequenz der Form*

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{p} R^{\oplus E} \xleftarrow{a} R^{\oplus F} \longleftarrow 0.$$

- (2) Sei  $f: M \rightarrow N$  linear, sei  $a: M_1 \rightarrow M_0$  eine freie Auflösung von  $M$ , und sei die untere Zeile im folgenden Diagramm exakt. Dann gibt es Abbildungen  $f_i: M_i \rightarrow N_i$  für  $i = 0, 1$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & M & \xleftarrow{p} & M_0 & \xleftarrow{a} & M_1 & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \\ 0 & \longleftarrow & N & \xleftarrow{q} & N_0 & \xleftarrow{b} & N_1 & \longleftarrow & N_2 & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

kommutiert.

- (3) Je zwei Kettenabbildungen  $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  in (2) sind kettenhomotop.

BEWEIS. Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Wir wählen eine Erzeugermenge  $E$  von  $M$  und erhalten eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{f} R^{\oplus E} \longleftarrow \ker(f) \longleftarrow 0.$$

Wenn der Untermodul  $\ker(f)$  von  $R^{\oplus E}$  wieder frei ist, wählen wir eine Erzeugermenge  $F$  von  $\ker(f)$  und haben somit eine freie Auflösung von  $M$  konstruiert. Die Elemente von  $E$  und  $F$  nennt man daher auch Erzeuger und Relationen

Sei also  $U \subset R^{\oplus E}$  ein beliebiger Untermodul. Wir bezeichnen Potenzmengen mit  $\mathcal{P}$  und betrachten die Menge

$$\mathcal{F} = \{ (A, B) \mid A \subset E, B \text{ Basis von } U \cap R^{\oplus A} \} \subset \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(R^{\oplus E}).$$

Auf der Menge  $\mathcal{F}$  definieren wir eine Halbordnung  $\prec$  durch

$$(A, B) \prec (C, D) \quad \text{genau dann, wenn} \quad A \subset C \text{ und } B \subset D.$$

Um mit Zorns Lemma ein Element der Form  $(E, F) \in \mathcal{F}$  zu finden, reicht es, die folgenden drei Behauptungen zu prüfen.

- Die Menge  $\mathcal{F}$  ist nicht leer, denn es gilt  $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{F}$ .
- Es sei  $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$  eine Kette, das heißt, für  $(A, B)$  und  $(C, D) \in \mathcal{K}$  gilt  $(A, B) \prec (C, D)$  oder  $(C, D) \prec (A, B)$ . Dann setzen wir

$$I = \bigcup_{(A,B) \in \mathcal{K}} A \quad \text{und} \quad J = \bigcup_{(A,B) \in \mathcal{K}} B.$$

Man kann zeigen, dass  $J$  eine Basis von  $U \cap R^{\oplus I}$  ist, und somit  $(I, J) \in \mathcal{F}$ . Außerdem gilt  $(A, B) \prec (I, J)$  für alle  $(A, B) \in \mathcal{K}$ . Also ist  $(I, J)$  eine obere Schranke von  $\mathcal{K}$ .

- Sei schließlich  $(A, B) \in \mathcal{F}$  mit  $A \neq E$ , dann suchen wir ein Element  $(A', B') \in \mathcal{F}$ , das unter „ $\prec$ “ echt größer als  $(A, B)$  ist. Wir wählen einen Erzeuger  $e \in E \setminus A$ , und setzen  $A' = A \cup \{e\}$ . Falls  $U \cap R^{\oplus A'} \subset R^{\oplus A}$ , setzen wir  $B' = B$  und sind fertig.

Ansonsten betrachten wir die Teilmenge

$$S = \{ s \in R \mid \text{es gibt } m \in R^{\oplus A} \text{ mit } m + es \in U \}.$$

Dann ist  $\{0\} \neq S \subset R$  ein Ideal. Da  $R$  ein Hauptidealring ist, folgt  $S = (s_0)$  für einen Erzeuger  $0 \neq s_0 \in S$ , also existiert  $b_0 = m_0 + es_0 \in U$  mit  $m_0 \in R^{\oplus A}$ . Man kann zeigen, dass  $B' = B \cup \{b_0\}$  eine Basis von  $U \cap R^{\oplus A'}$  ist, also gilt  $(A', B') \in \mathcal{F}$ .

Damit ist (1) bewiesen.

Zu (2) seien  $E, F$  Basen von  $M_0$  beziehungsweise  $M_1$ . Da die Abbildung  $N_0 \rightarrow N$  surjektiv ist, können wir zu jedem  $e \in E$  ein Element  $f_0(e) \in N_0$  mit  $q(f_0(e)) = f(p(e))$  wählen. Da  $E$  eine Basis ist, haben wir auf dieser ein  $f_0$  so definiert, dass das linke Quadrat im Diagramm in (2) kommutiert. Sei jetzt  $v \in F$ , dann folgt  $f_0(a(v)) \in \ker q$ , also existiert wegen Exaktheit

ein  $f_1(v) \in N_1$  mit  $b(f_1(v)) = f_0(a(v))$ . Somit haben wir  $f_1$  so bestimmt, dass auch das rechte Quadrat im Diagramm in (2) kommutiert.

Zu (3) seien  $f_\bullet$  und  $f'_\bullet$  wie oben gegeben. Für jedes  $e \in E$  gilt  $f'_0(e) - f_0(e) \in \ker q$ , also können wir  $h_0(e) \in N_1$  so wählen, dass  $f'_0(e) - f_0(e) = b(h_0(e))$ . Für jedes  $v \in N_1$  gilt dann

$$b(f'_1(v) - f_1(v) - h_0(a(v))) = (f'_0(a(v)) - f_0(a(v))) - (f'_0(a(v)) - f_0(a(v))) = 0,$$

also finden wir  $h_1(v) \in N_2$ , so dass

$$f'_1(v) - f_1(v) = h_0(a(v)) + b(h_1(v)). \quad \square$$

Jetzt fehlt uns nur noch ein Lemma.

5.65. LEMMA (Schlangen-). *Es seien  $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ ,  $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$  und  $(C''_\bullet, \partial''_\bullet)$  Komplexe in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ , und es sei*

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C'_k & \hookrightarrow & C_k & \twoheadrightarrow & C''_k \longrightarrow 0 \\ & & \partial'_k \downarrow & & \partial_k \downarrow & & \partial''_k \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C'_{k-1} & \hookrightarrow & C_{k-1} & \twoheadrightarrow & C''_{k-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Dann existiert eine Folge natürlicher Transformationen  $d_k: H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet) \rightarrow H_{k-1}(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ , so dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$\dots \longrightarrow H_k(C_\bullet, \partial_\bullet) \longrightarrow H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet) \xrightarrow{d_k} H_{k-1}(C'_\bullet, \partial'_\bullet) \longrightarrow H_{k-1}(C_\bullet, \partial_\bullet) \longrightarrow \dots$$

Wenn man den simplizialen oder singulären Zugang zur Homologie wählt, dann konstruiert man zu jedem Raum einen Kettenkomplex, dessen Homologie die Homologie des Raumes ergibt. In diesem Zusammenhang liefert das Schlangenlemma die Verbindungshomomorphismen aus Definition 5.9. Daher nennen wir die im Lemma konstruierten natürlichen Transformationen ebenfalls *Verbindungshomomorphismen*. Der Name des Lemmas ergibt sich, wenn man im obigen Diagramm an die Stelle der Komplexe ihre Homologien einträgt und die Verbindungshomomorphismen mit einzeichnet.

BEWEIS. Dieser Beweis ist eine Diagrammjagd. Um das Bild von  $[c'_k] \in H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet)$  zu bestimmen, wählen wir zunächst ein Urbild  $c_k \in C_k$  von  $c'_k$ , dann bildet  $\partial_k c_k$  auf  $0 \in C''_{k-1}$  ab, also erhalten wir ein Urbild  $c'_{k-1} \in C'_{k-1}$  von  $\partial_k c_k$ . Wir setzen  $d_k[c'_k] = [c'_{k-1}]$  und lassen den Rest als Übung 5.101.  $\square$

BEWEIS VON SATZ 5.60. Wir beschränken uns — wie schon gesagt — auf den Fall eines Hauptidealringes.

Sei  $F$  ein rechtsexakter Funktor und  $A$  ein  $R$ -Modul. Nach Proposition 5.64 (1) existiert eine freie Auflösung  $a: A_1 \rightarrow A_0$ . Wir betrachten den Komplex

$$0 \longleftarrow FA_0 \xleftarrow{Fa} FA_1 \longleftarrow 0,$$

und für  $i = 0, 1$  setzen wir

$$F_i A = H_i(FA_\bullet, Fa).$$

Wegen Proposition 5.64 (2), (3), angewandt auf  $f = \text{id}_A$ , erhalten wir zu jeder anderen freien Auflösung eine eindeutige Abbildung zwischen den zugehörigen Homologien. Daher ist  $F_i A$  bis auf eindeutige Isomorphismen wohldefiniert.

Angewandt auf  $f: A \rightarrow B$  liefert Proposition 5.64 (2) eine Folge von Abbildungen  $f_i: A_i \rightarrow B_i$ , und daher

$$F_i f = f_{i*}: H_i(FA_\bullet, Fa) \rightarrow H_i(FB_\bullet, Fb) .$$

Da die  $f_i$  nach Proposition 5.64 (3) bis auf Kettenhomotopie eindeutig bestimmt sind, ist  $F_i f$  nach Bemerkung 5.63 wohldefiniert. Genauso beweist man auch die Funktorialität der  $F_i$ .

Da  $F$  rechtsexakt ist (beachte, dass unsere Pfeile gerade falsch herum zeigen), ist die Sequenz

$$0 \longleftarrow FA \longleftarrow FA_0 \xleftarrow{Fa} FA_1$$

exakt, und es folgt

$$FA = FA_0 / \text{im}(Fa) = H_0(FA_\bullet, \partial_\bullet) = F_0 A ,$$

somit setzt die Folge  $F_\bullet$  den Funktor  $F = F_0$  fort. Außerdem gilt

$$F_1(A) = \ker(Fa) \subset F(A_1) .$$

Um zu zeigen, dass  $F_\bullet$  ein  $\delta$ -Funktorkomplex ist, betrachte die kurze exakte Sequenz (\*). Ähnlich wie im Beweis von Proposition 5.64 findet man freie Auflösungen von  $A'$ ,  $A$  und  $A''$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A'_1 & \hookrightarrow & A_1 & \twoheadrightarrow & A''_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow a' & & \downarrow a & & \downarrow a'' \\ 0 & \longrightarrow & A'_0 & \hookrightarrow & A_0 & \twoheadrightarrow & A''_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

exakte Zeilen hat. Da die oberen zwei Zeilen aus freien Modulen bestehen, spalten sie, und bleiben bei Anwendung von  $F$  exakt. Wir wenden  $F$  auf die oberen zwei Zeilen an und erhalten eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Das Schlangenlemma 5.65 liefert den Verbindungshomomorphismus

$$\partial: F_1 A'' = H_1(FA''_\bullet, Fa'') \longrightarrow H_0(FA'_\bullet, Fa') = F_0 A' .$$

Zur Natürlichkeit von  $\partial$  sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

exakter Sequenzen gegeben. Wir wiederholen die obige Konstruktion für beide Sequenzen. Dann kann man zwischen den beiden Diagrammen von Auflösungen Morphismen so bestimmen, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Die Natürlichkeit von  $\partial$  folgt jetzt aus der Natürlichkeit des Verbindungshomomorphismus im Schlangenlemma.

Wenn  $A$  frei ist, wählen wir  $A_0 = A$  und  $A_1 = 0$ , und erhalten  $F_1(A) = 0$ . Da jeder Vektorraum eine Basis hat, folgt insbesondere  $F_1 = 0$ , falls  $R = \mathbb{k}$  ein Körper ist. Aber dann ist  $F = F_0$  exakt.



Wir müssen noch Universalität beweisen. Das passiert in zwei Schritten. Sei zunächst  $(F'_\bullet, \partial'_\bullet)$  ein weiterer  $\delta$ -Funktorkomplex mit  $F'_0 = F$ . Wir wählen eine freie Auflösung  $a: A_1 \rightarrow A_0$  von  $A$ . Anwenden von  $F_\bullet$  und  $F'_\bullet$  auf die zugehörige kurze exakte Sequenz liefert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F'_1(A_0) & \longrightarrow & F'_1(A) & \xrightarrow{\partial'_1} & F(A_1) & \xrightarrow{Fa} & F(A_0) & \longrightarrow & F(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \tau_A \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ & & 0 & \longrightarrow & F_1(A) & \xrightarrow{\partial} & F(A_1) & \xrightarrow{Fa} & F(A_0) & \longrightarrow & F(A) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Hierbei haben wir  $F_1(A_0) = F_1(A_1) = 0$  benutzt. Da  $F_1(A) = \ker(Fa)$ , existiert ein eindeutiger Morphismus  $\tau_A$ , so dass das obige Diagramm kommutiert. Indem wir Proposition 5.64 (2), (3) zum einen auf verschiedene freie Auflösungen von  $A$ , und zum anderen auf Morphismen  $A \rightarrow B$  anwenden, sehen wir, dass  $\tau: F_1 \rightarrow F'_1$  wohldefiniert und natürlich ist.

Wir betrachten wieder die kurze exakte Sequenz  $*$ . Nach Proposition 5.64 (2) erhalten wir eine Sequenzabbildung von einer beliebigen freien Auflösung von  $A''$  nach  $*$ . Wir wenden  $(F'_\bullet, \partial'_\bullet)$  und  $(F_\bullet, \partial_\bullet)$  auf das resultierende kommutierende Diagramm kurzer exakter Sequenzen an und erhalten

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F'_1(A''_0) & \longrightarrow & F'_1(A'') & \xrightarrow{\partial'_1} & F(A''_1) & \xrightarrow{Fa''} & F(A''_0) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \tau_{A''} \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_1(A) & \longrightarrow & F'_1(A'') & \xrightarrow{\partial'_1} & F(A'_1) & \xrightarrow{Fa''} & F(A''_0) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & F_1(A'') & \xrightarrow{\partial} & F(A''_1) & \xrightarrow{Fa''} & F(A''_0) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \\ & & 0 & \longrightarrow & F_1(A'') & \xrightarrow{\partial} & F(A'_1) & \longrightarrow & F(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Zu zeigen ist die Kommutativität des vorderen mittleren Quadrats. Sie ergibt sich, da im mittleren Würfel alle anderen Seiten nach Konstruktion kommutieren. Daher liefert  $\tau$  einen Morphismus von  $\delta$ -Funktorkomplexen.

Sei schließlich  $(G'_\bullet, \partial'_\bullet)$  ein beliebiger kovarianter homologischer  $\delta$ -Funktorkomplex. Die obige Konstruktion liefert einen Morphismus zum universellen kovarianten homologischen  $\delta$ -Funktorkomplex  $(G_\bullet, \partial_\bullet)$  zu  $G = G'_0$ , den wir wie oben konstruieren. Eine natürliche Transformation  $\tau: G \rightarrow F$ , angewandt auf freie Auflösungen, liefert  $\tau_\bullet: (G_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (F_\bullet, \partial_\bullet)$ , und zusammensetzen dieser Morphismen liefert den gesuchten Morphismus von  $\delta$ -Funktorkomplexen  $(G'_\bullet, \partial'_\bullet) \rightarrow (F_\bullet, \partial_\bullet)$ . Damit ist alles über  $(F_\bullet, \partial_\bullet)$  gezeigt, was wir beweisen wollten.

Sei jetzt  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein linksexakter kontravarianter Funktor. Sei  $a: A_1 \rightarrow A_0$  eine freie Auflösung von  $A$ . Wir wenden  $G$  an und erhalten  $G^\bullet$  als Kohomologie des entstehenden Komplexes. Die gleichen Argumente wie oben liefern eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G(A) \longrightarrow G(A_0) \xrightarrow{Ga} G(A_1) \longrightarrow G^1(A) \longrightarrow 0,$$

und für jede kurze exakte Sequenz  $(*)$  eine lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G(A'') \longrightarrow G(A) \longrightarrow G(A') \xrightarrow{\delta} G^1(A'') \longrightarrow G^1(A) \longrightarrow G^1(A') \longrightarrow 0.$$

Mit genau den gleichen kommutativen Diagrammen von kurzen exakten Sequenzen in  $\mathcal{C}$  wie oben beweisen wir analog alle gewünschten Eigenschaften von  $(G^\bullet, \delta^\bullet)$ . Aufgrund der Kontravarianz von  $G$  ergibt sich, dass  $(G^\bullet, \delta^\bullet)$  ein universeller kontravarianter kohomologischer  $\delta$ -Funktorkomplex ist.  $\square$

Nachdem wir die Existenz von Torsions- und Erweiterungsprodukt sichergestellt haben, geben wir noch einige Eigenschaften an. Beispiele werden in Übung 5.103 betrachtet.

5.66. PROPOSITION. Sei  $R$  ein Hauptidealring, und  $A, B$  seien  $R$ -Moduln.

- (1) Es gilt  $\text{Tor}(A, B) = 0$ , wenn  $A$  oder  $B$  frei ist.
- (2) Sei  $0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz, dann existiert eine natürliche lange Sequenz
 
$$0 \rightarrow \text{Tor}(A, B) \rightarrow \text{Tor}(A, C) \rightarrow \text{Tor}(A, D) \rightarrow A \otimes B \rightarrow A \otimes C \rightarrow A \otimes D \rightarrow 0.$$
- (3) Es gibt einen natürlichen Isomorphismus  $\text{Tor}_R(A, B) \cong \text{Tor}_R(B, A)$ .

BEWEIS. Wir lassen diesen Beweis als Übung 5.105. □

5.67. BEMERKUNG. Es sei  $R$  wieder ein Hauptidealring und  $A$  ein  $R$ -Modul. Wir definieren den Torsionsuntermodul von  $A$  als

$$\text{Tor}_R A = \{ a \in A \mid ra = 0 \text{ für ein } r \in R \setminus \{0\} \}.$$

Ein Modul heißt  $A$  heißt Torsionsmodul, wenn  $A = \text{Tor}_R A$ . Der Name „Torsionsprodukt“ rührt daher, dass

$$\text{Tor}_R(A, B) = \text{Tor}_R(\text{Tor}_R A, \text{Tor}_R B),$$

das Torsionsprodukt „sieht“ also nur die Torsionsanteile der Faktoren. Für endlich erzeugte  $R$ -Moduln folgt das aus dem Elementarteilersatz und den expliziten Berechnungen einiger Torsionsprodukte in Übung 5.103. Den allgemeinen Fall wollen wir jetzt nicht untersuchen, siehe dazu aber Übung 5.106.

Ein  $R$ -Modul  $A$  heißt *divisibel*, wenn zu jedem  $a \in A$  und jedem  $r \in R \setminus \{0\}$  ein  $b \in A$  mit  $a = rb$  existiert. Beispielsweise sind  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  divisible  $\mathbb{Z}$ -Moduln,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/n$  jedoch nicht. Die folgenden Eigenschaften des Erweiterungsproduktes geben wir ohne Beweis an. Den rechtsderivierten Funktor in (3) definiert man analog zu Definition 5.58.

5.68. PROPOSITION. Es sei  $R$  ein Hauptidealring, und  $A, B$  seien  $R$ -Moduln.

- (1) Es gilt  $\text{Ext}_R(A, B) = 0$ , wenn  $A$  frei oder  $B$  divisibel ist.
- (2) Es sei  $0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz, dann existiert eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{hom}_R(A, B) \rightarrow \text{hom}_R(A, C) \rightarrow \text{hom}_R(A, D) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_R(A, B) \rightarrow \text{Ext}_R(A, C) \rightarrow \text{Ext}_R(A, D) \rightarrow 0.$$

- (3) Der rechtsderivierte kovariante Funktor zu  $\text{hom}_R(A, \cdot)$  ist  $\text{Ext}_R(A, \cdot)$ .

5.69. BEMERKUNG. Der Name „Erweiterungsprodukt“ rührt daher, dass  $\text{Ext}_R(A, B)$  Erweiterungen von Moduln beschreibt. Eine Erweiterung von  $A$  durch  $B$  ist eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow 0$$

bis auf Isomorphie, wobei zwei solche Sequenzen isomorph heißen, wenn es eine Sequenzabbildung zwischen ihnen gibt, die auf  $A$  und  $B$  jeweils durch die Identität gegeben ist. Eine freie Auflösung von  $A$  liefert wegen Proposition 5.64 (2) eine bis auf Kettenhomotopie eindeutige Sequenzabbildung

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{a} & A_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & f \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A \longrightarrow 0. \end{array}$$

Insbesondere ist  $f \in \text{hom}(A_1, B)$  bis auf ein Element  $h \circ a$  mit  $h \in \text{hom}(A_0, B)$  wohlbestimmt, wir erhalten also eine Klasse  $[f] \in \text{coker}(\text{hom}(A_0, B) \rightarrow \text{hom}(A_1, B)) = \text{Ext}_R(A, B)$ . Man kann zeigen, die obige Zuordnung eine Bijektion von der Menge der Erweiterungen nach  $\text{Ext}_R(A, B)$  liefert.

## 5.g. Das Moore-Spektrum und ein universelles Koeffizienten-Theorem

Der Begriff „Koeffizienten“ hat in der Homologietheorie verschiedene Bedeutungen; eine, nämlich  $(\tilde{h}_k(S^0))_{k \in \mathbb{Z}}$ , haben wir in Abschnitt 5.b kennengelernt. In Abschnitt 5.c haben wir zelluläre Homologie betrachtet, hierbei handelte es sich um gewöhnliche Homologie mit Koeffizienten in einem Objekt  $M$  einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ . In diesem Abschnitt geht es darum, einen gegebenen Homologiefunktor zusätzlich mit Koeffizienten in einer gegebenen abelschen Gruppe  $A$  zu versehen. Im Falle der „gewöhnlichen“ Homologie mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen stimmen all diese Begriffe überein: wendet man die im Folgenden beschriebene Methode auf  $\tilde{H}_\bullet = \tilde{H}_\bullet(\cdot; \mathbb{Z})$  und die Gruppe  $A$  an, so erhält man  $\tilde{H}_\bullet(\cdot; A)$ .

Mit den Methoden aus diesem Abschnitt können wir einen Zusammenhang zwischen den Funktoren  $\tilde{h}_\bullet(\cdot; A)$  und  $\tilde{h}_\bullet$  mit und ohne Koeffizienten herstellen. Im nächsten Abschnitt sehen wir, dass dieses Resultat für gewöhnliche Homologie einen Spezialfall der Künneth-Formel für Produkte darstellt. Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und  $X$  ein topologischer Raum. Man könnte vermuten, dass  $H_k(X; M) \cong H_k(X) \otimes M$  gilt. Nach Beispiel 5.25 stimmt das beispielsweise für  $X = \mathbb{C}P^n$  oder  $X = \mathbb{H}P^n$ . Für  $X = \mathbb{R}P^n$ ,  $R = \mathbb{Z}$  und  $M = \mathbb{Z}/2$  liefert Beispiel 5.26 jedoch ein anderes Ergebnis.

5.70. DEFINITION. Ein *Moore-Raum* zur abelschen Gruppe  $A$  in Dimension  $n \geq 1$  ist ein punktierter CW-Komplex  $M(A, n)$  (oder kurz  $MA_n$ ) in  $kw\mathcal{H}_+$  mit abelscher Fundamentalgruppe, so dass  $\tilde{H}_k(M(A, n)) = 0$  für alle  $k \neq n$ , zusammen mit einem Isomorphismus

$$\varphi: \tilde{H}_k(M(A, n)) \xrightarrow{\cong} A.$$

Ein *Moore-Spektrum* zur abelschen Gruppe  $A$  ist ein Spektrum  $\mathbb{M}A = (MA_n, s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , für das ein  $n_0$  existiert, so dass  $MA_n$  für alle  $n \geq n_0$  ein Moore-Raum mit  $\varphi_n: \tilde{H}_n(MA_n) \xrightarrow{\cong} A$  ist, so dass für alle  $n \geq n_0$  das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(MA_n) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_{n+1}(SMA_n) \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow s_{n*} \\ A & \xleftarrow{\varphi_{n+1}} & \tilde{H}_{n+1}(MA_{n+1}). \end{array}$$

Der obere Pfeil im Diagramm bezeichnet den Isomorphismus aus Satz 5.17. Da  $\pi_1(M(A, n))$  abelsch ist, folgt für  $k \leq n$  aus dem Satz 5.47 von Hurewicz induktiv, dass

$$\pi_k(M(A, n)) \cong \tilde{H}_k(M(A, n)) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } k < n. \end{cases}$$

Insbesondere ist  $M(A, n)$  stets  $(n-1)$ -zusammenhängend nach Bemerkung 5.48.

Da die Räume  $MA_n$  CW-Komplexe sind, sind  $SMA_n$  und  $MA_{n+1}$  homotopieäquivalent für alle  $n \geq 1$  nach dem homologischen Satz 5.50 von Whitehead. Insbesondere ist jedes Moore-Spektrum ein Suspensionsspektrum, und wir können  $MA_{n_0+k} = S^k MA_{n_0}$  wählen.

5.71. BEISPIEL. Wir betrachten einfache Beispiele von Moore-Räumen.

- (1) Die Sphären  $S^k$  sind Moore-Räume für  $\mathbb{Z}$  in Dimension  $k$ , das Sphärenspektrum  $\mathbb{S}$  ist also ein Moore-Spektrum  $\mathbb{M}\mathbb{Z}$ .
- (2) Nach Beispiel 5.26 (1) ist die reelle projektive Ebene  $\mathbb{R}P^2$  ein Moore-Raum  $M(\mathbb{Z}/2, 1)$ .

5.72. PROPOSITION. *Es sei  $A$  eine abelsche Gruppe.*

- (1) *Dann existieren Moore-Räume  $MA_n$  für alle  $n \geq 2$ .*

- (2) Sei  $F: A \rightarrow B$  ein Gruppenhomomorphismus, sei  $n \geq 2$ , und seien  $MA_n, MB_n$  Moore-Räume mit Isomorphismen  $\varphi_n: \tilde{H}_n(MA_n) \rightarrow A$  und  $\psi_n: \tilde{H}_n(MB_n) \rightarrow B$ , dann existiert eine Abbildung  $f: MA_n \rightarrow MB_n$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(MA_n) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_n(MB_n) \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow \psi_n \\ A & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

kommutiert.

- (3) Die Moore-Räume  $MA_n$  sind für  $n \geq 2$  bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt.

Diese Proposition ist das topologische Analogon zu Proposition 5.64 (1), (2). Man beachte, dass die Abbildung  $f$  im Allgemeinen nicht eindeutig durch  $F$  bestimmt ist; Proposition 5.64 (3) überträgt sich also nicht, siehe Übung 5.109. Insbesondere sind auch die Homotopieäquivalenzen zwischen zwei Moore-Räumen zur gleichen Gruppe  $A$  in der gleichen Dimension  $n$  nicht notwendigerweise bis auf Homotopie eindeutig. Es kommt noch schlimmer: es gibt keinen Funktor  $\mathcal{A}b \rightarrow kw\mathcal{H}_+$ , der jeder abelschen Gruppe  $A$  einen Moore-Raum  $MA_n$  zuordnet. Als Beispiel hat  $\text{id}_{\mathbb{R}P^2}$  Ordnung 4 in  $[\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2]^s$ , während 1 Ordnung 2 in  $\text{hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$  hat. Insbesondere erhalten wir kein Analogon zum Satz 5.42 über Eilenberg-MacLane-Räume.

BEWEIS. Sei  $A$  eine abelsche Gruppe. Es sei  $a: \mathbb{Z}^{\oplus K} \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus J}$  eine freie Auflösung von  $A$  wie in Proposition 5.64 (1). Wir erhalten einen Moore-Raum  $MA_n$  zu  $A$  als CW-Komplex mit je einer  $n$ -Zelle  $e_j^n$  für jeden Erzeuger  $j \in J$  von  $A$ , und je einer  $(n+1)$ -Zelle  $e_k^{n+1}$  für jede Relation  $k \in K$ . Dabei ist die Verklebeabbildung  $\varphi_k$  so gewählt, dass

$$\varphi_{k*}: \tilde{H}^n(S^n) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{H}^n\left(\bigvee_{j \in J} S^n\right) \cong \mathbb{Z}^{\oplus J}$$

den Erzeuger von  $\mathbb{Z}$  auf die entsprechende Relation in  $\mathbb{Z}^{\oplus J}$  abbildet. Nach Satz 5.23 ist  $MA_n$  ein Moore-Raum mit  $\tilde{H}_n(MA_n) \cong A$ , und (1) ist bewiesen. Wir können  $MA_n$  auch als Abbildungskegel  $C\varphi$  der Abbildung

$$\varphi: \bigvee_{k \in K} S^n \longrightarrow \bigvee_{j \in J} S^n$$

auffassen.

Zu (2) sei  $F: A \rightarrow B$  gegeben, und sei  $a$  eine freie Auflösung von  $A$  wie oben. Sei  $M(A, n)$  wie oben konstruiert, und sei  $M(B, n)$  ein Moore-Raum zu  $B$  gemäß Definition 5.73. Mit Hilfe von  $F$  finden wir eine Abbildung

$$f_n: \bigvee_{j \in J} S^n \rightarrow M(B, n),$$

indem wir für jeden Erzeuger  $j \in J$  von  $A$  die Abbildung  $f_n$  auf dem entsprechenden Summanden  $S^n$  durch einen Repräsentanten von  $F(j) \in A \cong \pi_n M(B, n)$  vorgeben. Dann liegen alle Bilder von Relationen  $k \in K$  unter  $a$  im Kern von  $f_{n*}: \mathbb{Z}^{\oplus J} \cong \pi_n(\bigvee_{j \in J} S^n) \rightarrow \pi_n M(B, n)$ , und wir können  $f_n$  zu  $f: M(A, n) \rightarrow M(B, n)$  fortsetzen.

Sei insbesondere  $F = \text{id}_A$ , und sei  $M(B, n)$  ein weiterer Moore-Raum zu  $B = A$ . Für  $n \geq 2$  folgt (3) aus (2) und dem Satz 5.50 von Whitehead.  $\square$

Als Beispiel schreiben wir

$$\mathbb{Q} = \langle e_1, e_2, \dots \rangle / \langle e_1 - 2e_2, e_2 - 3e_3, \dots \rangle,$$

wobei der Erzeuger  $e_k$  jeweils auf  $\frac{1}{k!} \in \mathbb{Q}$  abgebildet wird. So erhalten wir einen Moore-Raum  $M\mathbb{Q}_n$  mit je abzählbar vielen Zellen in den Dimensionen  $n$  und  $n+1$ .

Sei jetzt  $MA_n$  ein Moore-Raum zur abelschen Gruppe  $A$  in Dimension  $n$ . Nach Lemma 5.34 erhalten wir einen Homologiefunktor  $\tilde{h}_\bullet$  mit

$$\tilde{h}_k(X) = \tilde{H}_{k+n}(MA_n \wedge X)$$

für alle Räume  $X$ . Wir bestimmen die Koeffizienten von  $\tilde{h}_\bullet$  und erhalten

$$\tilde{h}_k(S^0) = \tilde{H}_{k+n}(MA_n) = \begin{cases} A & \text{falls } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 5.43 (2) liefert einen natürlichen Isomorphismus

$$\tilde{h}_\bullet \cong \tilde{H}_\bullet(\cdot; A).$$

Das heißt, sobald wir das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zu  $\mathbb{Z}$  konstruiert haben, können wir alle weiteren gewöhnlichen Homologiefunktoren mit Werten in  $\mathcal{A}b$  mit Hilfe von Moore-Räumen erhalten. Dazu reicht ein einzelner Moore-Raum aus; wir brauchen also nicht das gesamte Moore-Spektrum zu betrachten. Mit Beispiel 5.71 erhalten wir

$$\tilde{H}_k(X; \mathbb{Z}) = \tilde{H}_{k+n}(S^n \wedge X) \quad \text{und} \quad \tilde{H}_k(X; \mathbb{Z}/2) = \tilde{H}_{k+1}(\mathbb{R}P^2 \wedge X),$$

die erste Gleichung ist gerade Satz 5.17.

Die obige Konstruktion funktioniert wegen Lemma 5.34 für jeden allgemeinen Homologiefunktor. Das motiviert die folgende Definition, die wegen der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 5.72 möglich ist. Da Abbildungen zwischen Moore-Räumen nicht bis auf Homotopie eindeutig durch ihre Wirkung auf der Homologie festgelegt sind, ist die folgende Definition für gewöhnliche Homologie  $\tilde{H}_\bullet(\cdot; A)$  etwas schwächer als die bisherigen Konstruktionen.

5.73. DEFINITION. Es sei  $\tilde{h}_\bullet$  ein allgemeiner Homologiefunktor, und es sei  $MA_n$  ein Moore-Raum zur abelschen Gruppe  $A$  in Dimension  $n$ . Dann definieren wir  $\tilde{h}_\bullet$ -Homologie mit Koeffizienten in  $A$  für alle gut punktierten Räume  $X$  und alle  $k$  durch

$$\tilde{h}_k(X; A) = \tilde{h}_{k+n}(MA_n \wedge X).$$

Beispielsweise können wir die stabilen Homotopiegruppen eines Raumes  $X$  mit  $\mathbb{Z}/2$ -Koeffizienten definieren durch

$$\pi_k^s(X; \mathbb{Z}/2) = \pi_{k+1}^s(\mathbb{R}P^2 \wedge X).$$

5.74. SATZ (Universelles Koeffiziententheorem für allgemeine Homologiefunktoren). *Es sei  $A$  eine abelsche Gruppe und  $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$  ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor mit Werten in der Kategorie  $\mathcal{A}b = \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$ . Dann existiert für alle  $k$  und alle  $X$  eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \tilde{h}_k(X; A) \longrightarrow \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\tilde{h}_{k-1}(X), A) \longrightarrow 0.$$

Nach Bemerkung 5.69 gibt es  $\text{Ext}(\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\tilde{h}_{k-1}(X), A), \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ -viele Erweiterungen der obigen Form. Dabei können die mittleren Terme verschiedener Erweiterungen isomorph sein, müssen es aber nicht. Wir können aus dem obigen Satz den Isomorphietyp von  $\tilde{h}_k(X; A)$  also im Allgemeinen nicht ablesen. Dass es für gewöhnliche Homologie mit Einschränkungen doch geht, sehen wir im folgenden Abschnitt.

BEWEIS. Es bezeichne  $a: \mathbb{Z}^{\oplus K} \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus J}$  eine freie Auflösung von  $A$  und  $\varphi: \bigvee_K S^n \rightarrow \bigvee_J S^n$  die zugehörige Anklebeabbildung in der Konstruktion von  $M(A, n)$  im Beweis von Proposition 5.72. Wir betrachten die Kofaserung

$$\bigvee_K S^n \wedge X \xrightarrow{\ell} Z\varphi \wedge X \xrightarrow{q} C\varphi \wedge X = MA_n \wedge X,$$

siehe Übung 3.129, und erhalten die lange exakte Homologiesequenz

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \tilde{h}_{k+n}(\bigvee_K S^n \wedge X) &\xrightarrow{\tilde{h}_{k+n}^\iota} \tilde{h}_{k+n}(Z\varphi \wedge X) \xrightarrow{\tilde{h}_{k+n}^q} \tilde{h}_{k+n}(MA_n \wedge X) \xrightarrow{\partial_{k+n}} \\ &\longrightarrow \tilde{h}_{k+n-1}(\bigvee_K S^n \wedge X) \xrightarrow{\tilde{h}_{k+n-1}^\iota} \tilde{h}_{k+n-1}(Z\varphi \wedge X) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Da diese Sequenz exakt und natürlich ist, erhalten wir eine natürliche kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}(\tilde{h}_{n+k}^\iota) \longrightarrow \tilde{h}_{k+n}(MA_n \wedge X) \longrightarrow \ker(\tilde{h}_{n+k-1}^\iota) \longrightarrow 0.$$

Der mittlere Term in dieser Sequenz ist  $\tilde{h}_k(X; A)$  nach Definition 5.73.

Da  $Z\varphi$  homotopieäquivalent zu  $\bigvee_J S^n$  ist, erhalten wir mit dem Summenaxiom 5.9 (2) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_{k+n}(\bigvee_K S^n \wedge X) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_K \tilde{h}_{k+n}(S^n \wedge X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\oplus K} \\ \tilde{h}_{k+n}^\iota \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \operatorname{id}_{\tilde{h}_k(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} a \\ \tilde{h}_{k+n}(Z\varphi \wedge X) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_J \tilde{h}_{k+n}(S^n \wedge X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\oplus J}. \end{array}$$

Aus dem Beweis von Satz 5.60 wissen wir, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{coker}(\tilde{h}_{n+k}^\iota) &= \operatorname{coker}(\operatorname{id}_{\tilde{h}_k(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} a) = \tilde{h}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A \\ \text{und} \quad \ker(\tilde{h}_{n+k-1}^\iota) &= \ker(\operatorname{id}_{\tilde{h}_{k-1}(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} a) = \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}(\tilde{h}_{k-1}(X), A). \quad \square \end{aligned}$$

5.75. BEISPIEL. Wir kennen die bereits die Homologie des reell projektiven Raumes aus Beispiel 5.26. Da

$$\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, \cdot) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z}/2) \cong \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2) \otimes (\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$$

erhalten wir Beispiel 5.26 (2) aus 5.26 (1), genauer

$$\tilde{H}_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \cong (\mathbb{Z}/2) \otimes (\mathbb{Z}/2) & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z}/2 \cong \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) & \text{falls } k \text{ gerade und } 0 < k \leq n, \\ \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist,} \\ 0 \cong \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) & \text{falls } k = n + 1 \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn andererseits Multiplikation mit 2 in  $A$  invertierbar ist, dann erhalten wir 5.26 (3), da dann

$$A \otimes (\mathbb{Z}/2) = \operatorname{Tor}(A, \mathbb{Z}/2) = 0.$$

5.76. BEMERKUNG. In Folgerung 5.86 sehen wir, dass die Koeffizientensequenz in Satz 5.74 für gewöhnliche Homologie stets spaltet, so dass

$$\tilde{H}_k(X; A) \cong \tilde{H}_k(X) \otimes A \oplus \operatorname{Tor}(\tilde{H}_{k-1}(X), A).$$

Man könnte daher denken, dass  $\tilde{H}(\cdot, A)$  im Vergleich zur gewöhnlichen ganzzahligen Homologie keine zusätzliche Information enthält. In Übung 5.108 sehen wir ein Beispiel dafür, dass das nicht stimmt: es gibt Räume  $X, Y$ , Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  und eine Koeffizientengruppe  $A$ , so dass

$$\begin{aligned} f_* = g_*: \tilde{H}_k(X) &\longrightarrow \tilde{H}_k(Y) && \text{für alle } k, \text{ aber} \\ f_* \neq g_*: \tilde{H}_k(X; A) &\longrightarrow \tilde{H}_k(Y; A) && \text{für ein } k. \end{aligned}$$

Dieses Verhalten erklärt sich dadurch, dass die Spaltung in Folgerung 5.86 nicht natürlich ist.

## 5.h. Produkträume und die Künneth-Formel

In diesem Abschnitt betrachten wir die gewöhnliche Homologie von Produkten topologischer Räume. Dabei nutzen wir aus, dass die von uns betrachtete gewöhnliche Homologie invariant unter schwachen Äquivalenzen ist, siehe Definition 5.31, um alle beteiligten Räume durch CW-Komplexe zu ersetzen. Gleichzeitig nutzen wir aus, dass Produkte von CW-Komplexen in der Kategorie  $kw\mathcal{H}$  nach Proposition 4.35 (4) wieder CW-Komplexe sind. Wir bezeichnen die Kategorie der  $\mathbb{Z}$ -graduierten  $R$ -Moduln mit  $\mathcal{G}rMod_R$ , das ist gerade die volle Unterkategorie von  $Ch_R$  der Kettenkomplexe mit trivialem Differential  $d_\bullet = 0$ .

5.77. DEFINITION. Es seien  $(C_\bullet, d_\bullet)$  und  $(C'_\bullet, d'_\bullet)$  zwei Kettenkomplexe über  $R$ , dann definieren wir ihr *Tensorprodukt* in  $Ch_R$  und ihr *Torsionsprodukt* in  $\mathcal{G}rMod_R$  durch

$$(C \otimes_R C')_k = \bigoplus_{a+b=k} C_a \otimes_R C_b \quad \text{und} \quad \text{Tor}_R(C, C')_k = \bigoplus_{a+b=k} \text{Tor}_R(C_a, C'_b).$$

Auf dem Tensorprodukt betrachten wir den Randoperator

$$d_{\otimes, k} = \sum_{a+b=k} (d_a \otimes \text{id}_{C'_b} + (-1)^a \text{id}_{C_a} \otimes d'_b).$$

Die Vorzeichen in  $d_{\otimes}$  sind so gewählt, dass

$$d_{\otimes, k} \circ d_{\otimes, k+1} = 0.$$

Das Ziel dieses Abschnitts ist der folgende Satz. Dabei fassen wir  $H_\bullet(X; R)$  und  $H_\bullet(Y; R)$  wieder als Objekte von  $\mathcal{G}rMod_R$  auf.

5.78. SATZ (Topologische Künneth-Formel). *Es seien  $X, Y$  gut punktierte topologische Räume und  $R$  ein Hauptidealring. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow (\tilde{H}(X; R) \otimes_R \tilde{H}(Y; R))_k \longrightarrow \tilde{H}_k(X \wedge Y; R) \longrightarrow (\text{Tor}_R(\tilde{H}(X; R), \tilde{H}(Y; R)))_{k-1} \longrightarrow 0$$

für alle  $k$ . Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

Wir erinnern uns an die unreduzierte Homologie  $H_\bullet(X; R) = \tilde{H}_\bullet(X_+; R)$  aus Bemerkung 5.12.

5.79. FOLGERUNG. *Es seien  $X, Y$  topologische Räume und  $R$  ein Hauptidealring. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow (H(X; R) \otimes_R H(Y; R))_k \longrightarrow H_k(X \times Y; R) \longrightarrow (\text{Tor}_R(H(X; R), H(Y; R)))_{k-1} \longrightarrow 0,$$

für alle  $k$ . Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

Aufgrund der Bemerkungen 5.12 (3) und 5.67 stimmen die  $\text{Tor}_R$ -Terme in den Sequenzen aus 5.78 und 5.79 überein.

BEWEIS. Wir ersetzen  $X$  und  $Y$  im obigen Satz durch  $X_+$  und  $Y_+$  und nutzen die Beziehung  $(X \times Y)_+ = X_+ \wedge Y_+$ , so dass

$$H_\bullet(X \times Y; R) = \tilde{H}_\bullet((X \times Y)_+; R) = \tilde{H}_\bullet(X_+ \wedge Y_+; R). \quad \square$$

5.80. FOLGERUNG. *Es sei  $\mathbb{k}$  ein Körper, dann existieren natürliche Isomorphismen*

$$(H(X; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} H(Y; \mathbb{k}))_k \cong H_k(X \times Y; \mathbb{k}), \quad \text{und} \quad (1)$$

$$(\tilde{H}(X; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \tilde{H}(Y; \mathbb{k}))_k \cong \tilde{H}_k(X \wedge Y; \mathbb{k}), \quad \text{falls } X, Y \text{ gut punktiert sind.} \quad (2)$$

BEWEIS. Nach Satz 5.60 verschwindet in diesem Falls das Torsionsprodukt. □

Der Beweis besteht aus zwei Schritten. Zunächst konstruieren wir einen Isomorphismus zwischen dem zellulären Kettenkomplex eines Produktes von CW-Komplexen und dem Tensorprodukt der zellulären Kettenkomplexe der Faktoren. Anschließend zeigen wir, dass die Homologie eines Tensorproduktes von Komplexen in einer kurzen exakten Sequenz mit Tensor- und Torsionsprodukt der Homologien der Faktoren steht.

5.81. PROPOSITION. *Es seien  $X$  und  $Y$  CW-Komplexe und  $R$  ein Ring. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$(\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X \wedge Y; R), d_{\bullet}^{\text{CW}}) \xrightarrow{\cong} (\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; R), d_{\bullet}^{\text{CW}}) \otimes (\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(Y; R), d_{\bullet}^{\text{CW}}).$$

Der analoge Satz für den singulären Kettenkomplex ist der Satz von Eilenberg-Zilber, und der obige Isomorphismus heißt dann auch Alexander-Whitney-Abbildung .

BEWEIS. Nach Proposition 4.35 (4) ist  $X \wedge Y$  in  $kw\mathcal{H}_+$  wieder ein CW-Komplex. Wir betrachten die charakteristischen Abbildungen  $\Phi_j^m: D^m \rightarrow X$  und  $\Psi_k^n: D^n \rightarrow Y$  der Zellen  $e_j^m$  und  $e_k^n$  von  $X$  beziehungsweise  $Y$  für  $j \in J^m$ ,  $k \in K^n$ . Dann sind

$$\Xi_{j,k}^{m+n} = \Phi_j^m \times \Psi_k^n: D^{m+n} \cong D^m \times D^n \longrightarrow X \times Y$$

die charakteristischen Abbildungen der Zellen  $e_{j,k}^{m+n}$  von  $X \times Y$ . Wir erhalten den gesuchten Isomorphismus

$$\tilde{C}_p^{\text{CW}}(X \wedge Y; R) \cong R^{\oplus \cup_{m+n=p}(J^m \times K^n)} \cong \bigoplus_{m+n=p} R^{\oplus J^m} \otimes_R R^{\oplus K^n} \cong (\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; R) \otimes \tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(Y; R))_p.$$

Wir zeigen Verträglichkeit mit  $d^{\text{CW}}$ . Die Verklebeabbildung  $\xi_{j,k}^{m+n}$  ergibt sich als Pushout

$$\begin{array}{ccccc} & & X^{m-1} \wedge Y^n & \longrightarrow & (X \wedge Y)^{m+n-1} \\ & \nearrow \varphi_j^m \times \Psi_k^n & \uparrow & & \nearrow \xi_{j,k}^{m+n} \\ S^{m-1} \times D^n & \longrightarrow & S^{m+n-1} & \dashrightarrow & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ S^{m-1} \times S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_j^m \times \psi_k^n} & X^{m-1} \wedge Y^{n-1} & \longrightarrow & X^m \wedge Y^{n-1} \\ & \searrow \Phi_j^m \times \psi_k^n & \uparrow & & \nearrow \\ S^{m-1} \times S^{n-1} & \longrightarrow & D^m \times S^{n-1} & \longrightarrow & \end{array}$$

Insbesondere trifft  $\xi_{j,k}^{m+n}$  nur zwei Typen von  $(m+n-1)$ -Zellen von  $X \wedge Y$ , nämlich  $e_{j',k}^{m+n-1}$  und  $e_{j,k'}^{m+n-1}$ , falls  $\varphi_j^m$  die Zelle  $e_{j'}^{m-1}$  beziehungsweise  $\psi_k^n$  die Zelle  $e_{k'}^{n-1}$  trifft. Seien  $p_{j',k}^{m+n-1}, q_{j,k'}^{m+n-1}: (X \wedge Y)^{m+n-1} \rightarrow S^{m+n-1}$  die zugehörigen Kollaps-Abbildungen. Sei  $p_{j'}^{m-1}: X^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  die Kollaps-Abbildung zu  $e_{j'}^{m-1}$  und  $q_k^n: Y^n \rightarrow S^n$  die Kollaps-Abbildung zu  $e_k^n$ , dann gilt

$$\begin{aligned} p_{j',k}^{m+n-1}|_{X^{m-1} \wedge Y^n} &= p_{j'}^{m-1} \wedge q_k^n, & p_{j',k}^{m+n-1}|_{X^m \wedge Y^{n-1}} &= 0, \\ q_{j,k'}^{m+n-1}|_{X^{m-1} \wedge Y^n} &= 0, & \text{und} & \quad q_{j,k'}^{m+n-1}|_{X^m \wedge Y^{n-1}} = p_j^m \wedge q_{k'}^{n-1}. \end{aligned}$$

Die Abbildungen  $p_{j',k}^{m+n-1} \circ \xi_{j,k}^{m+n}$  und  $q_{j,k'}^{m+n-1} \circ \xi_{j,k}^{m+n}: S^{m+n-1} \rightarrow S^{m+n-1}$  aus Definition 5.22 entsprechen gerade den Verkettungen

$$\begin{aligned} S^{m+n-1} &\twoheadrightarrow S^{m+n-1}/(D^m \times S^{n-1}) \cong S_+^{m-1} \wedge S^n \xrightarrow{(p_{j'}^{m-1} \circ \varphi_j^m) \wedge \text{id}} S^{m-1} \wedge S^n \cong S^{m+n-1}, \\ S^{m+n-1} &\twoheadrightarrow S^{m+n-1}/(S^{m-1} \times D^n) \cong S^m \wedge S_+^{n-1} \xrightarrow{\text{id} \wedge (q_{k'}^{n-1} \circ \psi_k^n)} S^m \wedge S^{n-1} \cong S^{m+n-1}. \end{aligned}$$

Der Abbildungsgrad der rechten Abbildungen in der oberen Zeile ist gerade ein Koeffizient des Randoperators  $d_X^{\text{CW}}$  des Komplexes  $C_{\bullet}^{\text{CW}}(X; R)$ . In der unteren Zeile erhalten wir den analogen



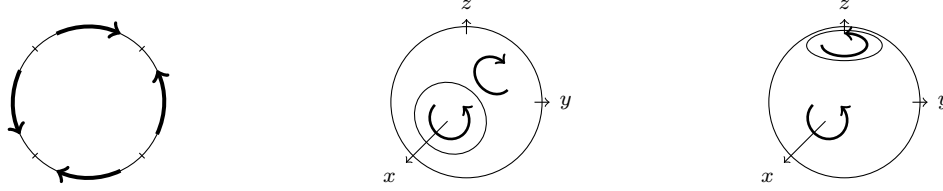


ABBILDUNG 5.2. Produkte von Zellen und ihre Ränder

Koeffizienten von  $d_Y^{\text{CW}}$ . Es bleiben noch die Vorzeichen in Definition 5.77 zu erklären. Dazu betrachten wir die folgenden Verkettungen von Projektionen und überlegen uns wie in Abbildung 5.2, dass

$$\begin{aligned} \deg(S^{m+n-1} \longrightarrow S_+^{m-1} \wedge S^m \longrightarrow S^{m+n-1}) &= 1 \\ \text{und} \quad \deg(S^{m+n-1} \longrightarrow S^m \wedge S_+^{n-1} \longrightarrow S^{m+n-1}) &= (-1)^m. \end{aligned}$$

Ähnlich beweist man Natürlichkeit, das heißt, Verträglichkeit mit zellulären Abbildungen.  $\square$

5.82. SATZ (Algebraische Künneth-Formel). *Es seien  $(C_\bullet, d_\bullet)$  und  $(C'_\bullet, d'_\bullet)$  zwei Kettenkomplexe über einem Hauptidealring  $R$ , und  $C'_k$  sei frei für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann existiert eine natürliche kurze exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R H(C'_\bullet, d'_\bullet))_n \xrightarrow{\mu} H_n((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)) \longrightarrow \\ \longrightarrow \text{Tor}_R(H(C_\bullet, d_\bullet), H(C'_\bullet, d'_\bullet))_{n-1} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

für alle  $n$ , mit  $\mu([c] \otimes [c']) = [c \otimes c']$ . Wenn auch  $C_\ell$  für alle  $\ell \in \mathbb{Z}$  frei ist, spaltet die obige Sequenz, aber nicht auf natürliche Weise.

Die obige Sequenz spaltet sogar, wenn nur einer der beiden Komplexe frei ist; das ist allerdings etwas schwerer zu zeigen.

BEWEIS. Es bezeichnen  $Z'_\bullet$  und  $B'_\bullet$  die Unterkomplexe der Zyklen und Ränder von  $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ , jeweils mit trivialem Randoperator. Nach Proposition 5.64 (1) sind alle  $Z'_k$  und  $B'_k \subset C'_k$  frei. Wir erhalten spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Z'_k \longrightarrow C'_k \xrightarrow{d'_k} B'_{k-1} \longrightarrow 0 \quad (*) \\ \text{und} \quad 0 \longrightarrow (C_\bullet \otimes Z'_\bullet)_n \longrightarrow (C_\bullet \otimes C'_\bullet)_n \xrightarrow{\pm(\text{id}_C \otimes d')_n} (C_\bullet \otimes B'_\bullet)_{n-1} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

etwa, indem wir für alle  $k$  ein Rechtsinverses  $s_k: B'_{k-1} \rightarrow C'_k$  zu  $d'_k$  durch Wahl auf einer Basis von  $B'_{k-1}$  konstruieren. Das Vorzeichen von  $(\text{id}_C \otimes d')_k$  hängt wie in Definition 5.77 vom Grad in  $C_\bullet$  ab. Die Komplexe  $Z'_\bullet$  und  $B'_\bullet$  haben keinen Randoperator und sind frei. Daher ist Tensorieren mit  $Z'_\bullet$  und  $B'_\bullet$  jeweils ein exakter Funktor, und es folgt

$$\begin{aligned} H_n((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (Z'_\bullet, 0)) &\cong (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet)_n \\ \text{und} \quad H_n((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (B'_\bullet, 0)) &\cong (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet)_n. \end{aligned}$$

Das Schlangenlemma 5.65 liefert die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet)_n \longrightarrow H_n((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)) \longrightarrow \\ \longrightarrow (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet)_{n-1} \xrightarrow{\partial} (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet)_{n-1} \longrightarrow \dots \quad (\dagger) \end{aligned}$$

Wir betrachten  $z \otimes b' \in (Z_\bullet \otimes B'_\bullet)_{n-1}$ , um das Bild von  $[z \otimes b'] = [z] \otimes b' \in H_{n-1}((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet)$  unter  $\partial$  zu bestimmen. Wie im Beweis von Lemma 5.65 wir finden ein Urbild  $z \otimes c' \in (Z_\bullet \otimes C'_\bullet)_n$ , da  $(*)$  spaltet, und erhalten anschließend

$$d_{\otimes, n}(z \otimes c') = \underbrace{(dz)}_{=0} \otimes c' \pm z \otimes (d'c') = z \otimes b' \in (Z_\bullet \otimes C'_\bullet)_{n-1}.$$

Da  $b' \in B'_\bullet \subset Z'_\bullet$ , ist  $z \otimes b' \in Z_\bullet \otimes Z'_\bullet$  das gesuchte Urbild, und es folgt

$$\partial[z \otimes b'] = [z \otimes b'] = (\text{id}_{C_\bullet} \otimes j_\bullet)_{n-1, *}[z \otimes b'] \in H_{n-1}((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet),$$

somit wird  $\partial$  von der Inklusion  $j_\bullet: B'_\bullet \rightarrow Z'_\bullet$  induziert.

Aus der langen exakten Sequenz  $(\dagger)$  erhalten wir also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{coker}(\text{id}_{H(C_\bullet, d_\bullet)} \otimes j)_n \rightarrow H_n((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)) \rightarrow \ker(\text{id}_{H(C_\bullet, d_\bullet)} \otimes j)_{n-1} \rightarrow 0.$$

Indem wir die freie Auflösung

$$0 \leftarrow H_k(C'_\bullet, d'_\bullet) \leftarrow Z'_k \xleftarrow{j_k} B'_k \leftarrow 0$$

betrachten, schließen wir, dass

$$\begin{aligned} \text{coker}(\text{id}_{H(C_\bullet, d_\bullet)} \otimes j)_n &\cong (H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R H(C'_\bullet, d'_\bullet))_n \\ \text{und} \quad \ker(\text{id}_{H(C_\bullet, d_\bullet)} \otimes j)_{n-1} &\cong \text{Tor}_R(H(C_\bullet, d_\bullet), H(C'_\bullet, d'_\bullet))_{n-1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Exaktheit der Sequenz im Satz bewiesen. Da die Abbildung  $\mu$  von der Inklusion

$$Z_n(C_\bullet \otimes Z'_\bullet) \cong (Z_\bullet \otimes Z'_\bullet)_n \rightarrow Z_n(C_\bullet \otimes C'_\bullet)$$

induziert wird, hat sie die obige Gestalt.

Wenn  $C_\bullet$  und  $C'_\bullet$  frei sind, spaltet  $(*)$  und die analoge Sequenz für  $C_\bullet$ . Also finden wir Linksinverse  $p_\bullet: C_\bullet \rightarrow Z_\bullet$  und  $p'_\bullet: C'_\bullet \rightarrow Z'_\bullet$  zu den Inklusionen  $Z_\bullet \rightarrow C_\bullet$  beziehungsweise  $Z'_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ . Dann ist  $(p \otimes p')_\bullet$  ein Linksinverses zu  $\mu$ , falls wir zeigen können, dass  $\mu$  auf  $H_\bullet((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet))$  wohldefiniert ist. Aber das ist der Fall, denn

$$(p \otimes p')(d_C \otimes C' \pm C \otimes d' C') \in B_\bullet \otimes Z'_\bullet + Z_\bullet \otimes B'_\bullet \subset \ker(Z_\bullet \otimes Z'_\bullet \rightarrow H_\bullet \otimes H'_\bullet).$$

Also spaltet in die Sequenz in diesem Fall, und der Satz ist bewiesen.  $\square$

**BEWEIS VON SATZ 5.78.** Es seien  $X, Y$  gut punktierte topologische Räume. Nach Satz 5.43 (1) ist gewöhnliche Homologie — so, wie wir sie dort konstruiert haben — unter schwachen Äquivalenzen invariant. Seien  $X' \rightarrow X$  und  $Y' \rightarrow Y$  CW-Approximationen, dann erhalten wir Isomorphismen

$$\tilde{H}_\bullet(X'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(X; R) \quad \text{und} \quad \tilde{H}_\bullet(Y'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(Y; R)$$

nach Bemerkung 5.32 (1). Nach Lemma 5.34 sind die Funktoren  $\tilde{H}_\bullet(\cdot \wedge Y'; R)$  und  $\tilde{H}_\bullet(X \wedge \cdot; R)$  ebenfalls unter schwachen Äquivalenzen invariant, und wir erhalten Isomorphismen

$$\tilde{H}_\bullet(X' \wedge Y'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R).$$

Also reicht es, den Satz für CW-Komplexe zu beweisen.

Nach Satz 5.23 wird die gewöhnliche  $R$ -Homologie von  $X', Y'$  und  $X' \times Y'$  durch deren zelluläre Kettenkomplexe berechnet, deren einzelne Moduln nach Konstruktion alle frei über  $R$  sind. Somit folgt die topologische Künneth-Formel jetzt aus dem „Eilenberg-Zilber“-Satz 5.81 und der algebraischen Künneth-Formel 5.82.

Zu Abbildungen  $f: X \rightarrow Z$  und  $g: Y \rightarrow W$  und CW-Approximationen  $X' \rightarrow X, \dots, W' \rightarrow W$  erhalten wir nach Satz 4.32 zelluläre Abbildungen  $f': X' \rightarrow Z'$  und  $g': Y' \rightarrow W'$ , so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Z' & \longrightarrow & Z \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & Y \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ W' & \longrightarrow & W \end{array}$$

kommutieren. Wegen der Natürlichkeitsaussage in Proposition 5.81 kommutiert auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X' \wedge Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X'; R) \otimes \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(Y'; R) \\ (f' \wedge g')_\# \downarrow & & \downarrow f'_\# \otimes g'_\# \\ \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(Z' \wedge W'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(Z'; R) \otimes \tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(W'; R) . \end{array}$$

Wir betrachten zum Schluss das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{H}_\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y; R) & \overset{\cong}{\dashrightarrow} & \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \\ & \nearrow \cong & \cong \downarrow & & \downarrow (f \wedge g)_* \\ \tilde{H}_\bullet(X'; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X' \wedge Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \\ f'_* \otimes g'_* \downarrow & & f_* \otimes g_* \downarrow & & \downarrow (f \wedge g)_* \\ & \nearrow \cong & \tilde{H}_\bullet(Z; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(W; R) & \overset{\cong}{\dashrightarrow} & \tilde{H}_\bullet(Z \wedge W; R) \\ \tilde{H}_\bullet(Z'; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(W'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(Z' \wedge W'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(Z \wedge W; R) \\ & & \cong \downarrow & & \downarrow (f' \wedge g')_* \end{array}$$

Die Quadrate rechts und links kommutieren wegen Satz 5.23, und da gewöhnliche Homologie von topologischen Räumen ein Funktor ist. Das vordere Quadrat kommutiert nach obiger Vorüberlegung, und da Homologie von Komplexen ein Funktor ist. Nach unserer Konstruktion der gestrichelten Pfeile kommutieren dann auch die restlichen Quadrate im Diagramm, und die Natürlichkeit der linken Abbildung in der Künneth-Sequenz ist gezeigt. Entsprechend beweist man auch die Natürlichkeit der rechten Abbildung.  $\square$

5.83. BEMERKUNG. Da wir zelluläre Homologie hier zum ersten Mal benutzt haben, um neue Morphismen zu konstruieren, und nicht, um bereits bekannte Morphismen zu beschreiben, wollen wir uns kurz überlegen, dass die Abbildungen in der Künneth-Sequenz in Satz 5.78 nicht von der Wahl der CW-Struktur (also auch nicht von der CW-Approximation) abhängen. Hierbei ist entscheidend, dass alle benutzten Konstruktionen natürlich sind.

Seien also etwa zwei CW-Approximationen  $f_i: X'_i \rightarrow X$  mit  $i = 0, 1$ , gegeben, dann existieren nach dem Satz 4.32 bis auf Homotopie eindeutige zelluläre Abbildungen  $k: X'_0 \rightarrow X'_1$  und  $\ell: X'_1 \rightarrow X'_0$ , so dass die Abbildungen

$$f_0 \sim f_1 \circ k, \quad f_1 \sim f_0 \circ \ell, \quad \ell \circ k \sim \text{id}_{X'_0}, \quad \text{und} \quad k \circ \ell \sim \text{id}_{X'_1}$$

jeweils homotop sind. Mit ähnlichen Überlegungen wie im obigen Beweis kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_\bullet(X'_0; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X'_0 \wedge Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \\ k_* \otimes \text{id} \downarrow \uparrow \ell_* \otimes \text{id} & & \tilde{H}_\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y; R) & \overset{\cong}{\dashrightarrow} & \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \\ \tilde{H}_\bullet(X'_1; R) \otimes_R \tilde{H}_\bullet(Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X'_1 \wedge Y'; R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \\ & & \cong \downarrow & & \downarrow (k \wedge \text{id})_* \uparrow (\ell \wedge \text{id})_* \end{array}$$

Hieraus folgt, dass der hintere Pfeil unabhängig von der Wahl der CW-Approximation ist.

5.84. BEISPIEL. Wir betrachten den  $n$ -dimensionalen Torus  $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ . Es gilt

$$H_k(S^n; R) \cong \begin{cases} R & \text{für } k = 0, n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

insbesondere sind die Homologiemoduln frei. Wegen den Bemerkung 5.12 (3), Proposition 5.66 (1) und Folgerung 5.79 gilt

$$H_k(T^n; R) \cong \begin{cases} R^{\binom{n}{k}} & \text{für } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{H}_k(T^n; R) \cong \begin{cases} R^{\binom{n}{k}} & \text{für } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

5.85. BEISPIEL. Wir betrachten die Räume  $S^2 \times S^4$  und  $\mathbb{C}P^3$ . Wegen Beispiel 5.25 und Folgerung 5.79 gilt

$$H_k(S^2 \times S^4; R) \cong H_k(\mathbb{C}P^3; R) \cong \begin{cases} R & \text{für } k = 0, 2, 4 \text{ oder } 6, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dennoch sind diese Räume nicht homotopieäquivalent, denn nach Beispiel 3.43 (1) gilt

$$\pi_3(\mathbb{C}P^3) \cong \pi_3(S^7) = 0,$$

aber mit Beispiel 3.43 (1) und Übung 3.106 gilt auch

$$\pi_3(S^2 \times S^4) \cong \pi_3(S^2) \times \pi_3(S^4) \cong \mathbb{Z}.$$

Wir sehen also

- (1) Homologie- und Homotopiegruppen enthalten verschiedene Information.
- (2) Trotz des homologischen Satzes 5.50 von Whitehead sind einfach zusammenhängende Räume mit isomorphen Homologiegruppen nicht notwendigerweise homotopieäquivalent.
- (3) Wegen dieses Satzes gibt es weder eine Abbildung  $f: S^2 \times S^4 \rightarrow \mathbb{C}P^3$  noch eine Abbildung  $g: \mathbb{C}P^3 \rightarrow S^2 \times S^4$ , die auf  $H_\bullet(\cdot; R)$  einen Isomorphismus induziert.

Als nächstes Beispiel betrachten wir  $X$  beliebig und  $Y = MA_n$  einen Moore-Raum. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass

$$\tilde{H}_{k+n}(MA_n \wedge X) \cong \tilde{H}_k(X; A).$$

Die kurze exakte Sequenz in der Künneth-Formel 5.78 ist die gleiche wie im universellen Koeffiziententheorem 5.74. Mit dem obigen Beweis erhalten wir den folgenden wichtigen Zusatz.

5.86. FOLGERUNG (Universelles Koeffiziententheorem, Zusatz). *Es sei  $A$  eine abelsche Gruppe und  $\tilde{h} = \tilde{H}$  gewöhnliche Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ . Dann spaltet die kurze exakte Sequenz im universellen Koeffiziententheorem 5.74, allerdings nicht natürlich.*

Ein Beispiel folgt in Übung 5.112. Sei allgemeiner  $A$  ein  $R$ -Modul, dann existiert eine natürliche Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_k(X; R) \otimes_R A \longrightarrow \tilde{H}_k(X; A) \longrightarrow \text{Tor}_R(\tilde{H}_{k-1}(X; R), A) \longrightarrow 0;$$

diese spaltet, aber nicht natürlich. Zum Beweis ersetzen wir  $X$  durch einen CW-Komplex und argumentieren ähnlich wie im Beweis der algebraischen Künneth-Formel 5.82, siehe Übung 6.51.

## 5.i. Übungen zu Kapitel 5

### Übungen zu Abschnitt 5.a.

5.87. ÜBUNG. Gegeben sei eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow A_{n-1} \xleftarrow{h_n} C_n \xleftarrow{g_n} B_n \xleftarrow{f_n} A_n \xleftarrow{h_{n+1}} C_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ , dabei dürfen Sie  $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$  annehmen. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

- (1) Für alle  $n$  existiert  $k_n: B_n \rightarrow A_n$  mit  $k_n \circ f_n = \text{id}_{A_n}$ .
- (2) Für alle  $n$  existiert  $\ell_n: C_n \rightarrow B_n$  mit  $g_n \circ \ell_n = \text{id}_{C_n}$ .
- (3) Für alle  $n$  existiert ein Isomorphismus  $\varphi_n: B_n \rightarrow A_n \oplus C_n$ , so dass  $\varphi_n \circ f_n$  die natürliche Inklusion und  $g_n \circ \varphi_n^{-1}$  die natürliche Projektion ist, und  $h_n = 0$ .

Zeigen Sie außerdem, dass es natürliche Bijektionen zwischen den Mengen der möglichen Folgen  $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  in (1),  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  in (2), sowie der  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  in (3) gibt.

### Übungen zu Abschnitt 5.b.

5.88. ÜBUNG. Es sei  $X$  ein gut punktierter topologischer Raum und  $\tilde{h}_\bullet$  ein verallgemeinerter reduzierter Homologiefunktor.

- (1) Zeigen Sie, dass eine Kofaserung  $\iota: S^0 \rightarrow X_+$  existiert, so dass  $\text{im } \iota$  Retrakt von  $X_+$  ist und  $X = X_+ / \text{im } \iota$ .
- (2) Folgern Sie aus der langen exakten Sequenz des Paares  $(X_+, \text{im } \iota)$  und Aufgabe 5.87, dass  $\tilde{h}_k(X) = \ker(r_*: \tilde{h}_k(X_+) \rightarrow \tilde{h}_k(S^0))$  für alle  $k$ .
- (3) Präzisieren und beweisen Sie die folgende Aussage: „Die reduzierte allgemeine Homologie  $\tilde{h}_k(X)$  ist unabhängig von der Wahl eines guten Basispunktes von  $X$ .“

5.89. ÜBUNG. Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 5.13 an einer der beiden fehlenden Stellen, also bei  $\tilde{h}_n(X)$  oder bei  $\tilde{h}_n(A \cap B)$ .

5.90. ÜBUNG. Es sei  $X = A \cup B$ , so dass  $(A, A \cap B)$  und  $(B, A \cap B)$  Kofaserungen seien, und es gelten Zusammenhangsvoraussetzungen wie in Folgerung 3.66. Konstruieren Sie ein Analogon zur Mayer-Vietoris-Sequenz 5.13 für die „unstabilen“ Homotopiegruppen  $\pi_\bullet$  wie in Bemerkung 5.16. Wie weit lässt sich diese Sequenz nach links beziehungsweise rechts fortsetzen? Für  $\pi_1$  kennen wir bereits den Satz 2.42 von Seifert-van Kampen. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen lässt er sich in diese Sequenz „einbauen“?

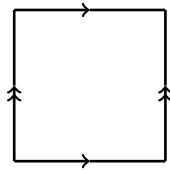
### Übungen zu Abschnitt 5.c.

5.91. ÜBUNG. Es sei  $n > 0$ , und es sei  $A$  Objekt einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ . Bestimmen Sie  $H_k(\mathbb{C}P^n; A)$  und  $H_k(\mathbb{H}P^n; A)$  für alle  $k \geq 0$ .

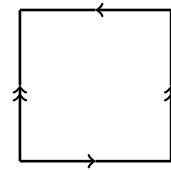
5.92. ÜBUNG. Berechnen Sie  $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X; \mathbb{Z})$  und  $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  für die folgenden Räume:

- (1) Fassen Sie den Torus  $T^2 = S^1 \times S^1$  als CW-Komplex auf, indem Sie in der linken Skizze gegenüberliegende Seiten identifizieren, siehe auch Übung 3.131.
- (2) Betrachten Sie die Kleinsche Flasche  $X$ , die aus einem Quadrat durch Identifikation gegenüberliegender Seiten gemäß der rechten Skizze entsteht. Fassen Sie  $X$  für die Berechnung der Homologie als CW-Komplex mit Basispunkt, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle

auf.



Torus



Kleinsche Flasche

5.93. ÜBUNG. Beweisen Sie Satz 5.28.

5.94. ÜBUNG. Es sei  $X$  ein CW-Komplex und  $M$  Objekt einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ , wobei sie  $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$  annehmen dürfen. Zeigen Sie:

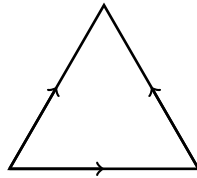
- (1) Der unreduzierte zelluläre Kettenkomplex  $C_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M)$  aus Bemerkung 5.30 (1) berechnet die unreduzierte Homologie  $H_{\bullet}(X; M) = \tilde{H}_{\bullet}(X_+; M)$ , siehe auch Bemerkung 5.12.
- (2) Wir bezeichnen die Homologie des augmentierten zellulären Kettenkomplexes  $\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M)$  aus Bemerkung 5.30 (2) mit  $\tilde{H}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M)$ . Zeigen Sie, dass  $\tilde{H}_{\bullet}(X; M) \cong \tilde{H}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M)$  gibt, wobei der Isomorphismus allerdings von der Wahl eines Basispunktes in  $X$  abhängt.

5.95. ÜBUNG. Es sei  $Y$  Unterkomplex eines CW-Komplexes  $X$ , und es sei  $M$  Objekt einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ , wobei Sie wieder  $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$  annehmen dürfen. Nach Bemerkung 5.12 (2) definiert man relative Homologiemoduln  $H_k(X, Y; A) = \tilde{H}_k(X//Y; A)$ . Zeigen Sie

- (1) Es gilt  $H_k(X, Y; A) \cong \tilde{H}_k(X/Y; A)$ .
- (2) Wir betrachten  $(\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(Y; A), d^{\text{CW}})$  als Unterkomplex von  $(\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; A), d^{\text{CW}})$ , dann existiert ein natürlicher Quotientenkomplex  $(\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; A)/\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(Y; A), \bar{d}^{\text{CW}})$ .
- (3) Der Komplex aus (2) ist natürlich isomorph zu  $(\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X/Y; A), d^{\text{CW}})$ .

Übungen zu Abschnitt 5.e.

5.96. ÜBUNG. Die „topologische Narrenkappe“  $X$  entsteht, indem man bei einem Dreieck alle drei Seiten gemäß der Skizze identifiziert. Wir wissen aus der Vorlesung, dass  $\tilde{H}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; \mathbb{Z}) = 0$ .



- (1) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von  $X$ .
- (2) Zeigen Sie, dass  $X$  schwach zusammenziehbar ist.
- (3) *Zusatz:* Geben Sie eine explizite Homotopie  $X \times I \rightarrow X$  zwischen  $\text{id}_X$  und der Nullabbildung an.
- (4) *Zusatz:* Basteln Sie ein Modell.

Übungen zu Abschnitt 5.f.

5.97. ÜBUNG. Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Überprüfen Sie, dass Tensorprodukt und Hom-Funktor über  $R$  mit  $E = R$  alle Eigenschaften aus Definition 4.9 und Bemerkung 4.11 erfüllen. Somit ist die Kategorie  $(\text{Mod}_R, \otimes_R, R)$  monoidal und abgeschlossen. Wie lautet ihr Exponentialgesetz?

5.98. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Kettenhomotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kettenabbildungen zwischen zwei gegebenen Komplexen. Sie ist mit der Komposition von Kettenabbildungen verträglich.
- (2) Kettenhomotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Kategorie der Kettenkomplexe.

5.99. ÜBUNG. Es seien  $X, Y$  punktierte CW-Komplexe und  $M$  ein  $R$ -Modul. Eine zelluläre Homotopie zwischen zellulären Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  ist eine zelluläre Abbildung  $h: I_+ \wedge X \rightarrow Y$ , wobei  $I$  die CW-Struktur mit einer 1- und zwei 0-Zellen trage. Zeigen Sie: zelluläre Homotopien induzieren Kettenhomotopien zwischen den Abbildungen  $f_{\#}$  und  $g_{\#}: C_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{CW}}(Y; M)$ .

5.100. ÜBUNG. Beweisen Sie Proposition 5.55.

5.101. ÜBUNG. Beweisen Sie das Schlangenlemma 5.65.

- (1) Zeigen Sie: der Verbindungshomomorphismus ist wohldefiniert und natürlich als Transformation zwischen zwei Funktoren von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in der Kategorie  $\mathcal{Ch}_{\mathcal{C}}$  der Kettenkomplexe in  $\mathcal{C}$  in die Kategorie  $\mathcal{C}$ .
- (2) Beweisen Sie die Exaktheit der angegebenen Sequenz an mindestens einer Stelle.

5.102. ÜBUNG. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 5.60. Konstruieren Sie dazu insbesondere alle benötigten Diagramme in der Kategorie  $\mathcal{C}$  mit den jeweils geforderten Eigenschaften.

5.103. ÜBUNG. Es sei  $R$  ein Hauptidealring,  $r, s \in R$ , und  $B$  ein  $R$ -Modul. Zeigen Sie:

$$\text{Tor}(R/r, B) \cong \text{hom}(R/r, B) \cong \{b \in B \mid br = 0\} \subset B, \quad (1)$$

$$\text{Ext}(R/r, B) \cong (R/r) \otimes B \cong B/rB, \quad (2)$$

$$\text{Tor}(R/r, R/s) \cong \text{Ext}(R/r, R/s) \cong (R/r) \otimes (R/s) \cong \text{hom}(R/r, R/s) \cong R/(r, s), \quad (3)$$

wobei  $(r, s)$  das von  $r$  und  $s$  erzeugte Ideal in  $R$  bezeichne.

5.104. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass sich Tor und Ext unter direkten Summen und Produkten analog zu  $\otimes$  und  $\text{hom}$  in Bemerkung 5.53 verhalten.

5.105. ÜBUNG. Beweisen Sie Proposition 5.66.

5.106. ÜBUNG. Es sei  $R$  ein Hauptidealring,  $A, B$  seien  $R$ -Moduln, und  $\text{Tor}_R A$  bezeichne den Torsionsuntermodul aus Bemerkung 5.67. Zeigen Sie:

- (1) Der Modul  $A/\text{Tor}_R A$  ist torsionsfrei.
- (2) Jeder endlich erzeugte Untermodul von  $A/\text{Tor}_R A$  ist frei.
- (3) Es gilt  $\text{Tor}_R(B, A/\text{Tor}_R A) = 0$ .
- (4) Es gilt  $\text{Tor}_R(B, \text{Tor}_R A) = \text{Tor}_R(B, A)$ .

*Hinweis:* Jedes Element in einem Tensorprodukt  $X \otimes Y$  kann als endliche Linearkombination von Elementen der Form  $x \otimes y$  mit  $x \in X, y \in Y$  geschrieben werden.

5.107. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 5.69.

*Übungen zu Abschnitt 5.g.*

5.108. ÜBUNG. Wir betrachten  $A = \mathbb{Z}/n$  und konstruieren den Moore-Raum  $MA_k$ , indem wir eine  $(k+1)$ -Zelle mit einer Abbildung  $\varphi: S^k \rightarrow S^k$  vom Grad  $n$  an  $S^k$  ankleben. Indem wir das  $k$ -Skelett  $S^k$  auf einen Punkt abbilden, erhalten wir die Kollaps-Abbildung  $f: MA_k \rightarrow MA_k/S^k \cong$

$S^{k+1}$ . Außerdem sei  $g: MA_k \rightarrow S^{k+1}$  eine konstante Abbildung. Zeigen Sie:

$$f_* = g_* = 0: \tilde{H}_\bullet(MA_k; \mathbb{Z}) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(S^{k+1}; \mathbb{Z}) \quad \text{für alle } k \geq 0, \quad (1)$$

$$g_* = 0: \tilde{H}_\bullet(MA_k; A) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(S^{k+1}; A) \quad \text{für alle } k \geq 0, \quad (2)$$

$$f_{k+1}: \tilde{H}_{k+1}(MA_k; A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{k+1}(S^{k+1}; A) \cong A. \quad (3)$$

5.109. ÜBUNG. Seien  $A, B$  abelsche Gruppen. Wir betrachten den Raum  $[MA_n, MB_n]$  der punktierten Abbildungen von  $MA_n$  nach  $MB_n$  bis auf Homotopie.

- (1) Zeigen Sie mit Hilfe des Freudenthalschen Einhängungssatzes 3.75 und der Puppe-Sequenz aus Satz 4.39 (3), dass Stabilisieren für  $n \geq 3$  den folgenden Isomorphismus liefert:

$$[MA_n, MB_n] \xrightarrow{S} [MA_{n+1}, MB_{n+1}].$$

- (2) Konstruieren Sie mit Hilfe der Puppe-Sequenz eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(A, \pi_{n+1}MB_n) \longrightarrow [MA_n, MB_n] \longrightarrow \text{hom}(A, B) \longrightarrow 0.$$

- (3) Es sei  $n \geq 3$ . Zeigen Sie mit der Homotopiesequenz 3.71 für Kofaserungen, dass

$$\pi_{n+1}(MB_n) \cong B \otimes \mathbb{Z}/2 = B/2B.$$

- (4) Zeigen Sie, dass  $\text{Ext}(A, B/2B) = 0$ , wenn Multiplikation mit 2 in  $B$  surjektiv oder in  $A$  injektiv ist.

Man beachte, dass die Sequenz in (2) im allgemeinen nicht spaltet.

5.110. ÜBUNG. Bearbeiten Sie eine der folgenden Aufgaben.

- (1) Es sei  $A$  ein  $R$ -Modul, und es gelte  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(A, A/2A) = 0$ . Für  $n \geq 3$  liefert die Modulstruktur auf  $A$  nach der vorangegangenen Aufgabe eine Abbildung

$$R \hookrightarrow \text{hom}_{\mathbb{Z}}(A, A) \cong [MA_n, MA_n].$$

Zeigen Sie, dass man für jeden Homologiefunktor  $\tilde{h}_\bullet$ , jeden Raum  $X$  und jedes  $k$  die Gruppe  $\tilde{h}_k(X; A)$  als  $R$ -Modul auffassen kann. Man erhält also einen  $\text{Mod}_R$ -wertigen Homologiefunktor.

- (2) Es sei  $A$  ein  $R$ -Modul und  $HA_\bullet$  das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zu  $A$ . Dann kann man den in Proposition 5.44 konstruierten Funktor  $\tilde{H}_\bullet(X; A)$  als  $\text{Mod}_R$ -wertigen Funktor auffassen.

5.111. ÜBUNG. Es sei  $f: MA_n \rightarrow MB_n$  eine stetige punktierte Abbildung zwischen Moore-Räumen, so dass die induzierte Abbildung  $f_*: A \cong \tilde{H}_n(MA_n) \rightarrow B \cong \tilde{H}_n(MB_n)$  injektiv ist. Zeigen Sie

- (1) Dann ist der reduzierte Abbildungskegel  $Cf$  ein Moore-Raum zu  $C = B/f_*A$ .  
 (2) Für jeden Homologiefunktor  $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$  und jeden Raum  $X$  erhalten wir die natürliche lange exakte *Bockstein-Sequenz*

$$\cdots \longleftarrow \tilde{H}_k(X; C) \longleftarrow H_k(X; B) \longleftarrow H_k(X; A) \xleftarrow{\partial} H_{k+1}(X; C) \longleftarrow \cdots$$

5.112. ÜBUNG. Wir fassen  $A = \mathbb{Z}/n$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul auf. Es sei  $f: MA_k \rightarrow S^{k+1}$  die Kollaps-Abbildung aus Übung 5.108.

- (1) Geben Sie die Koeffizientensequenzen für  $\tilde{H}_{k+1}(MA_k; A)$  und  $\tilde{H}_{k+1}(S^{k+1}; A)$  aus Satz 5.74 an, und stellen Sie die von  $f$  induzierte Sequenzabbildung in einem kommutativen Diagramm dar.  
 (2) Überprüfen Sie, dass beide Koeffizientensequenzen spalten, und dass die Spaltungen nicht natürlich sind.



Übungen zu Abschnitt 5.h.

5.113. ÜBUNG. Präzisieren Sie die Aussage, dass der in Proposition 5.81 konstruierte Isomorphismus

$$(\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X \wedge Y; R), d_{\bullet}^{\text{CW}}) \xrightarrow{\cong} (\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; R), d_{\bullet}^{\text{CW}}) \otimes (\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(Y; R), d_{\bullet}^{\text{CW}})$$

natürlich ist, und beweisen Sie sie.

5.114. ÜBUNG. Wir wollen  $I^n$  als CW-Komplex mit  $\binom{n}{k} 2^{n-k}$  Zellen der Dimension  $k$  darstellen. Wir orientieren  $I^n \subset \mathbb{R}^n$  mit der Standardbasis, und wir orientieren die Rand-Hyperflächen von  $I^n$  durch solche Basen des tangentialen  $(n-1)$ -dimensionalen Vektorraums, dass Voranstellen des äußeren Normalenvektors wieder eine positiv orientierte Basis des  $\mathbb{R}^n$  liefert.

- (1) Beschreiben Sie den zellulären Rand der  $n$ -Zelle von  $I^n$ .
- (2) Betrachten Sie jetzt  $I^m \times I^n = I^{m+n}$  und überprüfen Sie, dass sich der Rand der  $(m+n)$ -Zelle wie in Proposition 5.81 verhält.

5.115. ÜBUNG. Es sei  $A = \mathbb{Z}/n$  und  $B = \mathbb{Z}/m$  und  $k, \ell \geq 2$ .

- (1) Berechnen Sie  $\tilde{H}_{\bullet}(MB_{\ell} \wedge MA_k)$  und  $\tilde{H}_{\bullet}(MB_{\ell} \wedge S^{k+1})$ .
- (2) Sei  $f: MA_k \rightarrow S^{k+1}$  die obige Kollaps-Abbildung. Bestimmen Sie

$$(\text{id}_{MB_{\ell}} \wedge f)_{*}: \tilde{H}_{\bullet}(MB_{\ell} \wedge MA_k) \longrightarrow \tilde{H}_{\bullet}(MB_{\ell} \wedge S^{k+1}).$$

- (3) Konstruieren Sie wie in Übung 5.112 ein Beispiel dafür, dass die Künneth-Sequenz nicht natürlich spaltet.

5.116. ÜBUNG. Es seien  $X, Y$  gut punktierte,  $(n-1)$ - beziehungsweise  $(m-1)$ -zusammenhängende Räume.

- (1) Zeigen Sie, dass  $X \wedge Y$  ein  $(m+n-1)$ -zusammenhängender Raum ist.
- (2) Bestimmen Sie  $\pi_{m+n}(X \wedge Y)$ , falls  $m, n \geq 2$ .
- (3) Zusatz: was können Sie über die restlichen Fälle aussagen?



## Kohomologie

Kohomologie ist ein dualer Begriff zur Homologie, und wird ebenfalls durch Eilenberg-Steenrod-Axiome charakterisiert. Daher übertragen sich viele technische Resultate fast automatisch, beispielsweise existiert ein zellulärer Kokettenkomplex, der die gewöhnliche Kohomologie von CW-Komplexen ausrechnet.

Ausgehend von der zellulären Kohomologie beweisen wir ein universelles Koeffiziententheorem, das Kohomologie mit Homologie in Verbindung bringt. Auch können wir einen Spezialfall der Künneth-Formel leicht beweisen. Schließlich konstruieren wir noch Produkte auf der zellulären Kohomologie, sowie eine Wirkung auf zellulärer Homologie.

In der zweiten Hälfte konstruieren wir Kohomologiefunktoren aus  $\omega$ -Spektra. Eilenberg-Mac Lane-Spektra liefern gewöhnliche Kohomologiefunktoren. Als wichtige Beispiele allgemeiner Kohomologiefunktoren betrachten wir  $K$ -Theorie und Bordismustheorie. Da die Thom-Spektra für Bordismen keine  $\omega$ -Spektra sind, führen wir am Ende des Kapitels die Kategorie von CW-Spektra ein; insbesondere überlegen wir uns einen sinnvollen Begriff für Morphismen von Spektra.

### 6.a. Axiome für Kohomologiefunktoren

Wir beginnen mit den Eilenberg-Steenrod-Axiomen und geben einige Konsequenzen an. Da vieles genauso wie in Kapitel 5 funktioniert, lassen wir die Beweise weg.

Die folgende Definition ist dual zu den Definitionen 5.9 und 5.31. Aus technischen Gründen benötigen wir hier eine abelsche Kategorie mit beliebigen Produkten. Wie immer denken wir in erster Linie an die Kategorie  $\text{Mod}_R$ , und  $R = \mathbb{Z}$  ist ein wichtiger Spezialfall.

6.1. DEFINITION. Ein (*allgemeiner*) *reduzierter Kohomologiefunktor*  $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$  mit Werten in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  mit beliebigen Produkten besteht aus einer Familie kontravarianter Funktoren

$$\tilde{h}^\bullet = (\tilde{h}^n : \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{C})_{n \in \mathbb{Z}},$$

und einer Familie natürlicher Transformationen  $\delta_\bullet = (\delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit  $\delta_n(X, A) : \tilde{h}^n(A) \rightarrow \tilde{h}^{n+1}(X/A)$  für alle gut punktierten Kofaserungen  $(X, A)$ , die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

(1) *Kohomologiesequenz.* Für jedes gute Paar  $(X, A)$  ist die folgende Sequenz exakt:

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \tilde{h}^n(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}^n p} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\tilde{h}^n \iota} \tilde{h}^n(A) \xrightarrow{\delta_n} \tilde{h}^{n+1}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}^{n+1} p} \dots$$

(2) *Summenaxiom.* Sei  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  eine Familie gut punktierter Räume, dann ist die von den Inklusionsabbildungen  $\iota_i : X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$  induzierte Abbildung

$$\prod_{i \in I} \tilde{h}^n \iota_i : \tilde{h}^n \left( \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) \right) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} \tilde{h}^n (X_i)$$

ein Isomorphismus.

Man nennt  $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$  einen (*gewöhnlichen*) *reduzierten Kohomologiefunktor* mit *Koeffizienten*  $M$  in  $\mathcal{C}$ , wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

(3) *Dimensionsaxiom.*

$$\tilde{h}^n(S^0) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein reduzierter Kohomologiefunktor  $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$  heißt *invariant unter schwachen Äquivalenzen*, wenn zusätzlich gilt:

(4) Jeder schwach zusammenziehbare Raum  $Z$  erfüllt

$$\tilde{h}^n(Z) = 0.$$

In (2) brauchen wir das Produkt anstelle des Koproduktes in 5.9 (2), um einen Pfeil in die richtige Richtung definieren zu können. Das sieht auf den ersten Blick harmlos aus, macht aber später bei „großen“ Räumen Probleme. Zum ersten Mal erleben wir diesen Effekt bei der Künneth-Formel, siehe Satz 6.12. Für  $\tilde{h}^n f$  schreiben wir auch kurz  $f^*$ .

6.2. BEMERKUNG. Wir sammeln einige elementare Eigenschaften.

(1) Wie in Lemma 5.10 gilt

$$\tilde{h}^\bullet(\text{pt}) = 0.$$

für jeden reduzierten Kohomologiefunktor  $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$ .

(2) Das Summenaxiom folgt im Falle eines endlichen Bouquets aus den anderen Axiomen, siehe Bemerkung 5.14.

(3) Wie in Bemerkung 5.12 definieren wir einen unreduzierten Kohomologiefunktor  $(h^\bullet, \delta_\bullet)$  zu  $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$  durch

$$h^k(X) = \tilde{h}^k(X_+)$$

und erhält die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{h}(S^0) \longrightarrow h(X) \longrightarrow \tilde{h}(X) \longrightarrow 0.$$

Sobald man einen Basispunkt in  $X$  auszeichnet, erhält man eine Spaltung dieser Sequenz. Für Paare  $(X, Y)$  definieren wir die relative Kohomologie  $h^k(X, Y) = \tilde{h}^k(X//Y)$ .

(4) Wenn wir Invarianz unter schwachen Äquivalenzen im Sinne von 6.1 (4) annehmen, folgt wie in Bemerkung 5.32 für jede schwache Äquivalenz  $f: X \rightarrow Y$ , dass

$$f^*: \tilde{h}^n(Y) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}^n(X).$$

Im Folgenden meinen wir stets reduzierte Kohomologiefunktor, solange wir nichts anderes sagen. In der Notation werden wir den Verbindungshomomorphismus  $\delta_\bullet$  oft weglassen. Das folgende Resultat wird genauso bewiesen wie der analoge Satz 5.13.

6.3. SATZ (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es sei  $X = A \cup B$ , so dass  $(A, A \cap B)$  und  $(B, A \cap B)$  Kofaserungen sind, und es sei  $\tilde{h}$  ein allgemeiner Kohomologiefunktor. Bezeichne die natürlichen Inklusionen mit*

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow b & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{j} & X \end{array}.$$

Dann existiert ein natürlicher Verbindungshomomorphismus  $\delta: \tilde{h}^n(A \cap B) \rightarrow \tilde{h}^{n+1}(X)$ , so dass die Sequenz

$$\dots \longrightarrow \tilde{h}^{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\delta} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{(i^*, j^*)} \tilde{h}^n(A) \oplus \tilde{h}^n(B) \xrightarrow{a^* - b^*} \tilde{h}^n(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

exakt ist.

BEWEIS. Wir drehen im Beweis von Satz 5.13 alle Pfeile um.  $\square$

6.4. FOLGERUNG. *Es sei  $\tilde{h}^\bullet$  ein allgemeiner reduzierter Kohomologiefunktor und  $k, n \in \mathbb{Z}$  mit  $n \geq 1$ . Dann existiert für jeden gut punktierten Raum  $X$  ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{h}^k(S^n X) \cong \tilde{h}^{k-n}(X). \quad (1)$$

Falls  $\tilde{h}_\bullet$  ein gewöhnlicher reduzierter Kohomologiefunktor mit Koeffizienten  $M$  in  $\mathcal{C}$  ist, gilt insbesondere

$$\tilde{h}^k(S^n) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2)$$

Auch über Abbildungen zwischen Sphären können wir Aussagen machen, analog zu Satz 5.18.

6.5. FOLGERUNG. *Es sei  $\tilde{h}^\bullet$  ein Kohomologiefunktor, es seien  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , und  $f: S^m \rightarrow S^n$  sei stetig.*

- (1) Falls  $m < n$ , gilt  $f^* = 0: \tilde{h}^k(S^n) \rightarrow \tilde{h}^k(S^m)$ .
- (2) Falls  $m = n$ , gilt  $f^* = \deg f: \tilde{h}^k(S^n) \rightarrow \tilde{h}^k(S^n)$ .
- (3) Falls  $m > n$  und  $\tilde{h}^\bullet$  das Dimensionsaxiom 6.1 (3) erfüllt, gilt  $f^* = 0: \tilde{h}^k(S^n) \rightarrow \tilde{h}^k(S^m)$ .

Aussage (3) muss für allgemeine Kohomologiefunktoren nicht gelten.

## 6.b. Zelluläre Kohomologie und ein universelles Koeffiziententheorem

In diesem Abschnitt führen wir den zellulären Kokettenkomplex ein, der die gewöhnliche Kohomologie eines CW-Komplexes ausrechnet. Mit Hilfe dieses Komplexes stellen wir einen Zusammenhang zwischen gewöhnlicher Homologie und Kohomologie her. Man beachte wie in Abschnitt 5.c, dass alle Resultate in diesem Abschnitt Konsequenzen der Eilenberg-Steenrod-Axiome sind.

Im Folgenden sei  $R$  stets ein kommutativer Ring mit Eins, und  $A$  sei ein  $R$ -Modul. Mit  $A^I$  bezeichnen wir das Produkt über Kopien von  $A$  mit Indexmenge  $I$ . Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor  $\tilde{H}^\bullet$  mit Koeffizienten  $A$  existiert. Wir benutzen die Isomorphismen aus Folgerung 6.4 und identifizieren

$$\tilde{H}^n(D^n/S^{n-1}; A) \cong \tilde{H}^n(S^n; A) \cong A.$$

Alternativ könnten wir ein beliebiges Objekt  $M$  einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  als Koeffizienten wählen, und erhielten völlig analog zu Satz 5.23 einen zellulären Kokettenkomplex. Allerdings können wir das universelle Koeffiziententheorem und die Künneth-Formel nicht in einem so allgemeinen Kontext formulieren.

Es sei  $X$  ein CW-Komplex, und  $\Phi_j^n: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$  seien die charakteristischen Abbildungen der Zellen von  $X$  für  $j \in J^n$ , aufgefasst als Abbildungen von Paaren. Wir bezeichnen die induzierte punktierte Abbildung auf den Quotienten mit  $\bar{\Phi}_j^n: S^n \rightarrow X^n/X^{n-1}$ . Für  $n = 0$  fixieren wir einen Punkt von  $S^0$  als Basispunkt. Für  $j \in J^0$  bezeichne  $\bar{\Phi}_j^0: S^0 \rightarrow X^0 = X^0/X^{-1}$  die punktierte Abbildung, die den anderen Punkt von  $S^0$  auf  $e_j^0 \in X^0 \setminus \{x_0\}$  abbildet.

6.6. LEMMA. *Für  $k \in \mathbb{Z}$  und  $n \geq 0$  erhalten wir natürliche Isomorphismen*

$$\tilde{H}^n(X^n/X^{n-1}; A) \cong A^{J^n} \quad \text{mit} \quad \alpha \mapsto ((\bar{\Phi}_j^n)^*(\alpha))_{j \in J^n}, \quad (1)$$

$$\tilde{H}^k(X^n/X^{n-1}; A) \cong 0 \quad \text{falls } k \neq n, \quad (2)$$

$$\tilde{H}^k(X^n; A) \cong 0 \quad \text{falls } k > n, \quad (3)$$

$$\text{und} \quad \tilde{H}^k(X^n; A) \cong \tilde{H}^k(X; A) \quad \text{falls } n > k. \quad (4)$$

BEWEIS. Wir gehen wie im Beweis von Lemma 5.20 vor. In (1) erhalten wir wegen des Summenaxioms hier ein Produkt.  $\square$

Die folgende Definition ist völlig analog zu Definition 5.21.

6.7. DEFINITION. Ein (*Koketten-*)Komplex  $(C^\bullet, d_\bullet)$  in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  ist eine Sequenz  $(d_n: C^n \rightarrow C^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$  von  $\mathcal{C}$ -Morphismen, so dass

$$d^n \circ d^{n-1} = 0: C^{n-1} \longrightarrow C^{n+1}$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Man definiert Objekte  $B^n(C^\bullet, d_\bullet) \subset Z^n(C^\bullet, d_\bullet) \subset C^n$  und  $H^n(C^\bullet, d_\bullet)$  in  $\mathcal{C}$  durch

$$Z^n(C^\bullet, d_\bullet) = \ker d_n,$$

$$B^n(C^\bullet, d_\bullet) = \operatorname{im} d_{n-1}$$

$$\text{und } H^n(C^\bullet, d_\bullet) = Z^n(C^\bullet, d_\bullet) / B^n(C^\bullet, d_\bullet).$$

Elemente von  $C^n$ ,  $Z^n(C^\bullet, d_\bullet)$  und  $B^n(C^\bullet, d_\bullet)$  heißen *n-Koketten*, *n-Kozykel* beziehungsweise *n-Koränder* des Komplexes. Das Objekt  $H^n(C^\bullet, d_\bullet)$  heißt die *n-te Kohomologie* des Komplexes.

Eine *Kokettenabbildung*  $f^\bullet: (C^\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'^\bullet, d'_\bullet)$  vom Grad  $a$  ist eine Sequenzabbildung vom Grad  $a$ . Die induzierten Abbildungen zwischen den Kohomologien bezeichnet man mit

$$H^n f^\bullet = f^*: H^n(C^\bullet, d_\bullet) \rightarrow H^{n+a}(C'^\bullet, d'_\bullet).$$

Wir betrachten die Inklusion  $\iota_n: X^n \rightarrow X^{n+1} \rightarrow X$  und die Projektion  $p_n: X^{n+1} \rightarrow X^{n+1}/X^n$ . Mit den Isomorphismen aus Lemma 6.6 erhalten wir aus den langen exakten Sequenzen der Paare  $(X^{n+1}, X^n)$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \searrow & & & \\
 & & & \tilde{H}^n(X) & & & \\
 & & & \swarrow \iota_{n+1}^* & & \searrow & 0 \\
 & & & \tilde{H}^n(X^n; A) & & & \\
 & & & \swarrow p_n^* & & \searrow \delta_{n+1} & \\
 \dots & \longrightarrow & \tilde{H}^{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}; A) & \xrightarrow{\delta_{\text{CW}}^{n-1}} & \tilde{H}^n(X^n/X^{n-1}; A) & \xrightarrow{\delta_{\text{CW}}^n} & \tilde{H}^{n+1}(X^{n+1}/X^n; A) \longrightarrow \dots \\
 & & \swarrow p_{n-1}^* & & \swarrow \delta_n & & \swarrow p_{n+1}^* \\
 & & \tilde{H}^{n-1}(X^{n-1}; A) & & & & \tilde{H}^{n+1}(X^{n+1}; A) \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \searrow \\
 \dots & & & & & & 0.
 \end{array}$$

6.8. SATZ (Zelluläre Kohomologie). *Es sei  $\tilde{H}^\bullet(\cdot; A)$  ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten  $A$  in  $\operatorname{Mod}_R$ . Für alle  $n$  definiere*

$$\tilde{C}_{\text{CW}}^n(X; A) = \operatorname{hom}_R(\tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; R), A), \quad (1)$$

$$\delta_{\text{CW}}^n = \operatorname{hom}_R(d_{n+1}^{\text{CW}}, A): \tilde{C}_{\text{CW}}^n(X; A) \longrightarrow \tilde{C}_{\text{CW}}^{n+1}(X; A), \quad \text{und} \quad (2)$$

$$f^{\#n} = \operatorname{hom}_R(f_{\#n}, A): \tilde{C}_{\text{CW}}^n(Y; A) \longrightarrow \tilde{C}_{\text{CW}}^n(X; A) \quad (3)$$

für alle zellulären Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$ . Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\tilde{H}^n(X) \cong H^n(\tilde{C}_{\text{CW}}^\bullet(X; A), \delta_{\text{CW}}^\bullet). \quad (4)$$

Man sagt dazu auch, der *zelluläre Kokettenkomplex*  $(\tilde{C}_{\text{CW}}^\bullet(X; A), \delta_{\text{CW}}^\bullet)$  entstehe durch *Dualisieren* aus dem zellulären Kettenkomplex. Wichtig ist dabei, dass wir den zellulären Kettenkomplex mit Koeffizienten im zugrundeliegenden Ring  $R$  bilden und die Koeffizienten  $A$  für die Kohomologie erst durch den Funktor  $\text{hom}_R(\cdot, A)$  einführen.

BEWEIS. Es gilt  $\text{hom}_R(R, A) \cong A$ . Mit Definition 5.22 und Lemma 6.6 (1) identifizieren wir

$$\tilde{H}^n(X^n/X^{n-1}; A) \cong A^{J^n} \cong \text{hom}_R(R, A)^{J^n} \quad \text{und} \quad \tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; R) \cong R^{\oplus J^n}.$$

Für die in (1) definierten Moduln existieren nach Bemerkung 5.53 natürliche Isomorphismen

$$C_{\text{CW}}^n(X; A) \cong \text{hom}_R(R^{\oplus J^n}, A) \cong \text{hom}_R(R, A)^{J^n} \cong \tilde{H}^n(X^n/X^{n-1}; A).$$

Wie in Definition 5.22 betrachte

$$d_{ij}^{n+1} = \deg f_{ji}^{n+1} \quad \text{mit} \quad f_{ji}^{n+1} = q_j^n \circ p_n \circ \varphi_i^{n+1}: S^n \longrightarrow S^n,$$

hierbei sei  $\varphi_i^{n+1}: S^n \rightarrow X^n$  die Anklebeabbildung der Zelle  $e_i^{n+1}$ , und  $q_j^n: X^n/X^{n-1} \rightarrow S^n$  die Kollapsabbildung zur Zelle  $e_j^n$ . Für jedes  $i \in J^{n+1}$  gibt es dann nur endlich viele  $j \in J^n$ , für die  $d_{ij}^{n+1} \neq 0$ . Um den Korandoperator  $\delta_{\text{CW}}^n = \delta_n \circ p_n^*$  zu bestimmen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}^n(S^n; A) & \xrightarrow{(f_{ij}^{n+1})^*} & \tilde{H}^n(S^n; A) & \xrightarrow[\cong]{\delta_n} & \tilde{H}^{n+1}(S^{n+1}; A) \\ (q_j^n)^* \downarrow & & (\varphi_i^{n+1})^* \uparrow & & \uparrow (\bar{\varphi}_i^{n+1})^* \\ \tilde{H}^n(X^n/X^{n-1}; A) & \xrightarrow{p_n^*} & \tilde{H}^n(X^n; A) & \xrightarrow{\delta_n} & \tilde{H}^{n+1}(X^{n+1}/X^n; A) \end{array}$$

für  $i \in J^{n+1}$ ,  $j \in J^n$ . Nach Folgerung 6.5 (2) operiert  $(f_{ji}^{n+1})^*$  auf  $A \cong \tilde{H}^n(S^n; A)$  durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad  $d_{ij}^{n+1}$ .

Seien  $\alpha = (a_j)_{j \in J^n} \in A^{J^n} \cong \tilde{C}_{\text{CW}}^n(X; A)$  und  $c = \sum_{i \in J^{n+1}} r_i \in R^{\oplus J^{n+1}}$  gegeben. Aus Definition 5.22 und der obigen Überlegung folgt

$$(\delta_{\text{CW}}^n(\alpha))(c) = \left( \sum_{j \in J^n} d_{ij}^{n+1} a_j \right)_{i \in J^{n+1}} \quad (c) = \sum_{j \in J^n} \sum_{i \in J^{n+1}} r_i d_{ij}^{n+1} a_j = \alpha(d_{n+1}^{\text{CW}}(c)).$$

Jetzt haben wir die mittlere Zeile im obigen kommutativen Diagramm mit dem in (1)–(2) beschriebenen Komplex identifiziert. Der Beweis von (3) verläuft analog, und wir zeigen (4) durch Diagrammjagd, analog zum Beweis von Satz 5.23.  $\square$

Aufgrund von Satz 6.8 könnte man wieder erwarten, dass  $\tilde{H}^n(X; A) \cong \text{hom}(\tilde{H}_n(X; R), A)$  gilt. Für die Räume  $\mathbb{C}P^n$  und  $\mathbb{H}P^n$  stimmt das tatsächlich, siehe dazu Beispiel 5.25. Ähnlich wie beim universellen Koeffiziententheorem 5.74 und bei der Künneth-Formel 5.78 stimmt das auch hier nur bis auf einen derivierten Funktor.

6.9. SATZ (Universelles Koeffiziententheorem für gewöhnliche Kohomologie). *Es sei  $R$  ein Hauptidealring und  $\tilde{H}^\bullet(\cdot; A)$  ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten  $A$  in der Kategorie  $\text{Mod}_R$ . Dann existiert für alle  $n$  und alle CW-Komplexe  $X$  eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R(\tilde{H}_{n-1}(X; R), A) \longrightarrow \tilde{H}^n(X; A) \longrightarrow \text{hom}_R(\tilde{H}_n(X; R), A) \longrightarrow 0.$$

*Diese Sequenz spaltet, allerdings nicht natürlich.*

Die Abbildung  $\tilde{H}^n(X; A) \rightarrow \text{hom}_R(\tilde{H}_n(X; R), A)$  induziert durch Auswerten die sogenannte *Kronecker-Paarung*

$$\tilde{H}^n(X; A) \times \tilde{H}_n(X; R) \longrightarrow \text{hom}_R(\tilde{H}_n(X; R), A) \times \tilde{H}_n(X; R) \xrightarrow{\text{ev}} A.$$

Für  $\alpha \in \tilde{H}^n(X; A)$  und  $c \in \tilde{H}_n(X; R)$  schreiben wir  $\langle c, \alpha \rangle$  oder  $\alpha(c) \in A$ .

6.10. FOLGERUNG. *Es sei  $\mathbb{k}$  ein Körper und  $\tilde{H}^\bullet(\cdot; V)$  ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten  $V$  in der Kategorie  $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$ . Dann existiert für alle  $n$  und alle CW-Komplexe  $X$  ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{H}^n(X; V) \cong \text{hom}_{\mathbb{k}}(\tilde{H}_n(X; \mathbb{k}), V).$$

BEWEIS. Nach Satz 5.60 verschwindet das Erweiterungsprodukt über Körpern.  $\square$

BEWEIS VON SATZ 6.9. Der Einfachheit halber schreiben wir  $C_n, Z_n, B_n$  und  $H_n$  für die Moduln der Ketten, Zykel, Ränder und die Homologie des Komplexes  $(\tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; R), d_{\bullet}^{\text{CW}})$ , und  $C^n, H^n$  für die Koketten und die Kohomologie des Komplexes  $(\tilde{C}_{\text{CW}}^{\bullet}(X; A), \delta_{\bullet}^{\text{CW}})$ . Außerdem kürzen wir  $\text{hom}(f, A)$  mit  $f^*$  ab.

Es bezeichne  $\iota_n: B_n \rightarrow Z_n$  die natürliche Inklusion. Nach Definition der Homologie erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow H_n \longleftarrow Z_n \xleftarrow{\iota} B_n \longleftarrow 0.$$

Da  $B_n$  und  $Z_n$  als Untermoduln von  $C_n$  nach Proposition 5.64 (1) frei sind, ist das eine freie Auflösung von  $H_n$ . Nach Satz 5.60 gilt

$$\text{hom}_R(H_n, A) = \ker(\iota_n^*) \quad \text{und} \quad \text{Ext}_R(H_n, A) = \text{coker}(\iota_n^*).$$

Wir betrachten eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & B_n & \xleftarrow{d_{n+1}} & C_{n+1} & \longleftarrow & Z_{n+1} \longleftarrow 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow d_{n+1} & & \downarrow 0 \\ 0 & \longleftarrow & B_{n-1} & \xleftarrow{d_n} & C_n & \longleftarrow & Z_n \longleftarrow 0, \end{array} \quad (*)$$

wobei die äußeren Komplexe triviales Differential haben. Da die Zeilen aus freien Moduln bestehen, liefert der Funktor  $\text{hom}_R(\cdot, A)$  eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{hom}_R(B_n, A) & \longrightarrow & C^{n+1} & \longrightarrow & \text{hom}_R(Z_{n+1}, A) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow 0 & & \uparrow \delta_n & & \uparrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \text{hom}_R(B_{n-1}, A) & \longrightarrow & C^n & \longrightarrow & \text{hom}_R(Z_n, A) \longrightarrow 0, \end{array}$$

wobei wir die mittlere Spalte nach Satz 6.8 mit dem Komplex  $(\tilde{C}_{\text{CW}}^{\bullet}(X; A), \delta_{\bullet}^{\text{CW}})$  identifizieren.

Wir wenden das Schlangenlemma 5.65 an. Da die äußeren Komplexe triviales Differential haben, ändert sich nichts beim Übergang zur Kohomologie. Eine kurze Diagrammjagd zeigt, dass der Verbindungshomomorphismus gerade  $\iota_n^*$  ist, also erhalten wir die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \text{hom}_R(Z_{n-1}, A) \xrightarrow{\iota_{n-1}^*} \text{hom}_R(B_{n-1}, A) \longrightarrow H^n \longrightarrow \text{hom}_R(Z_n, A) \xrightarrow{\iota_n^*} \text{hom}_R(B_n, A) \longrightarrow \cdots$$

Hieraus ergibt sich die kurze exakte Sequenz im Satz.



Da die Ränder  $B_n$  frei sind, spalten die Zeilen in (\*), und wir erhalten Abbildungen  $p_n: C_n \rightarrow Z_n$  mit  $p_n|_{Z_n} = \text{id}_{Z_n}$ . Wir wenden auf das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & B_n \\ d_{n+1} \downarrow & \swarrow & \downarrow \iota_n \\ C_n & \xrightarrow{p_n} & Z_n . \end{array}$$

den Funktor  $\text{hom}_R(\cdot, A)$  an und erhalten

$$\begin{array}{ccc} C^{n+1} & \xleftarrow{d_{n+1}^*} & \text{hom}_R(B_n; A) \\ \delta_n \uparrow & \nearrow & \uparrow \iota_n^* \\ C^n & \xleftarrow{p_n^*} & \text{hom}_R(Z_n; A) . \end{array}$$

Wir sehen, dass die Einschränkung von  $p_n^*$  auf  $\ker \iota_n^* = \text{hom}_R(H_n, A)$  nach  $\ker \delta_n \subset C^n$  abbildet, also induziert  $p_n^*$  die gesuchte Spaltungsabbildung

$$p_n^*|_{\ker \iota_n^*}: \text{hom}_R(H_n, A) \longrightarrow \ker \delta_n \twoheadrightarrow H^n(X; A) . \quad \square$$

Mit ähnlichen Methoden zeigt man auch das am Ende von Abschnitt 5.h erwähnte universelle Koeffiziententheorem für die Homologie, siehe Übung 6.51.

6.11. BEISPIEL. Wir betrachten den Raum  $\mathbb{R}P^2$  aus Beispiel 5.26 und  $R = A = \mathbb{Z}$ . Es gilt

$$\text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} , \quad \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 = \text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \text{Ext}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2 .$$

Somit erhalten wir

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} 0 \cong \text{hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z}/2 \cong \text{Ext}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) & \text{falls } k \text{ gerade und } 0 < k \leq n, \\ \mathbb{Z} \cong \text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \text{falls } k = n \text{ ungerade,} \\ 0 \cong \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \text{falls } k = n + 1 \text{ gerade, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1)$$

Im Vergleich zu Beispiel 5.26 (1) treten die Torsionsanteile jetzt jeweils um 1 höheren Grad auf, während die freien Gruppen ihren Platz beibehalten. Dieses Verhalten erklärt sich aus Übung 5.103.

Sei jetzt  $R = A = \mathbb{Z}/2$ . Da  $R$  ein Körper ist, verschwinden alle Erweiterungsprodukte, und es gilt  $\text{hom}_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ . Mit Beispiel 5.26 (2) erhalten wir

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \cong \text{hom}_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) & \text{falls } 0 < k \leq n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2)$$

Das gleiche Ergebnis hätten wir für  $R = \mathbb{Z}$  und  $A = \mathbb{Z}/2$  aus Beispiel 5.26 (1) erhalten, allerdings mit etwas mehr Rechenarbeit, ähnlich wie in Beispiel 5.75.

Sei schließlich  $\mathbb{k}$  ein Körper der Charakteristik  $\neq 2$ . Aus Beispiel 5.26 (3) folgt

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) \cong \begin{cases} \mathbb{k} & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3)$$

Als nächstes betrachten wir eine Künnethformel für Kohomologie. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Koeffizienten in einem Körper  $\mathbb{k}$ .

6.12. SATZ (Kohomologische Künneth-Formel). *Es seien  $X, Y$  topologische Räume, und es sei  $\mathbb{k}$  ein Körper. Wir nehmen an, dass  $\tilde{H}^k(X; \mathbb{k})$  für alle  $k \geq 0$  endlich-dimensional ist. Dann gibt es natürliche Isomorphismen*

$$H^n(X \times Y; \mathbb{k}) \cong (H^\bullet(X; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} H^\bullet(Y; \mathbb{k}))_n, \quad \text{und} \quad (1)$$

$$\tilde{H}^n(X \wedge Y; \mathbb{k}) \cong (\tilde{H}^\bullet(X; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \tilde{H}^\bullet(Y; \mathbb{k}))_n, \quad \text{falls } X \text{ und } Y \text{ gut punktiert sind.} \quad (2)$$

Allgemeinere Formulierungen, zum Beispiel über Hauptidealringen, sind möglich; allerdings benötigt man stets eine „Endlichkeitsbedingung“ für einen der beiden Räume, siehe Übung 6.52.

BEWEIS. Seien  $V, W$  zwei  $\mathbb{k}$ -Vektorräume. Zu zwei Elementen  $\alpha \in V^* = \text{hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$  und  $\beta \in W^* = \text{hom}_{\mathbb{k}}(W, \mathbb{k})$  existiert eine bilineare Abbildung

$$V \times W \longrightarrow \mathbb{k} \quad \text{mit} \quad (v, w) \longmapsto \alpha(v) \beta(w).$$

Nach der charakteristischen Eigenschaft 4.10 (2) des Tensorproduktes existiert daher eine Abbildung

$$\alpha \otimes \beta: V \otimes W \rightarrow \mathbb{k} \quad \text{mit} \quad v \otimes w \longmapsto \alpha(v) \beta(w).$$

Die Zuordnung  $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \otimes \beta \in (V \otimes W)^*$  ist ebenfalls bilinear, also erhalten wir eine natürliche Abbildung

$$V^* \otimes W^* \longrightarrow (V \otimes W)^*. \quad (*)$$

Sei jetzt einer der beiden Vektorräume endlich-dimensional, etwa  $V$ , mit Basis  $(v_1, \dots, v_p)$ . Dann erhalten wir eine duale Basis  $(v^1, \dots, v^p)$  von  $V^*$  mit  $v^i(v_j) = \delta_{ij}$ . Jedes Element von  $V^* \otimes W^*$  lässt sich dann darstellen als

$$\sum_{i=1}^p v^i \otimes \beta^i,$$

mit  $\beta^1, \dots, \beta^p \in W^*$  beliebig. Sei umgekehrt  $\gamma \in (V \otimes W)^*$ , dann ist nach Bemerkung 4.11 die Abbildung

$$\gamma \circ (\otimes_{V, W}(v_i)): W \longrightarrow \mathbb{k} \quad \text{mit} \quad w \longmapsto \gamma(v_i \otimes w)$$

linear, und wir setzen  $\beta_i = \gamma \circ (\otimes_{V, W}(v_i)) \in W^*$ . Jedes Element  $u \in V \otimes W$  lässt sich schreiben als

$$u = \sum_{i=1}^p v_i \otimes w_i$$

mit  $w_1, \dots, w_p \in W$  beliebig. Einsetzen in  $\gamma$  liefert

$$\gamma(u) = \sum_{i=1}^p \gamma(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^p \beta^i(w_i) = \sum_{i,j=1}^p (v^j \otimes \beta^j)(v_i \otimes w_i) = \left( \sum_{i=1}^p v^i \otimes \beta^i \right) (u).$$

Daher ist die Abbildung (\*) in diesem Fall ein Isomorphismus.

Wir beweisen die Aussage (2); der Beweis von (1) ist analog. Nach den Folgerungen 5.80 (2), 6.10 und der obigen Vorarbeit gilt

$$\begin{aligned} \tilde{H}^n(X \wedge Y; \mathbb{k}) &\cong \tilde{H}_n(X \wedge Y; \mathbb{k})^* \cong \left( \bigoplus_{k=0}^n \tilde{H}_k(X; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \tilde{H}_{n-k}(Y; \mathbb{k}) \right)^* \\ &\cong \bigoplus_{k=0}^n \tilde{H}_k(X; \mathbb{k})^* \otimes_{\mathbb{k}} \tilde{H}_{n-k}(Y; \mathbb{k})^* \cong (\tilde{H}_\bullet(X; \mathbb{k})^* \otimes \tilde{H}_\bullet(Y; \mathbb{k})^*)_n \\ &\cong (\tilde{H}^\bullet(X; \mathbb{k}) \otimes \tilde{H}^\bullet(Y; \mathbb{k}))_n. \quad \square \end{aligned}$$

Wenn beide Vektorräume unendlich-dimensional sind, ist die Abbildung (\*) kein Isomorphismus mehr. Denn jedes Element von  $V^* \otimes W^*$  hat „endlichen Rang“, das heißt, lässt sich als endliche Linearkombination zerlegbarer Elemente  $\alpha^i \otimes \beta^i$  schreiben. Wenn wir unendlich viele linear unabhängige  $\alpha^i \in V^*$  und  $\beta^i \in W^*$  für  $i \in I$  finden können, erhalten wir ein Element von „unendlichem Rang“

$$\sum_{i \in I} \alpha^i \otimes \beta^i \in (V \otimes W)^* \setminus V^* \otimes W^* .$$

### 6.c. Produkte

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie man zumindest für CW-Komplexe Produkte zwischen Kohomologiegruppen definieren kann. Im nächsten Kapitel lernen wir einen abstrakten Zugang kennen, der Produkte auch für verallgemeinerten Kohomologiefunktoren konstruiert. Da wir im Moment nur zellulär arbeiten, können wir das Kürzel „CW“ in der Notation weglassen.

Es seien  $X, Y$  CW-Komplexe und  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Es seien

$$\alpha \in \text{hom}_R(C_k(X; R), R) = \tilde{C}^k(X; R) \quad \text{und} \quad \beta \in \text{hom}_R(C_\ell(Y; R), R) = \tilde{C}^\ell(Y; R)$$

Koketten, dann erhalten wir wie im Beweis von Satz 6.12 eine Abbildung

$$\alpha \otimes \beta: \tilde{C}_k(X; R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y; R) \longrightarrow R .$$

Da  $\tilde{C}_k(X; R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y; R)$  nach Definition 5.77 und Proposition 5.81 ein direkter Summand von

$$(\tilde{C}_\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{C}_\bullet(Y; R))_{k+\ell} \cong \tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y; R) \quad (*)$$

ist, können wir  $\alpha \otimes \beta$  auf eindeutige Weise mit Satz 6.8 zu einer Kokette

$$\alpha \wedge \beta \in \text{hom}_R(\tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y; R), R) \cong C^{k+\ell}(X \wedge Y; R)$$

fortsetzen, die auf allen anderen Summanden des Tensorproduktes verschwindet. Das liefert eine Abbildung

$$\wedge: \tilde{C}^\bullet(X; R) \times \tilde{C}^\bullet(Y; R) \longrightarrow C^\bullet(X \wedge Y; R)$$

Sei jetzt  $\alpha \in \tilde{C}^k(X; R)$  wie oben, dann setzen wir

$$\tilde{C}_k(X; R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y; R) \xrightarrow{\alpha \otimes \text{id}} R \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y; R) \cong \tilde{C}_\ell(Y; R)$$

durch 0 auf alle anderen Summanden des Tensorproduktes (\*) fort. Das liefert eine Abbildung

$$/: \tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y; R) \otimes_R C^k(X; R) \longrightarrow C_\ell(Y; R) .$$

**6.13. PROPOSITION UND DEFINITION.** *Die obigen Abbildungen  $\wedge$  und  $/$  induzieren für CW-Komplexe  $X, Y$  natürliche äußere Produkte*

$$\wedge: \tilde{H}^\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(Y; R) \longrightarrow \tilde{H}^\bullet(X \wedge Y; R) ,$$

$$\text{und} \quad /: \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X; R) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(Y; R) ,$$

das Smash-Produkt, sowie das Schräg- oder Slant-Produkt. Diese haben für alle  $\alpha \in \tilde{H}^k(X; R)$ ,  $\beta \in \tilde{H}^\ell(Y; R)$ ,  $\gamma \in \tilde{H}^m(Z; R)$  und  $a \in \tilde{H}_k(X; R)$ ,  $b \in \tilde{H}_{k+\ell}(X \wedge Y; R)$ ,  $c \in \tilde{H}_{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z; R)$  die folgenden Eigenschaften.

(1) Assoziativität. *Es gilt*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \in \tilde{H}^{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z; R)$$

$$\text{und} \quad (c/\alpha)/\beta = c/(\alpha \wedge \beta) \in \tilde{H}_m(Z; R) .$$

(2) Einselement. *Für das Element  $1 \in R \cong \tilde{H}^0(S^0; R)$  gilt*

$$1 \wedge \alpha = \alpha \wedge 1 = \alpha \in \tilde{H}^k(X; R) \quad \text{und} \quad a/1 = a \in \tilde{H}_k(X; R) .$$

(3) Stabilität. Für die Stabilisierungs-Isomorphismen  $\sigma$  gilt

$$\begin{aligned} (\sigma\alpha) \wedge \beta &= \sigma(\alpha \wedge \beta) = (-1)^k \alpha \wedge (\sigma\beta) \in \tilde{H}^{k+\ell+1}(S(X \wedge Y); R), \\ (\sigma b)/(\sigma\alpha) &= b/\alpha \in \tilde{H}_\ell(Y; R) \quad \text{und} \quad (\sigma b)/\alpha = (-1)^k \sigma(b/\alpha) \in \tilde{H}_{\ell+1}(Y; R). \end{aligned}$$

(4) Adjunktion. Für das Kronecker-Produkt gilt

$$\langle b/\alpha, \beta \rangle = \langle b, \alpha \wedge \beta \rangle \quad \text{und} \quad a/\alpha = \langle a, \alpha \rangle \in R \cong \tilde{H}_0(S^0; R).$$

(5) Transposition. Die Transpositionsabbildung  $t: X \wedge Y \rightarrow Y \wedge X$  sei gegeben durch  $t(x \wedge y) = y \wedge x$ , dann gilt

$$t^*(\beta \wedge \alpha) = (-1)^{k\ell} \alpha \wedge \beta.$$

„Natürlichkeit“ für das Schräg-Produkt bedeutet, dass

$$((f \wedge g)_* b)/\alpha = g_*(b/(f^* \alpha)) \in \tilde{H}_\ell(W; R) \tag{6.1}$$

für alle  $f: X \rightarrow Z$ ,  $g: Y \rightarrow W$ ,  $\alpha \in \tilde{H}^k(Z; R)$  und  $b \in \tilde{H}_{k+\ell}(X \wedge Y; R)$  gilt. Es ist kontraintuitiv, beim Schräg-Produkt von rechts auf den linken Faktor eines Produktes einzuwirken, aber so erhalten wir alle obigen Eigenschaften.

Später werden wir sehen, dass die Eigenschaften (1)–(3) die beiden äußeren Produkte bereits eindeutig festlegen. Die Notation „/“ ist etwas irreführend, da hier multipliziert und nicht dividiert wird. Immerhin gelten einzelne „Bruchrechenregeln“, und die Grade der beteiligten Klassen verhalten sich so wie erwartet.

BEWEIS. Zunächst zeigen wir Wohldefiniertheit des Smash-Produktes, das heißt, das Produkt von Kozykeln ist wieder ein Kozykel, und exakt, falls einer der Faktoren exakt ist. Beides folgt mit Proposition 5.81 und Satz 6.8, denn für  $\alpha, \beta$  wie oben und  $v \in \tilde{C}_\bullet(X; R)$ ,  $w \in \tilde{C}_\bullet(Y; R)$  gilt

$$\begin{aligned} (\delta^{k+\ell}(\alpha \wedge \beta))(v \otimes w) &= (\alpha \wedge \beta)(d_{k+\ell+1}(v \otimes w)) = \alpha(dv) \cdot \beta(w) + (-1)^k \alpha(v) \cdot \beta(dw) \\ &= (\delta^k \alpha(v)) \cdot \beta(w) + (-1)^k \alpha(v) \cdot (\delta^\ell \beta(w)) = (\delta^k \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \delta^\ell \beta)(v \otimes w). \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass  $\alpha(v) \neq 0$  nur dann, wenn  $v \in C_k(X; R)$ . Analog ist auch das Schrägprodukt wohldefiniert.

Assoziativität (1) folgt, da das Smashprodukt auf Koketten bereits assoziativ ist. Natürlichkeit lässt sich ebenfalls leicht überprüfen. Für das Schrägprodukt erhalten wir Assoziativität auf Ketten- und Kokettenniveau, indem wir Ketten der Form  $c = x \otimes y \otimes z$  mit  $x \in \tilde{C}_k(X; R)$ ,  $y \in \tilde{C}_\ell(Y; R)$  und  $z \in \tilde{C}_m(Z; R)$  betrachten:

$$((x \otimes y \otimes z)/\alpha)/\beta = (\alpha(x) y \otimes z)/\beta = \alpha(x) \beta(y) z = (x \otimes y \otimes z)/(\alpha \wedge \beta).$$

Es sei  $e^0$  die nichttriviale Nullzelle von  $S^0$ , dann ist  $e = 1e^0$  ein Erzeuger von  $\tilde{C}_0(S^0; R) \cong R$ . Es gilt  $S^0 \wedge X \cong X \cong X \wedge S^0$ , und wir identifizieren  $v \in \tilde{C}_k(X; R) \cong \tilde{C}_k(S^0 \wedge X; R)$  mit  $e \otimes v \in \tilde{C}_0(S^0; R) \otimes_R \tilde{C}_k(X; R)$ . Das Element  $1 \in R \cong \tilde{H}^0(S^0; R)$  wird repräsentiert durch  $\varepsilon \in \tilde{C}^0(S^0; R)$  mit  $\varepsilon(e) = 1$ . Es folgt

$$(\varepsilon \wedge \alpha)(v) = (\varepsilon \wedge \alpha)(e \otimes v) = \varepsilon(e) \cdot \alpha(v) = \alpha(v).$$

Genauso erhalten wir die anderen Aussage in (2).

Die Aussagen (3)–(5) bleiben Übung 6.53. □

Da  $(X \times Y)_+ = (X_+) \wedge (Y_+)$ , lässt sich ein Kreuz-Produkt

$$\times = \wedge: \tilde{H}^\bullet(X_+; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(Y_+; R) \rightarrow \tilde{H}^\bullet((X \times Y)_+; R)$$

für unreduzierte Kohomologie konstruieren. Falls  $R = \mathbb{k}$  ein Körper ist und die Endlichkeitsvoraussetzungen aus Satz 6.12 gelten, entsprechen diese äußeren Produkte gerade den Komponenten der

Isomorphismen aus der kohomologischen Künneth-Formel. Auch für Homologietheorien können wir die „linken“ Abbildungen in den Künneth-Sequenzen aus Satz 5.78 und Folgerung 5.79 als Smash-beziehungsweise Kreuzprodukte auffassen, die dann ähnliche Eigenschaften haben.

6.14. BEISPIEL. Wir benutzen die Stabilisierungsisomorphismen und definieren induktiv Erzeuger

$$e_k = \sigma^k(1) \in \tilde{H}_k(S^k S^0; R) = \tilde{H}_k(S^k) \quad \text{und} \quad \varepsilon^k = \sigma^k(1) \in \tilde{H}^k(S^k) .$$

Dann folgt aus (2), (3) induktiv

$$\begin{aligned} \varepsilon^k \wedge \varepsilon^\ell &= (\sigma^k 1) \wedge (\sigma^\ell 1) = \sigma^k(1 \wedge (\sigma^\ell 1)) = \sigma^{k+\ell} 1 = \varepsilon^{k+\ell} \\ \text{und} \quad e_{k+\ell}/\varepsilon^k &= (\sigma^k e_\ell)/(\sigma^k 1) = e_\ell/1 = e_\ell . \end{aligned}$$

Wie in (4) gilt

$$\langle e_{k+\ell}/\varepsilon^k, \varepsilon^\ell \rangle = \langle e_\ell, \varepsilon^\ell \rangle = 1 = \langle e_{k+\ell}, \varepsilon^{k+\ell} \rangle = \langle e_{k+\ell}, \varepsilon^k \wedge \varepsilon^\ell \rangle .$$

Diese Relationen stehen nicht im Widerspruch zu den Vorzeichen in (3) und (5), denn die Transpositionsabbildung  $t: S^{k+\ell} \rightarrow S^{k+\ell}$  hat Abbildungsgrad  $(-1)^{k\ell}$ , und für (3) ergibt sich daraus

$$\varepsilon^k \wedge (\sigma \varepsilon^\ell) = (-1)^{k(\ell+1)} (\sigma \varepsilon^\ell) \wedge \varepsilon^k = (-1)^{k(\ell+1)} \sigma(\varepsilon^\ell \wedge \varepsilon^k) = (-1)^k \sigma(\varepsilon^k \wedge \varepsilon^\ell) .$$

Wir benutzen das Kronecker-Produkt und nutzen aus, dass  $\tilde{H}^\ell(S^\ell; R) \cong R$ :

$$\langle (\sigma e_{k+\ell})/\varepsilon^k, \sigma \varepsilon^\ell \rangle = \langle \sigma e_{k+\ell}, \varepsilon^k \wedge \sigma \varepsilon^\ell \rangle = (-1)^k = (-1)^k \langle e_{k+\ell}/\varepsilon^k, \varepsilon^\ell \rangle = (-1)^k \langle \sigma(e_{k+\ell}/\varepsilon^k), \sigma \varepsilon^\ell \rangle .$$

Die folgende Konstruktion hingegen lässt sich in der Homologie nicht einfach nachmachen. Sei  $X$  ein topologischer Raum, dann bezeichne  $\Delta_X: X \rightarrow X \wedge X$  die *Diagonalabbildung* mit  $\Delta_X(x) = (x, x)$ . Falls  $X$  ein CW-Komplex ist, ist  $\Delta_X$  in der Regel nicht zellulär. Nach Satz 4.24 lässt sich  $\Delta_X$  jedoch zellulär approximieren. Da alle zellulären Approximationen punktiert homotop sind, ist es für die folgenden Konstruktionen egal, welche wir jeweils wählen.

6.15. DEFINITION. Es sei  $X$  ein CW-Komplex,  $R$  ein Ring, und  $k, \ell \geq 0$ . Wir definieren *innere Produkte*, nämlich das *Cup-Produkt*  $\smile: \tilde{H}^k(X; R) \times \tilde{H}^\ell(X; R) \rightarrow \tilde{H}^{k+\ell}(X; R)$  sowie das *Cap-Produkt*  $\frown: \tilde{H}_{k+\ell}(X; R) \times \tilde{H}^k(X; R) \rightarrow \tilde{H}_\ell(X; R)$  durch

$$\alpha \smile \beta = \Delta_X'^*(\alpha \wedge \beta) \in \tilde{H}^{k+\ell}(X; R) \quad \text{und} \quad c \frown \alpha = (\Delta_X' c)/\alpha \in \tilde{H}_\ell(X; R) .$$

für alle  $\alpha \in \tilde{H}^k(X; R)$ ,  $\beta \in \tilde{H}^\ell(X; R)$  und  $c \in \tilde{H}_{k+\ell}(X; R)$ , wobei  $\Delta_X'$  eine zelluläre Approximation der Diagonalabbildung sei.

Um Verwechslungen mit dem Mengensymbolen „ $\cup$ “ und „ $\cap$ “ zu vermeiden, schreiben wir „ $\smile$ “ und „ $\frown$ “ für die inneren Produkte.

6.16. PROPOSITION. *Die inneren Produkte sind natürlich und haben folgende Eigenschaften.*

(1) Assoziativgesetz. *Es gilt*

$$(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma) \quad \text{und} \quad (c \frown \alpha) \frown \beta = c \frown (\alpha \smile \beta) .$$

(2) Einselement. *Sei  $p: X \rightarrow \text{pt}$  die konstante Abbildung, dann ist  $1 = p_+^*(1) \in \tilde{H}^0(X_+; R) = H^0(X; R)$  neutrales Element für beide Produkte.*

(3) Adjunktion. *Es gilt*

$$\langle b \frown \alpha, \beta \rangle = \langle b, \alpha \smile \beta \rangle .$$

(4) *Das Cup-Produkt ist graduiert kommutativ, das heißt, für alle  $\alpha \in \tilde{H}^k(X; R)$  und  $\beta \in \tilde{H}^\ell(X; R)$  gilt*

$$\beta \smile \alpha = (-1)^{k\ell} \alpha \smile \beta .$$

Insbesondere bildet die reduzierte Kohomologie  $(\tilde{H}^\bullet(X; R), \smile)$  einen graduiert kommutativen Ring, den *Kohomologiering* von  $X$ , und  $(\tilde{H}_\bullet(X; R), \smile)$  ist ein Modul über diesem Ring. Dabei könnte man in der Homologie die Koeffizienten sogar durch einen beliebigen  $R$ -Modul  $A$  ersetzen.

BEWEIS. Natürlichkeit und Assoziativität folgen sofort aus Proposition 6.13 (1). Das Verhalten der Eins in (2) erhalten wir aus 6.13 (2), indem wir im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}^0(X_+; R) \times \tilde{H}^k(X_+; R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^k(X_+ \wedge X_+; R) & \xrightarrow{\Delta'_X} & \tilde{H}^k(X_+; R) \\ p_+^* \times \text{id}_X^* \uparrow & & (p_+ \wedge \text{id}_X)^* \uparrow & \nearrow \text{id} & \\ \tilde{H}^0(S^0; R) \times \tilde{H}^k(X_+; R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^k(S^0 \wedge X_+; R) & & \end{array}$$

unten links das Element  $1 \in R = H^0(S^0; R)$  einsetzen.

Es sei  $T: \tilde{H}^\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X; R) \rightarrow \tilde{H}^\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X; R)$  gegeben durch  $T(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{k\ell} \beta \otimes \alpha$  für  $\alpha \in \tilde{H}^k(X; R)$  und  $\beta \in \tilde{H}^\ell(X; R)$ . Es sei  $\Delta'_X$  eine zelluläre Approximation der Diagonalen  $\Delta_X$  und  $t$  die Transpositionsabbildung, dann ist auch  $\Delta''_X = t \circ \Delta'_X$  eine zelluläre Approximation der Diagonalen. Nach Proposition 6.13 (4) kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}^\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X; R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^\bullet(X \wedge X; R) & \xrightarrow{\Delta''_X} & \tilde{H}^\bullet(X; R) \\ T \downarrow & & t^* \downarrow & \nearrow \Delta'_X & \\ \tilde{H}^\bullet(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X; R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^\bullet(X \wedge X; R) & & \end{array}$$

Daraus folgt (3). □

6.17. BEMERKUNG. Zur Erinnerung: es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Dann ist eine (assoziative)  $R$ -Algebra ein Ring  $(A, +, *)$ , der gleichzeitig ein unitärer  $R$ -Modul ist. Die Addition ist für beide Strukturen die gleiche, und die Algebren-Multiplikation „\*“ in  $A$  ist  $R$ -bilinear. Da jede abelsche Gruppe ein  $\mathbb{Z}$ -Modul ist, ist ein Ring das gleiche wie eine (assoziative)  $\mathbb{Z}$ -Algebra. Insbesondere ist  $(\tilde{H}^\bullet(X; R), \smile)$  eine  $R$ -Algebra, die *Kohomologiealgebra*.

Eine Algebra besitzt genau dann ein Einselement, wenn es einen Ringhomomorphismus  $\varphi: R \rightarrow A$  gibt, so dass  $\varphi(r) * a = a * \varphi(r) = ra$ , denn dann gilt  $1 = \varphi(1)$ . Zu jeder  $R$ -Algebra  $A$  lässt sich ein Einselement hinzufügen. Dazu definieren wir  $B = A \oplus R$  mit der Multiplikation

$$(a, r) * (b, s) = (a * b + sa + rb, rs)$$

und erhalten  $1_B = (0, 1)$  als neues Einselement (wenn  $A$  bereits ein Einselement hatte, übernimmt  $1_B$  jetzt diese Rolle). Für die Einbettung  $\iota: A \rightarrow B$  gilt die folgende universelle Eigenschaft: zu jedem Algebren-Homomorphismus  $f: A \rightarrow C$  in eine  $R$ -Algebra  $C$  mit Eins  $1_C$  existiert genau ein Homomorphismus  $F: B \rightarrow C$  mit  $F \circ \iota = f$  und  $F(1_B) = 1_C$ . Wegen (2) macht diese Konstruktion aus der reduzierten die unreduzierte Kohomologiealgebra

$$H^\bullet(X; R) = \tilde{H}^\bullet(X; R) \oplus R \quad \text{mit} \quad (\alpha, r) \smile (\beta, s) = (\alpha \smile \beta + s\alpha + r\beta, rs).$$

Insbesondere ist die unreduzierte Kohomologie eine  $R$ -Algebra mit Eins, und die unreduzierte Homologie bildet einen unitären Modul.

Wenn  $X = \coprod_{i \in I} X_i$  mehrere Zusammenhangskomponenten hat und der Basispunkt  $x_0$  in  $X_0$  mit  $0 \in I$  liegt, dann folgt

$$\tilde{H}^\bullet(X; R) = \tilde{H}^\bullet(X_0; R) \oplus \prod_{i \in I \setminus \{0\}} H^\bullet(X_i; R) \quad \text{und} \quad H^\bullet(X; R) = \prod_{i \in I} H^\bullet(X_i; R).$$

Insbesondere hängt die reduzierte Kohomologiealgebra im Allgemeinen von der Wahl der Zusammenhangskomponente des Basispunktes ab, die unreduzierte jedoch nicht. Außerdem können wir die reduzierte Kohomologiealgebra aus der unreduzierten durch Einschränkung zurückerhalten.

Schließlich lässt sich das äußere Produkt aus dem unreduzierten Cup-Produkt rekonstruieren. Seien dazu  $p: X \times Y \rightarrow X$  und  $q: X \times Y \rightarrow Y$  die Projektionen, dann kann zeigen, dass

$$(p^* \alpha) \smile (q^* \beta) = \Delta_{X \times Y}^* ((p^* \alpha) \times (q^* \beta)) \in H^\bullet(X \times Y; R).$$

Wir erhalten auch das reduzierte äußere Produkt, da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^k(X; R) \otimes_R H^\ell(Y; R) & \xrightarrow{\times} & H^{k+\ell}(X \times Y; R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^k(X; R) \otimes_R \tilde{H}^\ell(Y; R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^{k+\ell}(X \wedge Y; R) \end{array}$$

kommutiert und die kurze exakte Sequenz in Bemerkung 6.2 (3) spaltet. Es ist also egal, in welchem der vier möglichen Settings (reduziert/unreduziert, innen/außen) wir zuerst Produkte definieren.

Da das Cup-Produkt in eine Approximation der Diagonalen erfordert, ist es in Einzelfällen nicht immer einfach zu berechnen.

6.18. BEISPIEL. Es sei  $k + \ell = n$ . Wir arbeiten der Einfachheit halber mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten, die folgenden Überlegungen funktionieren aber für jeden Ring  $R$ . Wir stellen  $\mathbb{C}P^n$  wie in Übung 1.130 als CW-Komplex dar mit je einer Zelle der Dimension  $2k$  für alle  $0 \leq k \leq n$  dar. Die Zellen bis zur Dimension  $2k - 2$  bilden dabei einen zu  $\mathbb{C}P^{k-1}$  homöomorphen Unterraum. Die  $2k$ -Zelle „trägt“ eine Kohomologieklass  $\alpha$ , die unter den natürlichen Abbildungen

$$\mathbb{C}P^n \xrightarrow{p_k} \mathbb{C}P^n / \mathbb{C}P^{k-1} \xleftarrow{t_k} S^{2k}$$

der Klasse  $\varepsilon^{2k}$  aus Beispiel 6.14 entspricht:

$$\alpha \in \tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n) \xleftarrow{\cong} \tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n / \mathbb{C}P^{k-1}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^{2k}(S^{2k}) \ni \varepsilon^{2k}.$$

Es seien  $\beta \in \tilde{H}^{2\ell}(\mathbb{C}P^n)$  und  $\gamma \in \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n)$  entsprechend konstruiert. Dann gilt

$$\alpha \smile \beta = \gamma. \quad (*)$$

Die obigen Klassen verhalten sich natürlich unter Inklusionen  $\mathbb{C}P^n \hookrightarrow \mathbb{C}P^m$  für  $m \geq n$ . Sei insbesondere  $\omega \in \tilde{H}^2(\mathbb{C}P^n)$  ein Erzeuger, dann erhalten wir Ringisomorphismen

$$(\tilde{H}^\bullet(\mathbb{C}P^n; R), \smile) \cong (\omega R[\omega]) / \omega^{n+1} \quad \text{und} \quad (H^\bullet(\mathbb{C}P^n; R), \smile) \cong R[\omega] / \omega^{n+1}.$$

Um (\*) zu beweisen, benötigen wir einige geometrische Vorüberlegungen. Dazu schreiben wir Punkte in  $\mathbb{C}P^n$  als  $[x : y : z]$  mit  $x \in \mathbb{C}$ ,  $y \in \mathbb{C}^k$  und  $z \in \mathbb{C}^\ell$ , wobei  $(x, y, z) \neq 0$ , siehe Beispiel 3.33. Wir betrachten die Teilmengen

$$\begin{aligned} A &= \{ [x : y : z] \mid \|y\| \geq |x| \text{ und } \|y\| \geq \|z\| \} \\ \text{und} \quad B &= \{ [x : y : z] \mid \|z\| \geq |x| \text{ und } \|z\| \geq \|y\| \}, \end{aligned}$$

und wählen den Basispunkt  $[0 : e_1 : e_1] \in A \cap B \neq \emptyset$ . Diese Teilmengen enthalten jeweils als Deformationsretrakt

$$\begin{aligned} A &\supset \{ [0 : y : 0] \mid y \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\} \} \cong \mathbb{C}P^{k-1}, \\ B &\supset \{ [0 : 0 : z] \mid z \in \mathbb{C}^\ell \setminus \{0\} \} \cong \mathbb{C}P^{\ell-1}, \\ \text{und} \quad A \cup B &\supset \{ [0 : y : z] \mid (y, z) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \} \cong \mathbb{C}P^{n-1}; \end{aligned}$$

man erhält die Deformation, indem man die entsprechenden Einträge von  $(x : y : z)$  jeweils mit dem Homotopieparameter  $s$  multipliziert. Die Inklusionsabbildungen  $A \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ ,  $B \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$  und  $A \cup B \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$  sind jeweils Kofaserungen. Indem wir die jeweilige obige Homotopie auf ganz  $\mathbb{C}P^n$  ausdehnen, erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$\mathbb{C}P^n/A \simeq \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}, \quad \mathbb{C}P^n/B \simeq \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}P^n/(A \cup B) \simeq \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1}.$$

Die Diagonalabbildung  $\Delta_{\mathbb{C}P^n}$  induziert eine Abbildung

$$\Delta: \mathbb{C}P^n/(A \cup B) \longrightarrow (\mathbb{C}P^n/A) \wedge (\mathbb{C}P^n/B).$$

Zusammen mit den obigen Homotopieäquivalenzen erhalten wir insbesondere eine Abbildung

$$\Delta': \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \longrightarrow (\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}) \wedge (\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}),$$

so dass das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}P^n & \xrightarrow{p_n} & \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} & \xleftarrow{l_n} & S^{2n} \\ \Delta_{\mathbb{C}P^n} \downarrow & & \Delta' \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{C}P^n \wedge \mathbb{C}P^n & \xrightarrow{p_k \wedge p_\ell} & \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1} \wedge \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1} & \xleftarrow{l_k \wedge l_\ell} & S^{2k} \wedge S^{2\ell} \end{array}$$

Die Abbildungen rechts kommen daher, dass wir die Zellen der jeweils kleinsten positiven Dimension miteinander multiplizieren.

Wir zeigen (\*) mit Hilfe des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n) \otimes_R \tilde{H}^{2\ell}(\mathbb{C}P^n) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}^{2k}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}) \otimes_R \tilde{H}^{2\ell}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}^{2k}(S^{2k}) \otimes_R \tilde{H}^{2\ell}(S^{2\ell}) \\ \wedge \downarrow & & \wedge \downarrow & & \wedge \downarrow \cong \\ \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n \wedge \mathbb{C}P^n) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1} \wedge \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}^{2n}(S^{2k} \wedge S^{2\ell}) \\ \Delta_{\mathbb{C}P^n}^* \downarrow & & \Delta'^* \downarrow & & \downarrow \cong \\ \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}^{2n}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}^{2n}(S^{2n}). \end{array}$$

Wir können die Klassen  $\alpha$  und  $\beta$  von  $\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}$  beziehungsweise  $\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}$  zurückholen, dabei spielt es wegen Homotopieinvarianz keine Rolle, welchen projektiven Unterraum wir jeweils herausteilen. Wenn wir links oben  $\alpha \otimes \beta$  einsetzen, erhalten wir rechts oben  $\varepsilon^{2k} \otimes \varepsilon^{2\ell}$ , und wegen Beispiel 6.14 daher unten rechts  $\varepsilon^{2n}$ . Also steht unten links  $\gamma = \alpha \smile \beta$ .

## 6.d. Spektre und Kohomologiefunktoren

Ähnlich wie in Abschnitt 5.d wollen wir Kohomologietheorien durch Spektre — genauer, durch  $\omega$ -Spektre — darstellen.

6.19. BEMERKUNG. In der Definition 5.35 eines  $\omega$ -Spektrums haben wir verlangt, dass der Stabilisierungshomomorphismus  $s_i: SE_i \rightarrow E_{i+1}$  für  $i \geq n_0$  via Adjunktion  $C(SE_i, E_{i+1}) \cong C(E_i, \Omega E_{i+1})$  eine Homotopieäquivalenz  $E_i \cong \Omega E_{i+1}$  induziert.

Für jedes  $i < n_0$  ersetzen wir den Raum  $E_i$  nach dem Satz 4.36 von Milnor durch einen zu  $\Omega^{n_0-i} E_{n_0}$  homotopieäquivalenten CW-Komplex, der dann auch zu  $\Omega E_{i+1}$  homotopieäquivalent ist. Als Stabilisierungsabbildung wählen wir die adjungierte Abbildung  $s_i = \text{ev}_{S^1, \Omega E_{i+1}}: SE_i \rightarrow E_{i+1}$  zu  $\text{id}_{E_{i+1}}$ , siehe Definition 4.9 (3). Für den Moment betrachten wir daher nur  $\omega$ -Spektren, die die charakteristische Eigenschaft aus Definition 5.35 für alle  $i \in \mathbb{Z}$  erfüllen.

Die folgende Konstruktion ist dual zu Satz 5.37.



6.20. SATZ UND DEFINITION. Zu jedem  $\omega$ -Spektrum  $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  existiert ein reduzierter  $\mathcal{A}b$ -wertiger Kohomologiefunktor  $(\tilde{E}^\bullet, \delta_\bullet)$  mit

$$\tilde{E}^k(X) = [X, E_k].$$

Wir nennen  $\tilde{E}^\bullet$  den durch  $\mathbb{E}$  dargestellten Kohomologiefunktor.

BEWEIS. Für  $f: Y \rightarrow X$  definieren wir  $\tilde{E}^k f = f^*: \tilde{E}^k(X) \rightarrow \tilde{E}^k(Y)$  durch  $f^*([a]) = [a \circ f]$  für alle  $a: X \rightarrow E_k$ , somit sind die  $\tilde{E}^k$  kontravariante Funktoren.

Da  $\mathbb{E}$  ein  $\omega$ -Spektrum ist, liefert Stabilisieren bijektive Abbildungen

$$\tilde{E}^k(X) = [X, E_k] \xrightarrow{\cong} [X, \Omega E_{k+1}] \xrightarrow{\cong} [SX, E_{k+1}] \xrightarrow{\cong} [SX, \Omega E_{k+2}] \xrightarrow{\cong} [S^2 X, E_{k+2}].$$

Da  $[S^2 X, E_{k+2}]$  nach Bemerkung 3.76 (2) eine abelsche Gruppe ist, nehmen die Funktoren  $\tilde{E}^k$  Werte in der Kategorie  $\mathcal{A}b$  der abelschen Gruppen an.

Es sei  $(X, Y)$  eine Kofaserung. Wir betrachten die Puppe-Sequenz 4.39 (3) und erhalten die lange exakte Kohomologie-Sequenz 6.1 (1) mit Hilfe des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & [X, E_k] & \longrightarrow & [Y, E_k] & & \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & \searrow \delta & \\ \cdots & \longrightarrow & [SX, E_{k+1}] & \longrightarrow & [SY, E_{k+1}] & \longrightarrow & [X/Y, E_{k+1}] \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Mit der universellen Eigenschaft des Bouquets erhalten wir das Summenaxiom 6.1 (2), da

$$\tilde{E}^k \left( \bigvee_{i \in I} X_i \right) = \left[ \bigvee_{i \in I} X_i, E_k \right] \cong \prod_{i \in I} [X_i, E_k] = \prod_{i \in I} \tilde{E}^k(X_i). \quad \square$$

6.21. BEMERKUNG. Umgekehrt gilt der *Brownsche Darstellungssatz*: Sei  $\tilde{h}^\bullet$  ein  $\mathcal{A}b$ -wertiger verallgemeinerter Kohomologiefunktor, dann gibt es ein  $\omega$ -Spektrum  $E_\bullet$  und einen natürlichen Isomorphismus  $\tilde{E}^\bullet \rightarrow \tilde{h}^\bullet$  auf der Kategorie der CW-Komplexe. Mit anderen Worten: schränkt man sich auf die Kategorie der zu CW-Komplexen homotopieäquivalenten Räume ein, dann ist jeder Kohomologiefunktor wie in Definition 6.20 durch ein Spektrum darstellbar.

Wir betrachten das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum  $\mathbb{H}A$  aus Satz 5.42 zu einer abelschen Gruppe  $A$ . Nach Definition 5.40 (2) induziert die Abbildung  $s_k: SHA_k \rightarrow HA_{k+1}$  eine schwache Äquivalenz  $HA_k \rightarrow \Omega HA_{k+1}$ . Daher ist jedes Eilenberg-Mac Lane-Spektrum ein  $\omega$ -Spektrum. Wir fassen unsere bisherigen Erkenntnisse zusammen.

6.22. SATZ. Es sei  $A$  eine abelsche Gruppe.

- (1) Es existiert ein gewöhnlicher reduzierter Kohomologiefunktor  $\tilde{H}^\bullet(\cdot; A): \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{A}b$  mit

$$\tilde{H}^k(X; A) = \widetilde{HA}^k(X),$$

der das Dimensionsaxiom 5.9 (3) mit  $\tilde{H}^0(S^0; A) \cong A$  erfüllt.

- (2) Jeder andere gewöhnliche reduzierte Homologiefunktor mit den obigen Eigenschaften ist auf der vollen Unterkategorie  $\mathcal{H}CW_+ \subset \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+$  der punktierten CW-Komplexe zu  $\tilde{H}^\bullet(\cdot; A)$  natürlich isomorph.
- (3) Zu jedem Gruppenhomomorphismus  $f: A \rightarrow B$  existiert eine natürliche Transformation  $\tau_{f, \bullet}: \widetilde{HA}^\bullet \rightarrow \widetilde{HB}^\bullet$ , so dass  $\tau_{f, 0}(S^0) = f: A \cong \widetilde{HA}^0(S^0) \rightarrow \widetilde{HB}^0(S^0) \cong B$ .

Man beachte, dass  $\tilde{H}^\bullet$  im Gegensatz zu  $\tilde{H}_\bullet$  nicht unter schwachen Äquivalenzen invariant ist, siehe Übung 6.57. Daher erhalten wir (2) und (3) nur auf der Kategorie  $\mathcal{H}CW_+$ .

BEWEIS. Nach Satz 6.20 ist  $\tilde{H}^\bullet(\cdot; A)$  ein reduzierter Kohomologiefunktor. Aussage (1) folgt aus Definition 5.40, denn für alle  $j$  gilt

$$\tilde{H}^k(S^0; A) \cong [S^j, E_{j+k}] = \pi_j(E_{j+k}) \cong \begin{cases} A & \text{falls } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aussage (2) folgt aus Satz 6.8.

Sei schließlich  $f$  gegeben, dann liefert Satz 5.42 Abbildungen  $Hf_n: HA_n \rightarrow HB_n$ , die mit den Strukturabbildungen  $s_\bullet$  der Spektren verträglich sind, so dass  $Hf_{n*} = f: A \cong \pi_n(HA_n) \rightarrow \pi_n(HB_n) \cong B$ . Wir erhalten die gesuchten natürlichen Transformationen  $\tau_{f,k}$  durch

$$\tau_{f,k}: \tilde{H}^k(X; A) = [X, HA_k] \xrightarrow{Hf_k \circ} [X, HB_k] = \tilde{H}^k(X; B). \quad \square$$

6.23. BEMERKUNG. Wir können jeden Kohomologiefunktor durch einen ersetzen, der zusätzlich invariant unter schwachen Äquivalenzen ist. Dazu ersetzen wir einen Raum  $X$  durch eine CW-Approximation  $f: X' \rightarrow X$  wie in Satz 4.32 und definieren

$$\tilde{\mathcal{E}}^k(X) = \tilde{E}^k(X').$$

Sei  $g: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, dann erhalten wir eine CW-Approximation  $h: Y' \rightarrow Y$  und eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung  $g': X' \rightarrow Y'$ , so dass  $g \circ f$  zu  $h \circ g'$  homotop ist. Wir erhalten daher eine natürliche Transformation  $\tilde{E}^\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^\bullet$  wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}^k(X) & \xrightarrow{\tilde{E}^k f} & \tilde{E}^k(X') = \tilde{\mathcal{E}}^k(X) \\ \tilde{E}^k g \uparrow & & \tilde{E}^k g' \uparrow \tilde{\mathcal{E}}^k g \\ \tilde{E}^k(Y) & \xrightarrow{\tilde{E}^k h} & \tilde{E}^k(Y') = \tilde{\mathcal{E}}^k(Y). \end{array}$$

Wenn  $g: X \rightarrow Y$  eine schwache Äquivalenz war, dann ist  $g'$  jetzt eine Homotopieäquivalenz, und somit ist  $\tilde{\mathcal{E}}^k g = \tilde{E}^k g'$  ein Isomorphismus.

Mit dieser Methode erzwingen wir in Satz 6.22 nicht nur Invarianz unter schwachen Äquivalenzen, sondern wegen Satz 6.8 auch die Eindeutigkeit des so konstruierten Kohomologiefunktors  $\mathcal{H}A^\bullet$  auf ganz  $kw\mathcal{H}_+$ . Insbesondere ist singuläre Kohomologie invariant unter schwachen Äquivalenzen, so dass  $\mathcal{H}A^\bullet$  zur singulären Kohomologie natürlich isomorph ist. Wir werden uns mit dieser Frage im Folgenden aber nicht intensiver auseinandersetzen.

## 6.e. Vektorbündel

In diesem Abschnitt definieren wir Vektorbündel, das sind spezielle Faserbündel, deren Fasern eine lineare Struktur tragen. Ein Beispiel ist das Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. In Abschnitt 3.i hatten wir bereits das Normalenbündel kennengelernt. Aus diesem Grund spielen Vektorbündel in der Differentialgeometrie und -topologie eine Rolle. Wir wählen einen etwas vereinfachten Zugang, bei dem wir uns auf Vektorbündel über CW-Komplexen konzentrieren. Die Argumente für die größere Klasse der parakompakten Räume finden sich unter anderem in [At] und in [H2].

6.24. DEFINITION. Eine *topologische Gruppe* ist ein topologischer Raum  $G$  mit Basispunkt  $e \in G$  und zwei stetigen Abbildungen  $*$ :  $G \times G \rightarrow G$  und  $\cdot^{-1}$ :  $G \rightarrow G$ , so dass  $(G, *, e, \cdot^{-1})$  die Gruppenaxiome erfüllt.

Eine *stetige (Links-) Operation* von  $G$  auf einem topologischen Raum  $X$  ist eine stetige Abbildung  $G \times X \rightarrow X$  mit  $(g, x) \mapsto g \cdot x$ , so dass

$$g \cdot (h \cdot x) = (g * h) \cdot x \quad \text{und} \quad e \cdot x = x \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } g, h \in G.$$

Entsprechend definieren wir stetige Rechts-Operationen  $(x, g) \mapsto x \cdot g$ .

Beispiele sind zum einen beliebige Gruppen  $G$ , versehen mit der diskreten Topologie. Zum anderen sind alle Matrixgruppen  $G \subset GL_n(\mathbb{k})$  mit der Unterraumtopologie zu  $GL_n(\mathbb{k}) \subset \mathbb{k}^{n \times n}$  für  $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  und  $n \in \mathbb{N}$  topologische Gruppen. Wir interessieren uns vor allem für die Gruppen

$$U(n, \mathbb{k}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{k}) \mid A^* A = E_n \} = \begin{cases} O(n) & \text{für } \mathbb{k} = \mathbb{R}, \\ U(n) & \text{für } \mathbb{k} = \mathbb{C}, \text{ und} \\ Sp(n) & \text{für } \mathbb{k} = \mathbb{H}. \end{cases}$$

Die Matrizen mit Determinante 1 bilden Untergruppen  $SO(n) \subset O(n)$  sowie  $SU(n) \subset U(n)$ . Über  $\mathbb{H}$  ist keine Determinante definiert.

Es sei jetzt  $p: V \rightarrow X$  ein Faserbündel mit typischer Faser  $\mathbb{k}^r$  wie in Definition 3.30, es sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $\rho: G \hookrightarrow GL_r(\mathbb{k})$  ein stetiger Monomorphismus. Dann wirkt  $G$  von links auf  $\mathbb{k}^r$  durch  $(g, x) \mapsto g \cdot x = \rho(g) \cdot x$ .

6.25. DEFINITION. Eine  $(G, \rho)$ -Vektorbündelatlas auf  $p: V \rightarrow X$  ist eine Menge lokaler Trivialisierungen

$$\mathcal{A} = \{ (U_i, \varphi_i) \mid i \in I \} \quad \text{mit} \quad p \times \varphi_i: p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{k}^r, \quad (1)$$

so dass  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$  bildet und es für je zwei  $i, j \in I$  eine stetige Abbildung  $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$  mit

$$\varphi_i = (\rho \circ g_{ij}) \cdot \varphi_j: p^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{k}^r \quad (2)$$

für alle  $i, j \in I$  gibt. Zwei  $(G, \rho)$ -Vektorbündelatlasen heißen *äquivalent*, wenn ihre Vereinigung wieder ein  $(G, \rho)$ -Vektorbündelatlas ist.

Ein  $(G, \rho)$ -Vektorbündel über einem Raum  $X$  ist ein Faserbündel  $p: V \rightarrow X$  zusammen mit einer Äquivalenzklasse von  $(G, \rho)$ -Vektorbündelatlasen. In diesem Fall heißt  $G$  die *Strukturgruppe* und  $r$  der *Rang* von  $p: V \rightarrow X$ .

Eine  $(G, \rho)$ -Vektorbündelabbildung von  $p: V \rightarrow X$  nach  $q: W \rightarrow Y$  ist eine Abbildung  $F: V \rightarrow W$ , für die eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $q \circ F = f \circ p$  existiert, so dass es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U' \subset Y$  von  $y = f(x)$  und eine Umgebung  $U \subset p^{-1}(U')$  von  $x$ , verträgliche lokale Trivialisierungen  $(U, \varphi)$  von  $V$  und  $(U', \psi)$  von  $W$  sowie eine Abbildung  $h: U \rightarrow U'$  gibt mit

$$\psi \circ F = (\rho \circ h) \cdot \varphi: p^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{k}^r. \quad (3)$$

Man nennt  $F$  dann auch eine  $G$ -Vektorbündelabbildung über  $f$ . Eine  $G$ -Vektorbündelabbildung über der Identität heißt auch  $G$ -Vektorbündelisomorphismus. Die Menge der Isomorphieklassen von  $G$ -Vektorbündeln über  $X$  wird mit  $\text{Bun}_G(X)$  bezeichnet.

Da  $\rho$  in den meisten Fällen klar sein wird, schreiben wir kurz  $G$ -Vektorbündel statt  $(G, \rho)$ -Vektorbündel.

6.26. BEISPIEL. Wir geben einige einfache Beispiele an.

- (1) Das *triviale Vektorbündel*  $\underline{\mathbb{k}}^r = X \times \mathbb{k}^r \rightarrow X$  hat einen Vektorbündelatlas aus einer einzigen lokalen Trivialisierung  $\Phi = \text{id}_{X \times \mathbb{k}^r}$ . Falls wir  $G = \{e\}$  wählen, ist es bis auf eindeutige Isomorphie das einzige  $G$ -Vektorbündel.
- (2) Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ . Für das Tangentialbündel  $p: TM \rightarrow M$  definieren wir einen Atlas  $\mathcal{A} = (U_i, d\varphi_i)_{i \in I}$ . Da die Kartenwechsel  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  differenzierbar sind, gilt  $g_{ij} = d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}): U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ .

- (3) Eine Riemannsche Metrik  $g$  ist ein Skalarprodukt  $g_x$  auf  $T_x M$ , das differenzierbar von  $x \in M$  abhängt. Indem wir auf den  $GL_n(\mathbb{R})$ -Atlas  $\mathcal{A}$  das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden, erhalten wir einen  $O(n)$ -Vektorbündelatlant. Man beachte, dass der Atlas aus (2) nur dann selbst ein  $O(n)$ -Atlas sein kann, wenn  $(M, g)$  flach ist, das heißt, wenn der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet.
- (4) Für  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten erhalten wir das Tangentialbündel analog als  $GL_n(\mathbb{C})$ -Vektorbündel.

Als weiteres Beispiel lernen wir im nächsten Abschnitt das Normalenbündel einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit kennen.

Man beachte, dass die Abbildungen  $g_{ij}$  in (2) eindeutig durch  $\varphi_i$  und  $\varphi_j$  bestimmt sind, falls sie existieren, da  $\rho: G \rightarrow GL_r(\mathbb{k})$  als injektiv vorausgesetzt wurde. Man kann den Begriff noch verallgemeinern, indem man beliebige Homomorphismen  $\rho$  zulässt. Das ist beispielsweise dann nötig, wenn man Spin-Strukturen betrachten möchte. Aber dann muss zusätzlich zu (2) noch  $g_{ik} = g_{ij} \cdot g_{jk}$  fordern, und zusätzlich zu (3) benötigt man ebenfalls eine weitere Bedingung. Vektorbündel sind bis auf Isomorphismen durch die  $g_{ij}$  festgelegt, daher ist  $\text{Bun}_G(X)$  tatsächlich eine Menge.

6.27. BEMERKUNG. Sei  $p: V \rightarrow X$  ein  $G$ -Vektorbündel und  $x \in X$ , dann heißt  $V_x = p^{-1}(x)$  eine Faser des Vektorbündels  $V$ . Über die lokalen Trivialisierungen aus Definition 6.25 (1) lassen sich  $G$ -invariante Strukturen von  $\mathbb{k}^r$  auf alle Fasern übertragen, wegen (2) ist es dabei egal, welche Trivialisierung für eine bestimmte Faser gewählt wurde. Bedingung (3) garantiert, dass auch alle  $G$ -Vektorbündelabbildungen diese zusätzliche Struktur erhalten.

- (1) Die Trivialisierung  $\varphi_i$  induziert auf jeder Faser  $V_x$  für  $x \in U_i$  die Struktur eines  $r$ -dimensionalen  $\mathbb{k}$ -Vektorraums, daher der Name „Vektorbündel“. Daher nennen wir  $GL_r(\mathbb{k})$ -Vektorbündel auch einfach *Vektorbündel*. Diese linearen Strukturen sind beispielsweise in der Differentialgeometrie und in der Physik sehr wichtig.
- (2) Es sei  $p: V \rightarrow X$  ein  $SL_r(\mathbb{R})$ -Vektorbündel vom Rang  $r \geq 1$ . Der Raum  $\mathbb{R}^r$  trage die Standardorientierung. Dann induzieren die Trivialisierungen  $\varphi_i$  eine eindeutige Orientierung auf allen Fasern von  $V$ . Sei umgekehrt auf allen Fasern von  $V$  eine Orientierung so gegeben, dass  $\text{sign det } \varphi_i: U_i \rightarrow \{\pm 1\}$  lokalkonstant ist, dann lassen sich die  $\varphi_i$  zu orientierungserhaltenden Trivialisierungen abändern, und wir erhalten eine eindeutige  $SL_r(\mathbb{R})$ -Struktur auf  $V$ .
- (3) Eine  $O(r)$ -Struktur entspricht der Wahl eines Skalarproduktes auf jeder Faser. Eine  $SO(r)$ -Struktur kodiert sowohl ein Skalarprodukt als auch eine Orientierung auf jeder Faser.
- (4) Sei  $r = 2k$ . Eine  $GL(k, \mathbb{C})$ -Struktur macht aus einem reellen Vektorbündel vom Rang  $2k$  ein komplexes vom Rang  $k$ . Eine  $U(k)$ -Struktur entspricht der zusätzlichen Wahl eines Hermiteschen Skalarproduktes auf jeder Faser.
- (5) Manchmal können wir für das Tangentialbündel einer  $2n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit einen  $GL_n(\mathbb{C})$ -Vektorbündelatlant wählen. In diesem Fall sprechen wir von einer *fast komplexen* Struktur. Eine fast komplexe Struktur erlaubt im Allgemeinen nicht, einen komplexen Mannigfaltigkeitsatlant zu wählen, fast komplexe Strukturen auf  $TM$  sind somit schwächer als die komplexen Strukturen aus Beispiel 6.26 (4).
- (6) Wenn die Strukturgruppe  $G$  diskret ist, sind die Abbildungen  $g_{ij}$  aus Definition 6.25 (2) lokal konstant. In diesem Fall erhalten wir ein *flaches Vektorbündel*.

6.28. BEMERKUNG. Man kann  $G$ -Vektorbündel zurückziehen, siehe Übung 3.114 zu Faserbündeln. Sei  $p: V \rightarrow X$  ein  $G$ -Vektorbündel und  $f: Y \rightarrow X$  stetig, dann erhält man das zurückgezogene  $G$ -Vektorbündel  $f^*p: f^*V \rightarrow Y$  und eine Abbildung  $F: f^*V \rightarrow V$  mit

$$f^*E = \{ (y, v) \in Y \times V \mid p(v) = f(y) \}, \quad (f^*p)(y, v) = y \quad \text{und} \quad F(y, v) = v.$$

Sei  $(U_i, \varphi_i)$  eine lokale Trivialisierung von  $V$ , dann ist  $(f^{-1}(U_i), \varphi_i \circ F)$  die zurückgeholte lokale Trivialisierung von  $f^*V$ ; insbesondere erhalten wir einen Atlas.

- (1) Für ein  $G$ -Vektorbündel  $q: W \rightarrow Y$  entspricht eine  $G$ -Vektorbündelabbildung  $F: W \rightarrow V$  über  $f$  genau einem  $G$ -Vektorbündelisomorphismus  $W \cong f^*V$ .
- (2) Falls  $f: Y \rightarrow X$  eine Inklusion ist, gibt es einen offensichtlichen Isomorphismus  $f^*V = p^{-1}(Y)$ , und wir schreiben kurz  $V|_Y = p^{-1}(Y)$ .
- (3) Über dem einpunktigen Raum  $\text{pt}$  ist jedes  $G$ -Vektorbündel trivial. Also entspricht eine  $G$ -Vektorbündelisomorphismus  $V \rightarrow \underline{\mathbb{k}}^r$  genau einer  $G$ -Vektorbündelabbildung  $F: V \rightarrow \underline{\mathbb{k}}^r$  über  $X \rightarrow \text{pt}$ .

6.29. LEMMA. *Es sei  $X$  ein CW-Komplex und  $p: V \rightarrow X \times I$  ein  $G$ -Vektorbündel. Bezeichne  $q: X \times I \rightarrow X$  die Projektion auf die erste Komponente, dann gibt es eine  $G$ -Vektorbündelabbildung  $Q: V \rightarrow V|_{X \times \{0\}}$  über  $q$  mit  $Q|_{X \times \{0\}} = \text{id}_{X \times \{0\}}$ .*

Insbesondere liefern homotope Abbildungen  $f, g: Y \rightarrow X$  isomorphe Bündel  $f^*V \cong g^*V \rightarrow Y$ , falls  $Y$  ein CW-Komplex ist. Denn sei  $h: Y \times I \rightarrow X$  eine Homotopie, dann wende das obige Lemma auf  $h^*V \rightarrow Y \times I$  an.

BEWEIS. Wir beweisen das Lemma zuerst unter der Annahme, dass für alle  $n$  jedes  $G$ -Vektorbündel über  $D^n$  trivial ist. Dazu konstruieren wir  $Q$  induktiv Zelle für Zelle. Sei  $\Psi: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$  charakteristische Abbildung einer Zelle von  $X$ . Da  $D^n \times I \cong D^{n+1}$ , ist das zurückgeholte  $G$ -Vektorbündel trivial, wir erhalten also eine  $G$ -Vektorbündelabbildung  $\Xi: \underline{\mathbb{k}}^r \rightarrow V$  über  $\xi = \Psi \times \text{id}_I$ .

Die  $G$ -Vektorbündelabbildung  $Q': V|_{X^{n-1} \times I} \rightarrow V|_{X^{n-1} \times \{0\}}$  induziert daher eine stetige Abbildung  $q': S^{n-1} \times I \rightarrow G$ , so dass

$$q'(y, 0) = e \quad \text{und} \quad (Q' \circ \Xi)(y, t, v) = \Xi(y, 0, q'(y, t) \cdot v) \quad (*)$$

für alle  $y \in S^{n-1}$ ,  $t \in I$  und  $v \in \underline{\mathbb{k}}^r$ . Wir können  $q'$  daher zunächst durch  $e$  auf  $D^n \times \{0\}$  fortsetzen, und anschließend zu  $q: D^n \times I \rightarrow G$ , da  $(D^n, S^{n-1})$  eine Kofaserung ist. Jetzt definieren wir  $Q$  auf  $\xi = \text{im } \Psi \times I$  wie in (\*). Auf diese Weise konstruieren wir  $Q$  auf ganz  $V$ .

Es bleibt zu zeigen, dass jedes Vektorbündel über  $D^n \cong I^n$  trivial ist. Wir führen den Beweis durch Induktion über  $n$ ; für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen. Es sei jetzt ein  $G$ -Vektorbündel  $V \rightarrow I^{n+1}$  mit einem Atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir eine  $G$ -Vektorbündelabbildung  $F_0: V|_{I^n \times \{0\}} \rightarrow \underline{\mathbb{k}}^r$ .

Wie im Beweis von Proposition 3.31 zerteilen wir  $I^{n+1}$  in kleinere Würfel der Kantenlänge  $\frac{1}{N}$ , so dass jeder der kleinen Würfel ganz in einer der offenen Mengen  $U_i$  enthalten ist. Somit ist  $V$  auf jedem der obigen Würfel trivial. Das obige Argument liefert uns daher Vektorbündelabbildungen

$$F_i: V|_{I^n \times [i-1, i]} \rightarrow V|_{I^n \times \{i-1\}}$$

über den Projektionen  $I^n \times [i-1, i] \rightarrow I^n \times \{i-1\}$ . Diese lassen sich zusammen mit  $F_0$  zu einer Trivialisierung von  $V$  zusammensetzen.  $\square$

Wir erinnern uns an die Verbund-Konstruktion aus Übung 3.115. Für eine topologische Gruppe  $G$  definieren wir

$$EG = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} G^{*n},$$

wobei  $G^{*n}$  den  $n$ -fachen Verbund mit sich selbst bezeichne. Es sei

$$\Delta^n = \{ (s_0, \dots, s_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid s_0 + \dots + s_n = 1 \}$$

der Standardsimplex. Dann gilt

$$G^{*(n+1)} \cong G^{n+1} \times \Delta^n / \sim,$$

wobei die Relation  $\sim$  erzeugt wird durch

$$(g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \sim (g_0, \dots, g'_i, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \quad \text{wenn } s_i = 0.$$

Wir erhalten natürliche Einbettungen  $G^{*n} \hookrightarrow G^{*n} * G \cong G^{*(n+1)}$ , bezüglich der wir den obigen Kolimes bilden. Tatsächlich ist  $EG$  die geometrische Realisierung eines sogenannten *simplizialen Raums*.

Sei  $G$  selbst  $k$ -zusammenhängend mit  $k \geq -1$ , dann folgt aus Übung 3.116 induktiv, dass  $G^{*n}$  ein  $(n(k+2) - 2)$ -fach zusammenhängender Raum ist. Insbesondere ist  $EG$  schwach zusammenziehbar. Wenn wir  $EG$  als CW-Komplex schreiben können (zum Beispiel, wenn  $G$  eine diskrete Gruppe oder eine Matrixgruppe ist), ist  $EG$  nach dem Satz 4.27 von Whitehead sogar zusammenziehbar.

Die Gruppe  $G$  wirkt stetig von rechts auf  $EG$  durch

$$(g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \cdot g = (g_0g, \dots, g_ng; s_0, \dots, s_n).$$

Diese Operation ist frei und eigentlich. Für den Quotienten schreiben wir

$$BG = EG/G.$$

Für jedes  $i \in \mathbb{N}$  betrachten wir die Teilmenge

$$E_i = \operatorname{colim}_{n \geq i} \{ (g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \mid s_i \neq 0 \} \subset EG.$$

Da  $E_i \cap G^{*(n+1)}$  für alle  $n$  offen ist, ist  $E_i$  in  $EG$  offen. Außerdem ist  $E_i$  invariant unter der obigen  $G$ -Wirkung, also sei  $B_i = E_i/G \subset BG$  der Quotient. Dann ist  $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine offene Überdeckung von  $BG$ . Für Punkte  $q = (g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n)$  ist die Koordinate  $g_i \in G$  aufgrund der Verbund-Konstruktion wohldefiniert, wenn  $q \in E_i$ .

6.30. DEFINITION. Sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $\rho: G \hookrightarrow GL_r(\mathbb{k})$  ein stetiger Monomorphismus.

- (1) Der Raum  $BG$  heißt *klassifizierender Raum* von  $G$ .
- (2) Das *tautologische*  $G$ -Vektorbündel  $\tau: V_\rho G \rightarrow BG$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} V_\rho G &= \{ [q, w] \mid (q, w) \in EG \times \mathbb{k}^r \}, \\ \text{wobei} \quad [q, w] &= \{ (q \cdot g^{-1}, \rho(g) \cdot w) \mid g \in G \}, \\ \text{und} \quad \tau([q, w]) &= [q] = q \cdot G \in BG, \end{aligned}$$

mit lokalen Trivialisierungen  $\psi_i$  über  $B_i$ , gegeben durch

$$\psi_i([(g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n), w]) = \rho(g_i) \cdot w.$$

- (3) Sei  $p: V \rightarrow X$  ein  $(G, \rho)$ -Vektorbündel. Eine Abbildung  $\vartheta: X \rightarrow BG$  heißt *klassifizierende Abbildung* von  $V$ , wenn es eine  $G$ -Vektorbündelabbildung  $\Theta: V \rightarrow V_\rho G$  über  $\vartheta$  gibt.

Man überprüft leicht, dass die Elemente  $[q, w]$  wohldefinierte Orbits einer diagonalen Operation von  $G$  auf  $EG \times \mathbb{k}^r$  sind. Seien jetzt  $i, j \in \mathbb{N}$ , dann erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung  $g_{ij}: B_i \cap B_j \rightarrow G$  durch

$$g_{ij}([(g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n)]) = g_i g_j^{-1} \in G.$$

Es gilt  $\psi_i = (\rho \circ g_{ij}) \cdot \psi_j$  wie in Definition 6.25 (2) auf  $B_i \cap B_j$ . Also ist  $\tau: V_\rho G \rightarrow BG$  ein  $G$ -Vektorbündel. Wenn  $\rho$  klar ist, schreiben wir wieder nur  $VG$ .

6.31. SATZ (Klassifikation von  $G$ -Vektorbündeln). Sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $\rho: G \hookrightarrow GL_r(\mathbb{k})$  ein stetiger Monomorphismus. Dann gibt es für jeden CW-Komplex  $X$  eine natürliche Bijektion

$$[X_+, BG] \xrightarrow{\cong} \operatorname{Bun}_G(X) \quad \text{mit} \quad [\vartheta] \longmapsto \vartheta^* V_\rho G.$$

Wenn  $Y \subset X$  ein Unterkomplex ist und bereits eine klassifizierende Abbildung  $\vartheta': Y \rightarrow BG$  für  $V|_Y$  gegeben ist, kann man  $\vartheta$  als Fortsetzung von  $\vartheta'$  wählen, und diese Fortsetzung ist bis auf Homotopie relativ zu  $Y$  eindeutig.

Dieser Satz erklärt die Bezeichnungen aus Definition 6.30. Allgemeiner lässt er sich für parakompakte Räume  $X$  beweisen.

BEWEIS. Die obige Abbildung  $[X_+, BG] \rightarrow \text{Bun}_G(X)$  ist nach Lemma 6.29 wohldefiniert. Sie ist auch natürlich, denn sei  $f: Y \rightarrow X$  stetig, und sei  $p: V \rightarrow X$  isomorph zu  $\vartheta^*VG$  vermöge einer  $G$ -Vektorbündelabbildung  $\Theta: V \rightarrow VG$  über  $\vartheta$ , dann wird  $f^*V$  durch  $\vartheta \circ f$  klassifiziert. Insbesondere kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} f^*V & \xrightarrow{F} & V & \xrightarrow{\Theta} & VG \\ f^*p \downarrow & & p \downarrow & & \downarrow \tau \\ Y & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{\vartheta} & BG. \end{array}$$

Zum Beweis der Surjektivität sei ein  $G$ -Vektorbündel  $p: V \rightarrow X$  gegeben. Gesucht ist eine  $G$ -Vektorbündelabbildung  $\Theta: V \rightarrow VG$ . Wie im Beweis von Lemma 6.29 konstruieren wir  $\Theta$  induktiv Skelett für Skelett. Sei also  $\Theta': V|_{X^{n-1}} \rightarrow VG$  über  $\vartheta': X^{n-1} \rightarrow BG$  bereits konstruiert, und sei  $\Phi: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$  charakteristische Abbildung einer Zelle von  $X$ , und sei  $\varphi = \Phi|_{S^{n-1}}$ . Das zurückgeholte Bündel auf  $D^n$  ist nach Lemma 6.29 trivial, wir erhalten also eine  $G$ -Vektorbündelabbildung  $\Xi: \mathbb{k}^r \rightarrow V$  über  $\Phi$ .

Da  $S^{n-1}$  kompakt ist, gilt  $\text{im}(\vartheta' \circ \varphi) \subset G^{*N}/G \subset BG$  für ein geeignetes  $N$ . Für jedes  $i < N$  setze

$$U_i = \{ty \mid t > 0 \text{ und } y \in (\vartheta' \circ \varphi)^{-1}(B_i) \subset S^{n-1}\} \subset D^n.$$

Außerdem definieren wir  $U_N = D^n \setminus S^{n-1}$ .

Wir bestimmen  $h_i: U_i \rightarrow G$  für  $i < N$  wie in Definition 6.25 (3), so dass

$$\psi_i \circ \Theta' \circ \Xi = \rho \circ h_i|_{U_i \cap S^{n-1}}: \mathbb{k}^r|_{U_i \cap S^{n-1}} \rightarrow \mathbb{k}^r,$$

und setzen  $h_i(sty) = h_i(y)$  für alle  $y \in S^{n-1}$  und alle  $t > 0$ . Auf  $B_i \cap B_j$  gilt  $\psi_i = (\rho \circ g_{ij}) \cdot \psi_j$ . Sei  $q(y) = [(g_0, \dots, g_{N-1}; s_0, \dots, s_{N-1})] \in B_i \cap B_j$ , dann folgt

$$h_i(y) = g_i g_j^{-1} \cdot h_j(y) \in G.$$

Außerdem setzen wir  $h_N \equiv e$  auf ganz  $U_N$ .

Sei  $y \in S^{n-1}$  und  $(\vartheta' \circ \varphi)(y) = [q]$  mit  $q = (g_0, \dots, s_0, \dots)$ , dann sind die Funktionen  $\chi_i$  auf  $D^n \setminus \{0\}$  mit

$$\chi_i(ty) = ts_i \quad \text{für alle } t \geq 0$$

für  $i < N$  stetig und lassen sich durch 0 auf 0 fortsetzen. Außerdem setzen wir  $\chi_N(ty) = 1 - t$  für alle  $y$  und  $t$  wie oben. Dann gilt  $\chi_i(x) = 0$  für alle  $x \notin U_i$  und  $\chi_0 + \dots + \chi_N = 1$  auf ganz  $D^n$ .

Auf  $U_i$  definieren wir  $Q_i: \mathbb{k}^r \rightarrow VG|_{B_i}$  durch

$$Q_i(x, v) = [(g_0^{(i)}(x), \dots, g_N^{(i)}(x); \chi_0(x), \dots, \chi_N(x)), \rho(h_i(x))(v)] \quad \text{für alle } x \in U_i \text{ und alle } v \in V_x$$

$$\text{mit } g_j^{(i)}(x) = \begin{cases} h_j(y)h_i(y)^{-1} & \text{falls } x \in U_i \cap U_j, \\ e & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beachte, dass  $\chi_j(x) = 0$  falls  $x \notin U_j$ , so dass es wegen der Verbund-Konstruktion in diesem Fall nicht auf den Wert von  $g_j^{(i)}(x)$  ankommt. Da  $g_i^{(i)} = e$ , gilt

$$\psi_i(Q_i(v)) = \rho(h_i(x))(v);,$$

so dass  $Q_i$  auf dem Rand  $U_i \cap S^{n-1}$  mit  $\Theta' \circ \Xi$  übereinstimmt.

Man überprüft leicht, dass die Abbildungen  $Q_i$  und  $Q_j$  auf  $U_i \cap U_j$  übereinstimmen, und sich daher zu einer  $G$ -Vektorbündelabbildung  $Q: \mathbb{k}^r \rightarrow VG$  über einer Abbildung  $q: D^n \rightarrow BG$  zusammensetzen. Da  $Q$  über  $S^{n-1}$  mit  $\Theta' \circ \Xi$  übereinstimmt, können wir  $\Theta'$  über im  $\Phi$  so zu einer  $G$ -Vektorbündelabbildung  $\Theta$  fortsetzen, dass  $Q = \Theta \circ \Xi$ . Am Ende haben wir die gesuchte klassifizierende Abbildung  $\vartheta$  für  $p: V \rightarrow X$  konstruiert.

Zur Injektivität seien  $\vartheta_0, \vartheta_1: X \rightarrow BG$  zusammen mit einem  $G$ -Vektorbündelisomorphismus  $\vartheta_0^*VG \cong \vartheta_1^*VG$  gegeben. Es bezeichne  $q: X \times I \rightarrow X$  die Projektion, und es sei  $V = (\vartheta_0 \circ q)^*VG \rightarrow X \times I$ . Dann haben wir eine  $G$ -Vektorbündelabbildung  $\Theta_0: V|_{X \times \{0\}} \rightarrow VG$  über  $\vartheta_0: X \times \{0\} \rightarrow BG$ . Mit Hilfe des obigen Isomorphismus erhalten wir auch eine  $G$ -Vektorbündelabbildung  $\Theta_1: V|_{X \times \{1\}} \rightarrow VG$  über  $\vartheta_1: X \times \{1\} \rightarrow BG$ . Es trage  $X \times I$  die übliche Zellstruktur, dann konstruieren wir der obigen Methode eine Fortsetzung  $\bar{\Theta}: V \rightarrow VG$  über  $\bar{\vartheta}: X \times I \rightarrow BG$ . Somit ist  $\bar{\vartheta}$  die gesuchte Homotopie zwischen  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$ .  $\square$

Mit Vektorbündeln sind ähnliche Konstruktionen wie mit Vektorräumen möglich. Wir schauen uns hier speziell zwei davon näher an.

**6.32. PROPOSITION UND DEFINITION.** *Sei  $p: V \rightarrow X$  ein  $G$ -Vektorbündel mit Atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  und es sei  $q: W \rightarrow X$  ein  $H$ -Vektorbündel mit Atlas  $(V_i, \psi_i)_{i \in I}$ . Dann existieren zwei  $G \times H$ -Vektorbündel über  $X$ , nämlich*

- (1) *die Whitney-Summe  $V \oplus W$  mit Fasern  $(V \oplus W)_x \cong V_x \oplus W_x$  und Atlas  $(U_i, \varphi_i \oplus \psi_i)$ , sowie*
- (2) *das Whitney-Produkt  $V \otimes_{\mathbb{k}} W$  mit Fasern  $(V \otimes_{\mathbb{k}} W)_x \cong V_x \otimes_{\mathbb{k}} W_x$  und Atlas  $(U_i, \varphi_i \otimes \psi_i)$ , falls  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .*

*Beide sind bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt.*

Ein Tensorprodukt über  $\mathbb{H}$  existiert leider nicht; das Tensorprodukt zweier quaternionischer Vektorräume trägt nur eine natürliche reelle Vektorraumstruktur.

**BEWEIS.** Seien  $\rho: G \rightarrow GL_r(\mathbb{k})$  und  $\pi: H \rightarrow GL_s(\mathbb{k})$  die zugrundeliegenden injektiven Gruppenhomomorphismen, dann sind  $(\rho \oplus \pi)(g, h) = \rho(g) \oplus \pi(h) \in GL_{r+s}(\mathbb{k})$  und  $(\rho \otimes \pi)(g, h) = \rho(g) \otimes \pi(h) \in GL_{rs}(\mathbb{k})$  ebenfalls injektive Gruppenhomomorphismen; hierbei bezeichnet  $A \otimes B$  für  $A \in M_r(\mathbb{k})$  und  $B \in M_s(\mathbb{k})$  das Kronecker-Produkt von Matrizen (was mit dem Kronecker-Produkt aus Abschnitt 6.b nur den Namen gemeinsam hat).

Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, dass beiden Atlanten die gleiche Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  zugrundeliegt, was wir natürlich immer erreichen können. Die angegebenen Ansammlungen lokaler Trivialisierungen bilden tatsächlich  $G \times H$ -Atlanten, und zwar in beiden Fällen mit den stetigen Trivialisierungswechseln  $(g \times h)_{ij} = g_{ij} \times h_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G \times H$ .

Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich, da die Fasern  $V_x \oplus W_x$  beziehungsweise  $V_x \otimes_{\mathbb{k}} W_x$  bereits bis auf eindeutige Isomorphismen durch die jeweilige universelle Eigenschaft festgelegt sind.  $\square$

## 6.f. Topologische $K$ -Theorie

Wir benutzen Vektorbündel jetzt, um einen allgemeinen Kohomologiefunktor zu konstruieren und das zugehörige Spektrum anzugeben. Wir werden hier keinerlei Sätze beweisen. Bis jetzt hatten all unsere Vektorbündel konstante Dimension auf ganz  $X$ . Das werden wir in Zukunft nicht mehr fordern.

**6.33. DEFINITION.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel  $p: V \rightarrow X$  besteht aus einer lokalkonstanten Funktion  $r: X \rightarrow \mathbb{N}$  und je einem  $GL_n(\mathbb{k})$ -Vektorbündel  $p: p^{-1}(r^{-1}(n)) \rightarrow r^{-1}(n)$ . Wir nennen  $r$  den *lokalen Rang* von  $V$ . Ein  $\mathbb{k}$ -Vektorbündelisomorphismus  $F: V \rightarrow W$  von  $\mathbb{k}$ -Vektorbündeln  $p: V \rightarrow X, q: W \rightarrow X$  besteht aus je einer  $GL_n(\mathbb{k})$ -Vektorbündelabbildung  $F_n: p^{-1}(r^{-1}(n)) \rightarrow q^{-1}(r^{-1}(n))$ .



Ein *virtuelles*  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel auf  $X$  ist ein Paar  $V \ominus W$  von  $\mathbb{k}$ -Vektorbündeln  $p: V \rightarrow X$  und  $q: W \rightarrow X$ . Zwei *virtuelle*  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel  $V \ominus W$  und  $T \ominus U$  über  $X$  heißen *äquivalent*, kurz  $V \ominus W \sim T \ominus U$ , wenn es virtuelle  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel  $R, S \rightarrow X$  gibt, so dass  $V \oplus R \cong T \oplus S$  und  $W \oplus R \cong U \oplus S$ .

Die Gruppe der virtuellen  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel auf  $X$  wird mit  $K_{\mathbb{k}}^0(X)$  bezeichnet. Im Falle  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  schreibt man auch kurz  $K^0(X)$ , und im Fall  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  schreibt man  $KO^0(X)$ . Für punktierte Räume  $X$  bezeichne  $\iota: \text{pt} \rightarrow X$  die Inklusion des Basispunktes, dann definieren wir  $\tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(X) = \ker(\iota^*: K_{\mathbb{k}}^0(X) \rightarrow K_{\mathbb{k}}^0(\text{pt}))$ .

Sei schließlich  $f: Y \rightarrow X$  stetig. Das Zurückziehen von Vektorbündeln induziert

$$f^*: K_{\mathbb{k}}^0(X) \longrightarrow K_{\mathbb{k}}^0(Y), \quad \text{und} \quad f^*: \tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(X) \longrightarrow \tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(Y)$$

falls  $f$  punktiert ist.

6.34. BEISPIEL. Nach dem Satz 3.48 vom Igel ist das Tangentialbündel  $TS^{2n}$  nicht trivial. Betrachten wir die übliche Einbettung  $S^{2n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ , dann ist das Normalenbündel  $\nu S^{2n}$  trivial, denn für jeden Punkt  $p \in S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  bildet der Ortsvektor  $p$  zugleich eine Basis des eindimensionalen Normalenraums  $\nu_p S^{2n}$ , siehe Abschnitt 3.i. Indem wir  $T_p S^{2n}$  und  $\nu_p S^{2n}$  als Unterräume von  $\mathbb{R}^{2n+1}$  auffassen, erhalten wir  $\mathbb{R}$ -Vektorbündelisomorphismen

$$T_p S^{2n} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} T_p S^{2n} \oplus \nu_p S^{2n} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{2n+1} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}.$$

Somit ist das Tangentialbündel äquivalent (aber nicht isomorph!) zu einem trivialen Vektorbündel. Man sagt daher, dass  $TS^{2n}$  *stabil trivial* ist. Außerdem sehen wir, dass die Kürzungsregel für die Whitney-Summe nicht gilt.

Der Übergang von  $\mathbb{k}$ -Vektorbündeln zu virtuellen  $\mathbb{k}$ -Vektorbündeln in Definition 6.33 entspricht dem Übergang von  $\mathbb{N}$  zu  $\mathbb{Z}$ . Da die Halbgruppe der  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel jedoch keine Kürzungseigenschaft besitzt, mussten wir etwas sorgfältiger vorgehen.

6.35. BEMERKUNG. Wir sammeln ein paar nützliche Eigenschaften (ohne Beweise).

- (1) Jedes  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel  $V$  über einem parakompakten Raum  $X$  lässt sich mit einem faserweisen Skalarprodukt ausstatten, das in den Trivialisierungen stetig vom Basispunkt abhängt. Daher dürfen wir annehmen, dass  $p: p^{-1}(r^{-1}(n)) \rightarrow r^{-1}(n)$  in diesem Fall ein  $U(n, \mathbb{k})$ -Vektorbündel ist. Auf der anderen Seite kann man auch zeigen, dass  $U(n, \mathbb{k})$  ein Deformationsretrakt von  $GL_n(\mathbb{k})$  und somit  $BU(n, \mathbb{k})$  ein Deformationsretrakt von  $BGL_n(\mathbb{k})$  ist.
- (2) Zu jedem  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel  $W$  über einem kompakten Raum  $X$  existiert ein sogenanntes *komplementäres Vektorbündel*  $U$ , so dass  $W \oplus U \cong \mathbb{k}^N$  für ein hinreichend großes  $N \in \mathbb{N}$ . Insbesondere lässt sich jedes virtuelle  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel  $V \ominus W$  über  $X$  durch das äquivalente virtuelle  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel  $(V \oplus U) \ominus \mathbb{k}^N$  ersetzen. Für nicht kompakte Räume ist diese Aussage im Allgemeinen nicht richtig.
- (3) Whitney-Summe und Whitney-Produkt erfüllen die üblichen Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze jeweils bis auf eindeutige Isomorphismen. Dadurch wird  $K_{\mathbb{k}}^0(X)$  für alle  $X$  zu einem kommutativen Ring mit Einselement  $\mathbb{k}$ , falls  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ; für  $\mathbb{k} = \mathbb{H}$  erhalten wir nur eine abelsche Gruppe.
- (4) Alle obigen Konstruktionen sind mit Zurückziehen verträglich. Wir erhalten also einen kontravarianten Funktor  $K_{\mathbb{k}}^0$  von der Kategorie  $\mathcal{Top}$  oder  $kw\mathcal{H}$  in die Kategorie der kommutativen Ringe ( $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) beziehungsweise der abelschen Gruppen ( $\mathbb{k} = \mathbb{H}$ ).
- (5) Ein  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel über einem Punkt ist ein  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel und wird klassifiziert durch seine Dimension  $n \in \mathbb{N}$ . Ein virtuelles  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel über einem Punkt wird somit durch seine virtuelle Dimension  $n = \mathbb{Z}$  klassifiziert.

Zu einer Kohomologietheorie fehlt uns unter anderem die lange exakte Sequenz. Daher wollen wir ein  $\omega$ -Spektrum  $\mathbb{K}\mathbb{k}$  konstruieren, so dass  $K_{\mathbb{k}}^0(X) = [X_+, K\mathbb{k}_0]$  zumindest für kompakte  $X$  gilt. Dazu betrachten wir die Folgen von Gruppen  $\text{pt} = U(0, \mathbb{k}) \hookrightarrow U(1, \mathbb{k}) \hookrightarrow \dots$ , wobei die Inklusionsabbildung einer Matrix  $A \in U(n, \mathbb{k})$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in U(n+1, \mathbb{k}) \quad (6.2)$$

zuordnet. Wir definieren topologische Gruppen

$$U(\mathbb{k}) = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} U(n, \mathbb{k}) = \begin{cases} O & \text{falls } \mathbb{k} = \mathbb{R}, \\ U & \text{falls } \mathbb{k} = \mathbb{C}, \text{ und} \\ Sp & \text{falls } \mathbb{k} = \mathbb{H}. \end{cases}$$

Wir erhalten Folgen von Inklusionen  $EU(n, \mathbb{k}) \hookrightarrow EU(n+1, \mathbb{k})$  und  $BU(n, \mathbb{k}) \hookrightarrow BU(n+1, \mathbb{k})$ . Die Kolimiten in den obigen Konstruktionen vertauschen, und so erhalten wir

$$EU(\mathbb{k}) = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} EU(n, \mathbb{k}) \quad \text{und} \quad BU(\mathbb{k}) = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} BU(n, \mathbb{k}) \cong EU/U.$$

Die tautologischen Vektorbündel  $VU(n, \mathbb{k})$  haben allerdings alle unterschiedlichen Rang, es gibt also kein tautologische Bündel über  $BU(\mathbb{k})$ .

6.36. SATZ. *Es sei  $X$  ein kompakter CW-Komplex, dann gilt*

$$K_{\mathbb{k}}^0(X) = [X_+, \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})]. \quad (1)$$

*Sei  $X$  ein kompakter punktierter CW-Komplex, dann gilt*

$$\tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(X) = [X, \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})]. \quad (2)$$

Für den Satz ist es nicht nötig, dass  $X$  ein CW-Komplex ist; es macht den Beweis aber einfacher. Falls  $X$  nicht kompakt ist, erhalten wir immer noch eine Abbildung  $K_{\mathbb{k}}^0(X) \rightarrow [X_+, \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})]$ , allerdings ist diese nicht immer surjektiv. Als Beispiel würde die Abbildung  $\text{id}_{BU(\mathbb{k})}$  das „tautologische Bündel“ klassifizieren, aber ein solches gibt es auf  $BU(\mathbb{k})$  nicht. Wir wählen Basispunkte in allen  $BU(\mathbb{k})$  und betrachten den Raum

$$X = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} BU(k, \mathbb{k}).$$

Dann gibt es kein virtuelles Vektorbündel  $V \ominus W$  auf  $X$ , so dass  $(V \ominus W)|_{BU(k, \mathbb{k})} \sim (VU(k, \mathbb{k}) \ominus \underline{\mathbb{k}}^k)$ , insbesondere erfüllt der oben definierte Funktor nicht das Summenaxiom aus Definition 6.1 (2).

BEWEIS. Es sei  $V \ominus W$  ein virtuelles  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel über  $X$ , dann existiert  $U \rightarrow X$ , so dass  $U \oplus W \cong \underline{\mathbb{k}}^n$  auf ganz  $X$ . Wir dürfen  $U \oplus V$  mit einem Skalarprodukt ausstatten. Dann sei  $r: X \rightarrow \mathbb{Z}$  der lokale Rang des Bündels  $U \oplus V$ , und es sei  $\vartheta: r^{-1}(m) \rightarrow BU(m, \mathbb{k})$  die klassifizierende Abbildung des Bündels  $(U \oplus V)|_{r^{-1}(m)}$ . Wir definieren  $\Theta: X \rightarrow \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})$  durch

$$\Theta(x) = (m - n, \vartheta(x)) \in \{m - n\} \times BU(m, \mathbb{k}) \subset \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k}) \quad \text{für alle } m \text{ und alle } x \in r^{-1}(m).$$

Da isomorphe Vektorbündel nach Satz 6.31 homotope klassifizierende Abbildungen haben, können wir Wohldefiniertheit zu zeigen, indem wir  $V \ominus W$  um ein  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel  $R$  zu  $(V \oplus R) \ominus (W \oplus R)$  „erweitern“ und die neue klassifizierende Abbildung mit  $\Theta$  vergleichen. Dazu wählen wir wie oben ein  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel  $S$ , so dass  $W \oplus R \oplus S \cong \underline{\mathbb{k}}^\ell$ . Das heißt, wir haben das obige Bündel  $U$  durch  $U' = R \oplus S$  ersetzt. Wir erhalten einen  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel-Isomorphismus

$$V \oplus U \oplus \underline{\mathbb{k}}^\ell \cong V \oplus U \oplus W \oplus U' \cong V \oplus U' \oplus \underline{\mathbb{k}}^n.$$

Nach Konstruktion von  $U(m, \mathbb{k}) \subset U(m + \ell, \mathbb{k})$  und  $BU(m, \mathbb{k}) \subset BU(m + \ell, \mathbb{k})$  wird das Bündel  $V \oplus U \oplus \underline{\mathbb{k}}^\ell$  nach wie vor durch

$$\Theta: X \longrightarrow \{m - n\} \times BU(m, \mathbb{k}) \subset \{(m + \ell) - (n + \ell)\} \times BU(m + \ell, \mathbb{k}) \subset \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})$$

klassifiziert. Diese Abbildung ist homotop zur klassifizierenden Abbildung für  $V \oplus U' \oplus \mathbb{k}^n$ , und es folgt Wohldefiniertheit.

Zur Surjektivität betrachten wir  $\Theta: X \rightarrow \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})$ . Da  $X$  kompakt ist, faktorisiert  $\Theta$  über  $\mathbb{Z} \times BU(n, \mathbb{k})$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Wir schreiben  $\Theta = (r, \vartheta)$ , und ohne Einschränkung gelte  $n \geq r$  auf ganz  $X$ . Dann klassifiziert  $\Theta$  das  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel

$$(\vartheta^* VU(n, \mathbb{k})) \oplus \underline{\mathbb{k}}^{n-r}.$$

Zur Injektivität sei  $H: X \times I \rightarrow \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})$  eine Homotopie zwischen  $\Theta = H_0$  und  $G = H_1$ . Diesmal faktorisiere  $H = (\bar{r}, h)$  über  $\mathbb{Z} \times BU(N, \mathbb{k})$ , und  $G = (g, s)$  faktorisiere über  $\mathbb{Z} \times BU(m, \mathbb{k})$ . Da  $r: X \times I \rightarrow \mathbb{Z}$  unabhängig von  $t \in I$  ist, folgt  $r = s: X \rightarrow \mathbb{Z}$ . Wegen Satz 6.31 erhalten wir eine Äquivalenz virtueller  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel

$$(\vartheta^* VU(n, \mathbb{k})) \oplus \underline{\mathbb{k}}^{n-r} \sim (h_0^* VU(N, \mathbb{k})) \oplus \underline{\mathbb{k}}^{N-r} \cong (h_1^* VU(N, \mathbb{k})) \oplus \underline{\mathbb{k}}^{N-r} \sim (g^* VU(m, \mathbb{k})) \oplus \underline{\mathbb{k}}^{m-r}.$$

Also gilt (1). Behauptung (2) folgt mit Bemerkung 6.35 (5), siehe auch Bemerkung 6.2 (3).  $\square$

Es bleibt zu zeigen, dass  $BU(\mathbb{k})$  zu einem  $\omega$ -Spektrum gehört. Dazu bezeichne  $\tau_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^1 \cong S^2$  das tautologische Bündel. Man kann zeigen (Übung), dass

$$\tau_{\mathbb{C}} \oplus \tau_{\mathbb{C}} \cong \underline{\mathbb{C}} \oplus \tau_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \tau_{\mathbb{C}},$$

oder kurz  $(\tau_{\mathbb{C}} \oplus \underline{\mathbb{C}})^2 = 0 \in K^0(S^2)$ . Da  $\tau_{\mathbb{C}} \oplus \underline{\mathbb{C}}|_{\text{pt}} = 0$ , gilt sogar  $\tau_{\mathbb{C}} \oplus \underline{\mathbb{C}} \in \tilde{K}^0(S^2)$ .

6.37. SATZ (Bott-Periodizität). *Für jeden gut punktierten kompakten topologischen Raum existiert ein Isomorphismus*

$$\sigma^2: \tilde{K}^0(X) \longrightarrow \tilde{K}^0(S^2 X),$$

dabei wird  $\sigma^2(V \oplus W) \in \tilde{K}^0(S^2 X)$  dargestellt durch das virtuelle  $\mathbb{C}$ -Vektorbündel

$$(\tau_{\mathbb{C}} \oplus \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes_{\mathbb{C}} (V \oplus W) = p_{S^2}^*(\tau_{\mathbb{C}} \oplus \underline{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{C}} p_X^*(V \oplus W) \in \tilde{K}^0(S^2 X).$$

Das „äußere Tensorprodukt“  $\boxtimes$  entspricht dabei dem Smash-Produkt aus Definition 6.13, siehe Bemerkung 6.41. Für den Beweis, dass  $\sigma^2$  einen Isomorphismus  $\tilde{K}^0(X) \rightarrow \tilde{K}^0(S^2 X)$  induziert, verweisen wir auf [At] und [H2, Theorem 2.2]. Als Konsequenz können wir jetzt das  $\omega$ -Spektrum für  $K$ -Theorie angeben.

6.38. SATZ UND DEFINITION. *Komplexe  $K$ -Theorie ist der allgemeine Kohomologiefunktor zum  $\omega$ -Spektrum  $\mathbb{K}$  mit*

$$K^n = \begin{cases} \mathbb{Z} \times BU & \text{falls } n \text{ gerade ist, und} \\ U & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Mit Satz 6.20 sehen wir, dass  $K$ -Theorie ein allgemeiner Kohomologiefunktor ist, der wegen Satz 6.36 für kompakte Räume mit der Konstruktion in Definition 6.33 übereinstimmt. Insbesondere erhalten wir eine lange exakte  $K$ -Theorie-Sequenz für Kofaserungen und eine Mayer-Vietoris-Sequenz. Da sich lange exakte Sequenzen in komplexer  $K$ -Theorie wegen Bott-Periodizität alle sechs Einträge wiederholen, heißen sie auch *Sechs-Term-Sequenzen*. Nach Satz 5.37 existiert auch ein allgemeiner Homologiefunktor zum obigen Spektrum, die sogenannte  *$K$ -Homologie*. Da ihre geometrische Interpretation etwas schwieriger ist, geben wir sie hier nicht an.

Auf der anderen Seite erfüllt  $K^\bullet$  im Gegensatz zu  $K_{\mathbb{C}}^0$  das Summenaxiom. Um beide Funktoren unterscheiden zu können, schreiben wir daher  $K$  für den Kohomologiefunktor. Analog schreiben wir  $KO$  für reelle  $K$ -Theorie.

BEWEIS. Wir müssen zwei Stabilisierungsabbildungen so konstruieren, dass  $\mathbb{K}$  ein  $\omega$ -Spektrum wird, und wir Bott-Periodizität erhalten. Als erstes betrachten wir das Faserbündel  $EU \rightarrow BU$  mit Faser  $U$ . Wir erhalten eine natürliche Abbildung von  $U$  in die Homotopiefaser. Ein Vergleich der Sequenzen 3.25 und 4.44 (3) für  $Z = S^k$  zeigt, dass diese Abbildung eine schwache Äquivalenz ist. Da  $EU$  zusammenziehbar ist, ist die Homotopiefaser schwach äquivalent zu  $\Omega BU$ . Außerdem sieht der Schleifenfunktor nur die Zusammenhangskomponente des Basispunktes, so dass  $\Omega BU \cong \Omega(\mathbb{Z} \times BU)$ . Nach den Sätzen 4.27 und 4.36 von Whitehead und Milnor sind also  $U$  und  $\Omega(\mathbb{Z} \times BU)$  homotopieäquivalent, und wir erhalten eine Abbildung  $U \rightarrow \Omega(\mathbb{Z} \times BU)$ . Die Adjunktion zwischen Einhängungs- und Schleifenfunktor gemäß dem Exponentialgesetz liefert die erste Stabilisierungsabbildung  $s: SU \rightarrow \mathbb{Z} \times BU$ .

Wir konstruieren als nächstes eine Abbildung  $S^2(\mathbb{Z} \times BU) \rightarrow \mathbb{Z} \times BU$ , so dass die induzierte Abbildung  $\pi_k(\mathbb{Z} \times BU) \rightarrow \pi_{k+2}(BU)$  für alle  $k \geq 0$  ein Isomorphismus ist. Dazu schreiben wir  $\mathbb{Z} \times BU$  als

$$\mathbb{Z} \times BU = \varinjlim X_n \quad \text{mit} \quad X_n = \{-n, \dots, n\} \times Y_n \quad \text{und} \quad Y_n = (U(n)^{*n})/U(n)$$

und nutzen aus, dass die rechte Seite kompakt ist und die natürlichen Inklusionen  $X_n \rightarrow X_{n+1}$  Kofaserungen sind. Auf  $X_n$  definieren wir das virtuelle  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel  $V_n$  durch

$$V_n|_{\{k\} \times Y_n} = VU(n)|_{Y_n} \ominus \underline{\mathbb{C}}^{n-k}.$$

Dann sei  $\Theta_n: S^2 X_n \rightarrow BU$  die klassifizierende Abbildung des virtuellen Vektorbündels

$$(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n \longrightarrow X_n,$$

für ein hinreichend großes  $N$  gilt also  $(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n \cong \Theta_n^* V_N$ . Da  $V_n \cong V_{n+1}|_{X_n}$ , ist  $\Theta_n$  homotop zu  $\Theta_{n+1}|_{X_n}$ . Da  $X_n \subset X_{n+1}$  eine Kofaserung ist, können wir die  $\Theta_n$  induktiv so durch homotope Abbildungen ersetzen, dass schließlich  $\Theta_n = \Theta_{n+1}|_{X_n}$  für alle  $n$  gilt. Dadurch erhalten wir eine Abbildung

$$\Theta: S^2 BU \cong \varinjlim X_n \longrightarrow BU.$$

Sei jetzt  $[\vartheta] \in \tilde{K}^0(S^k) = \pi_k(\mathbb{Z} \times BU)$ , dann repräsentiert  $\vartheta$  ein virtuelles  $\mathbb{C}$ -Vektorbündel  $V \rightarrow S^k$ . Da  $S^k$  kompakt ist, faktorisiert  $\vartheta$  über ein  $X_n$ , und es folgt  $V \cong \vartheta^* V_n$  und

$$(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V \cong (S^2 \vartheta)^*((\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n) \cong (S^2 \vartheta \circ \Theta_n)^* V_N.$$

Bott-Periodizität 6.37 und Bemerkung 3.10 liefern somit einen Isomorphismus

$$\pi_k(\mathbb{Z} \times BU) \xrightarrow{\Theta_* \circ S^2} \pi_{k+2}(BU) \xrightarrow{\cong} \pi_k(\Omega^2 BU).$$

Also induziert  $\Theta: S^2(\mathbb{Z} \times BU) \rightarrow (\mathbb{Z} \times BU)$  eine schwache Äquivalenz  $\mathbb{Z} \times BU \rightarrow \Omega^2(\mathbb{Z} \times BU)$ . Verkettung mit der Homotopieäquivalenz  $\Omega(\mathbb{Z} \times BU) \rightarrow U$  liefert eine schwache Äquivalenz  $\mathbb{Z} \times BU \rightarrow \Omega U$ . Via Adjunktion erhalten wir die zweite Stabilisierungsabbildung  $s: S(\mathbb{Z} \times BU) \rightarrow U$ . Damit haben wir das gesuchte  $\omega$ -Spektrum konstruiert.  $\square$

6.39. BEMERKUNG. Da  $\mathbb{K}$  ein  $\omega$ -Spektrum ist, folgt

$$\pi_k(\mathbb{Z} \times BU) = \pi_{k+1}(U) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

da  $\pi_0(U) = 0$  und  $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$  nach Übung 6.64.

6.40. BEMERKUNG. Wir geben das reelle Analogon ohne weitere Erläuterungen an.

- (1) Es sei  $\tau_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{H}P^1 \cong S^4$  das tautologische Bündel. Wie bei der komplexen Bott-Periodizität 6.37 erhalten wir für kompakte CW-Komplexe  $X$  einen Isomorphismus

$$\sigma^4: K_{\mathbb{R}}^0(X) \xrightarrow{\cong} K_{\mathbb{H}}^0(S^4 X) \quad \text{mit} \quad (V \oplus W) \mapsto (\tau_{\mathbb{H}} \oplus \underline{\mathbb{H}}) \boxtimes_{\mathbb{R}} (V \oplus W) .$$

Da wir mit einem virtuellen  $\mathbb{H}$ -Bündel tensorieren, landen wir in quaternionischer  $K$ -Theorie.

- (2) Das Tensorieren zweier  $\mathbb{H}$ -Vektorbündel liefert ein reelles Vektorbündel, da  $\mathbb{H}$  nicht kommutativ ist. Wir erhalten einen weiteren Isomorphismus

$$\sigma^4: K_{\mathbb{H}}^0(X) \xrightarrow{\cong} K_{\mathbb{R}}^0(S^4 X) \quad \text{mit} \quad (V \oplus W) \mapsto (\tau_{\mathbb{H}} \oplus \underline{\mathbb{H}}) \boxtimes_{\mathbb{H}} (V \oplus W) .$$

Zusammen mit (1) ergibt sich hieraus reelle Bott-Periodizität mit Periode 8, nämlich

$$\sigma^8: K_{\mathbb{R}}^0(X) \cong K_{\mathbb{R}}^0(S^8 X) .$$

- (3) Ähnlich wie in Satz 6.38 können wir zu einem  $\omega$ -Spektrum  $\mathbb{K}\mathbb{O}$  „auffüllen“ mit

$$\begin{aligned} KO_8 &= \mathbb{Z} \times BO , & KO_{8k+1} &= U/O , & KO_{8k+2} &= Sp/U , & KO_{8k+3} &= Sp , \\ KO_{8k+4} &= \mathbb{Z} \times BSp , & KO_{8k+5} &= U/Sp , & KO_{8k+6} &= O/U , & KO_{8k+7} &= O , \end{aligned}$$

Zumindest die Stabilisierungsabbildungen  $S^1 \wedge O \rightarrow \mathbb{Z} \times BO$  und  $S^1 \wedge Sp \rightarrow \mathbb{Z} \times BSp$  kommen wie oben zustande. Wir bilden  $U/O$  als Kolimes von  $U(n)/O(n)$ , indem wir reelle als komplexe Matrizen auffassen; entsprechend konstruieren wir  $Sp/U$ . Umgekehrt bilden wir  $O/U$  als Kolimes von  $O(2n)/U(n)$ , indem wir komplexe Matrizen mit reellen Matrizen identifizieren, die eine zusätzliche komplexe Struktur auf  $\mathbb{R}^{2n}$  festhalten; analog bilden wir  $U/Sp$ . Als Koeffizientengruppen erhalten wir

$$\pi_{8k+n}(\mathbb{Z} \times BO) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n = 0, 4, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{für } n = 1, 2, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (4) Wegen (2) und (3) gibt es auch einen mit quaternionischer  $K$ -Theorie verwandten allgemeinen Kohomologiefunktor: für kompakte CW-Komplexe gilt

$$\tilde{K}_{\mathbb{H}}^k(X) = \tilde{K}_{\mathbb{R}}^k(S^4 X) = \tilde{K}_{\mathbb{R}}^{k \pm 4}(X) .$$

6.41. BEMERKUNG. Zur Konstruktion der Bott-Periodizität hatten wir das äußere Tensorprodukt benutzt. Seien  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel  $V \rightarrow X$  und  $W \rightarrow Y$  mit  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  gegeben, dann lautet die allgemeine Definition

$$V \boxtimes W = (p_X^* V) \otimes_{\mathbb{k}} (p_Y^* W) \longrightarrow X \times Y ,$$

dabei ist „ $\otimes$ “ wieder das Whitney-Produkt, und  $p_X: X \times Y \rightarrow X$  und  $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$  sind die Projektionen im Produkt. Da das Whitney-Produkt bis auf eindeutige Isomorphismen assoziativ ist, gilt das auch fürs äußere Tensorprodukt.

- (1) Seien  $X = (X, x_0)$  und  $Y = (Y, y_0)$  punktiert, und seien  $V|_{x_0}$  und  $W|_{y_0}$  trivial, das heißt, virtuelle  $\mathbb{k}$ -Vektorräume von virtueller Dimension 0, dann ist auch  $V \boxtimes W|_{X \wedge Y}$  trivial. Insbesondere repräsentiert  $V \boxtimes W$  ein Element in  $\tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(X \wedge Y)$ . Wir erhalten ein Analogon zum Smash-Produkt aus Definition 6.13. Es ist ebenfalls assoziativ und kommutativ bis auf eindeutige Isomorphismen, insbesondere also assoziativ und kommutativ auf  $\tilde{K}_{\mathbb{k}}^0$ .
- (2) Das Einselement  $1 \in \tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(S^0)$  wird repräsentiert durch ein  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel vom Rang 0 auf dem Basispunkt und Rang 1 auf dem anderen Punkt der  $S^0$ .

- (3) Die Stabilisierungsisomorphismen  $\sigma^2$  in Satz 6.37 und  $\sigma^8$  in Bemerkung 6.40 (2) wurden mit Hilfe des äußeren Produktes definiert. Es sei  $n_0 = 2$  falls  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  und  $n_0 = 8$  falls  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ . In Analogie zu Proposition 6.13 (3) gilt daher

$$(\sigma^{n_0}V) \boxtimes_{\mathbb{C}} W = \sigma^{n_0}(V \boxtimes_{\mathbb{C}} W) = V \boxtimes_{\mathbb{C}} (\sigma^{n_0}W) \in \tilde{K}^0(S^{n_0}(V \wedge W)) .$$

- (4) Seien jetzt  $X, Y$  kompakte CW-Komplexe, und seien  $V \in \tilde{K}_{\mathbb{k}}^k(X)$  und  $W \in \tilde{K}_{\mathbb{k}}^{\ell}(Y)$  für  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Es gibt natürliche Isomorphismen

$$\sigma^{n_0-k} : \tilde{K}_{\mathbb{k}}^k(X) \cong [X, \Omega^{n_0-k}(\mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k}))] \xrightarrow{\cong} [S^{n_0-k}X, \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})] \cong \tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(S^{n_0-k}X) ,$$

also identifizieren wir  $V$  mit  $\sigma^{n_0-k}V \in \tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(S^{n_0-k}X)$  und definieren

$$V \boxtimes_{\mathbb{k}} W = \sigma^{k+\ell}((\sigma^{n_0-k}V) \boxtimes_{\mathbb{k}} (\sigma^{n_0-\ell}W)) \in K_{\mathbb{k}}^{k+\ell}(X \wedge Y) .$$

Die Klasse  $(\sigma^{n_0-k}V) \boxtimes_{\mathbb{k}} (\sigma^{n_0-\ell}W)$  lebt in  $\tilde{K}_{\mathbb{k}}^0(S^{k+\ell}(X \wedge Y))$ . Beim Vertauschen von  $V$  und  $W$  haben wir im Zwischenschritt zusätzlich eine Transpositionsabbildung  $S^{k+\ell} \rightarrow S^{\ell+k}$  anzuwenden. Wie in Proposition 6.13 (3) gilt daher

$$t^*(W \boxtimes_{\mathbb{k}} V) = (-1)^{k\ell} V \boxtimes_{\mathbb{k}} W .$$

- (5) Wir haben festgestellt, dass es kein Produkt  $\tilde{K}_{\mathbb{H}}^0(X) \times \tilde{K}_{\mathbb{H}}^0(Y) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbb{H}}^0(X \wedge Y)$  gibt. Das erklärt sich, indem wir  $\tilde{K}_{\mathbb{H}}^0$  wie in Bemerkung 6.40 (4) mit  $\tilde{K}_{\mathbb{R}}^4$  identifizieren.

Wir haben jetzt also zwei allgemeine Kohomologiefunktoren mit Produkten definiert. Zur geometrischen Interpretation der Verbindungshomomorphismen in den langen exakten Sequenzen und zu den Produkten zwischen höheren  $K$ -Gruppen haben wir leider noch nichts sagen können.

## 6.g. Bordismus

Wir kennen bereits den gerahmten (Ko-) Bordismus. Wir erklären jetzt, wie man andere (Ko-) Bordismusfunktoren als allgemeine (Ko-) Homologiefunktoren darstellen kann, und führen die zugehörigen Thom-Spektren ein.

Wir erinnern uns, dass jedes reelle Vektorbündel  $V \rightarrow X$  über einem CW-Komplex ein bis auf Homotopie eindeutiges faserweises Skalarprodukt, und daher eine  $O(n)$ -Struktur trägt. Wir erinnern uns auch an den klassifizierenden Raum  $BO(n)$  und das tautologische  $G$ -Vektorbündel  $VO(n) \rightarrow BO(n)$  aus Abschnitt 6.e zu  $\rho$ . Die klassifizierende Abbildung  $\gamma: X \rightarrow BO(n)$  ist bis auf Homotopie unabhängig von der Wahl des Skalarproduktes.

6.42. DEFINITION. Es sei  $V \rightarrow X$  ein  $O(n)$ -Vektorbündel, dann definieren wir das *Ball-* und das *Sphärenbündel* sowie den *Thom-Raum* von  $V$  als

$$DV = \{ v \in V \mid \|v\| \leq 1 \} , \quad SV = \{ v \in V \mid \|v\| = 1 \} \quad \text{und} \quad MV = DV/SV . \quad (1)$$

Als nächstes benötigen wir einen Satz aus der Differentialtopologie. Wir erinnern uns an den Begriff einer eigentlichen Abbildung aus Übung 4.46. Eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset N$  heißt *eigentlich*, wenn die Inklusion  $M \hookrightarrow N$  eigentlich ist. Insbesondere sind geschlossene Untermannigfaltigkeiten immer eigentlich.

6.43. SATZ (von der Röhrenumgebung). *Es sei  $N$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $M \subset N$  eine eigentliche Untermannigfaltigkeit. Dann existiert ein relatives Normalenbündel  $\nu_N M \rightarrow M$  mit einem faserweisen Skalarprodukt und eine Einbettung  $a: D\nu_N M \rightarrow N$ , deren Differential  $da|_M$  gerade der natürliche Isomorphismus  $\nu_N M \oplus TM \cong f^*TN$  ist.*

Wir wollen jetzt von Untermannigfaltigkeiten zu abstrakten Mannigfaltigkeiten übergehen. Im Folgenden betrachten wir daher  $N = \mathbb{R}^n$ . Wie üblich nennen wir eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand *geschlossen*. Wir zitieren einen weiteren Satz auf der Differentialtopologie.

6.44. SATZ (Einbettungs-, Whitney). *Jede geschlossene  $k$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit lässt sich für alle  $n \geq 2k$  in den  $\mathbb{R}^n$  einbetten.*

Wir können  $n$  beliebig vergrößern, indem wir eine lineare Einbettung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nachschieben. Je zwei Einbettungen  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g: N \rightarrow \mathbb{R}^m$  sind in einem größeren  $\mathbb{R}^N$  homotop, dazu definiere etwa  $h: I \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}$  durch

$$h(s, p) = (s, (1-s) \cdot f(p), s \cdot g(p)) .$$

Es bezeichne  $\nu f \rightarrow M$  das Normalenbündel von  $im f \subset \mathbb{R}^n$ . Sei  $g$  die Verkettung

$$g: M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m , \tag{6.3}$$

dann folgt  $\nu g = \underline{\mathbb{R}}^{m-n} \oplus \nu f$ . Wir betrachten die natürlichen Inklusionen  $\iota_n: O(n) \rightarrow O(n+1)$  aus (6.2). Sei  $\vartheta: M \rightarrow BO(n-k)$  eine klassifizierende Abbildung für  $\nu_{\mathbb{R}^n} M$ , dann ist

$$B\iota_{m-k-1} \circ \dots \circ B\iota_{n-k} \circ \vartheta: M \longrightarrow BO(m-k)$$

eine klassifizierende Abbildung für  $\nu_{\mathbb{R}^m} M$ . Außerdem sind Normalenbündel homotoper Einbettung  $f$  und  $g$  isomorph, und der Isomorphismus ist bis auf Homotopie eindeutig durch die Homotopie zwischen  $f$  und  $g$  bestimmt. Die folgende Definition ist daher sinnvoll.

6.45. DEFINITION. Es sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale geschlossene glatte Mannigfaltigkeit, und es sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Einbettung. Das *stabile Normalenbündel*  $\nu^s M \in K^0 O(M)$  ist definiert als

$$\nu^s M = [\nu f \ominus \underline{\mathbb{R}}^n] \in KO^0(M) .$$

Fortsetzung folgt ...

## 6.h. Übungen zu Kapitel 6

*Übungen zu Abschnitt 6.a.*

6.46. ÜBUNG. Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 6.3 für Kohomologie-Funktoren.

*Übungen zu Abschnitt 6.b.*

6.47. ÜBUNG. Es seien  $X = \mathbb{R}P^2 \times S^3$  und  $Y = S^2 \times \mathbb{R}P^3$ .

- (1) Zeigen Sie, dass  $X$  und  $Y$  isomorphe Homotopiegruppen haben.
- (2) Bestimmen Sie die ganzzahligen Homologiegruppen von  $X$  und  $Y$ .
- (3) Bestimmen Sie die ganzzahligen Kohomologiegruppen von  $X$  und  $Y$ .

6.48. ÜBUNG. Konstruieren Sie die Stabilisierungs-Isomorphismen für zelluläre Homologie und Kohomologie.

- (1) Geben Sie zuerst mit Hilfe von Proposition 5.81 Isomorphismen

$$\phi_n: \tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; A) \longrightarrow \tilde{C}_{n+1}^{\text{CW}}(S^1 \wedge X; A)$$

mit  $\phi_{n-1} \circ d_n^{\text{CW}} = -d_{n+1}^{\text{CW}} \circ \phi_n$  an.

- (2) Zeigen Sie, dass diese mit den Isomorphismen aus Satz 5.17 beziehungsweise Folgerung 6.4 übereinstimmen. *Hinweis:* Betrachten Sie die Kofaserung  $X \hookrightarrow CX = (I, 0) \wedge X$  und gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 3.42 (4).

6.49. ÜBUNG. Bestimmen Sie für  $1 \leq k \leq n$  die folgenden Kronecker-Produkte.

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (\text{a})$$

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (\text{b})$$

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2, \quad (\text{c})$$

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2. \quad (\text{d})$$

6.50. ÜBUNG. Betrachten Sie *einen* der Räume  $X_1, X_2$  aus Aufgabe 2.88 mit der dort angegebenen CW-Struktur. Bestimmen Sie die zellulären Randoperatoren und berechnen Sie die unreduzierte zelluläre Homologie und Kohomologie dieses Raumes.

6.51. ÜBUNG. Es sei  $R$  ein Hauptidealring und  $A$  ein  $R$ -Modul. Dann existiert für jeden topologischen Raum  $X$  eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_k(X; R) \otimes_R A \longrightarrow \tilde{H}_k(X; A) \longrightarrow \text{Tor}_R(\tilde{H}_{k-1}(X; R), A) \longrightarrow 0$$

wie in Satz 5.74. Diese Sequenz spaltet (allerdings nicht natürlich).

*Hinweis:* Beweisen Sie diese Aussage zunächst für CW-Komplexe mit den Methoden aus dem Beweis von Satz 6.9. Beutzen Sie dann Natürlichkeit und die Invarianz der gewöhnlichen Homologie unter schwachen Äquivalenzen.

6.52. ÜBUNG. Es seien  $X, Y$  CW-Komplexe und  $R$  ein Hauptidealring. Formulieren und beweisen Sie eine Künneth-Formel für  $\tilde{H}_{\text{CW}}^\bullet(X \wedge Y; R)$ . Nehmen Sie dazu an, dass einer der beiden Faktoren *von endlichem Typ* ist, das heißt, in jeder Dimension nur endlich viele Zellen besitzt.

*Übungen zu Abschnitt 6.c.*

6.53. ÜBUNG. Beweisen Sie einige der fehlenden Aussagen in Proposition 6.13.

- (1) Zeigen Sie zunächst einige der Aussagen in (3) und (5) zum Smashprodukt.
- (2) Beweisen Sie dann die zweite Aussage in (4) auf Ketten- / Kokettenniveau.
- (3) Leiten Sie daraus alle anderen Aussagen über das Schrägprodukt ab.

6.54. ÜBUNG. Bestimmen Sie für alle  $n \geq 1$  die Kohomologieringe (insbes. ihre multiplikative Struktur)

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^\bullet(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \tilde{H}_{\text{CW}}^\bullet(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2).$$

6.55. ÜBUNG. Es bezeichne  $[CP^n] \in H_{2n}(\mathbb{C}P^n; R)$  die von der  $2n$ -Zelle erzeugte Homologieklasse. Zeigen Sie, dass  $(H_\bullet(\mathbb{C}P^n; R), \smile)$  ein freier  $(H^\bullet(\mathbb{C}P^n; R), \smile)$ -Modul mit Erzeuger  $[CP^n]$  ist.

*Hinweis:* Bestimmen Sie zunächst das Kronecker-Produkt  $\langle [CP^n], \omega^n \rangle$ .

*Übungen zu Abschnitt 6.d.*

6.56. ÜBUNG. Es bezeichne  $H^\bullet(\cdot; \mathbb{Z})$  die unreduzierte Kohomologie zum Eilenberg-Mac Lane-Spektrum  $\mathbb{H}\mathbb{Z}$ . Zeigen Sie, dass für jeden topologischen Raum  $X$  gilt

$$H^0(X; \mathbb{Z}) = [X, \mathbb{Z}] \quad \text{und} \quad H^1(X; \mathbb{Z}) = [X, S^1].$$

6.57. ÜBUNG. Zeigen Sie: die radiale Projektion vom „topologischen Huhn“  $X$  aus Beispiel 4.33 auf  $S^1$  ist nicht zusammenziehbar. Folgern Sie, dass  $\tilde{H}^1(X) = [X, H\mathbb{Z}_1] \neq 0$ , obwohl  $X$  schwach zusammenziehbar ist.



6.58. ÜBUNG. Sei  $\mathbb{E}$  ein  $\omega$ -Spektrum und  $B \subset A \subset X$  seien beliebige Räume. Beweisen Sie die Exaktheit einer der Sequenzen

$$\begin{aligned} \cdots \longleftarrow E_k(X, A) \longleftarrow E_k(X, B) \longleftarrow E_k(A, B) \xleftarrow{\partial} E_{k+1}(X, A) \longleftarrow \cdots, \\ \cdots \longrightarrow E^k(X, A) \longrightarrow E^k(X, B) \longrightarrow E^k(A, B) \xrightarrow{\delta} E^{k+1}(X, A) \longrightarrow \cdots. \end{aligned}$$

Orientieren Sie sich dazu an Übung 3.112.

*Übungen zu Abschnitt 6.e.*

6.59. ÜBUNG. Zeigen Sie: Die Konstruktionen vor Definition 6.30, die jeder Gruppe  $G$  einen schwach zusammenziehbaren Raum  $EG$  mit freier  $G$ -Wirkung und einen klassifizierenden Raum  $BG$  zuordnen, so dass  $BG = EG/G$ , sind Funktoren von der Kategorie der topologischen Gruppen in die Kategorie  $kw\mathcal{H}$ .

6.60. ÜBUNG. Es sei  $H \subset G$  Untergruppe einer topologischen Gruppe. Zeigen Sie, dass der Raum  $EG/H$  zu  $BH$  homotopieäquivalent ist. Folgern Sie, dass der Quotient  $G/H$  die Homotopiefaser der natürlichen Abbildung  $BH \rightarrow BG$  ist.

6.61. ÜBUNG. Überlegen Sie sich, dass die Menge der positiv definiten selbstadjungierten Matrizen über  $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  konvex ist. Folgern Sie, dass jedes  $\mathbb{k}$ -Vektorbündel vom Rang  $r$  über einem CW-Komplex eine  $U(r, \mathbb{k})$ -Struktur trägt. Da  $BGL_r(\mathbb{k})$  als CW-Komplex dargestellt werden kann, gibt es daher eine klassifizierende Abbildung  $BGL_r(\mathbb{k}) \rightarrow BU(r, \mathbb{k})$  für das tautologische Bündel.

6.62. ÜBUNG. Wir betrachten die Gruppe  $O(1) \cong \mathbb{Z}/2 \cong S^0$ . Zeigen Sie:

- (1) Der Raum  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  ist homöomorph zum Verbund von  $n$  Kopien der  $S^0$ .
- (2) Der Raum  $BO(1)$  ist homotopieäquivalent zu  $\mathbb{R}P^\infty \cong K(\mathbb{Z}/2, 1)$ , siehe Beispiel 5.41 (4).
- (3) Für jeden topologischen Raum gilt  $\text{Bun}_{O(1)}(X) \cong H^1(X, \mathbb{Z}/2)$ .

Die einem reellen Vektorbündel  $V \rightarrow X$  vom Rang 1 entsprechende Kohomologieklass  $w_1(V) \in H^1(X, \mathbb{Z}/2)$  heißt auch *erste Stiefel-Whitney-Klasse*.

6.63. ÜBUNG. Wir betrachten die Gruppe  $U(1) \cong SO(2) \cong S^1 \subset \mathbb{C}$ . Zeigen Sie:

- (1) Der Raum  $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  ist homöomorph zum Verbund von  $n$  Kopien der  $S^1$ .
- (2) Der Raum  $BU(1)$  ist homotopieäquivalent zu  $\mathbb{C}P^\infty \cong K(\mathbb{Z}, 2)$ , siehe Beispiel 5.41 (5).
- (3) Für jeden topologischen Raum gilt  $\text{Bun}_{U(1)}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$ .

Die einem komplexen Vektorbündel  $V \rightarrow X$  vom Rang 1 entsprechende Kohomologieklass  $c_1(V) \in H^2(X, \mathbb{Z})$  heißt auch *erste Chern-Klasse*.

*Übungen zu Abschnitt 6.f.*

6.64. ÜBUNG. Die übliche Wirkung von  $U(n+1)$  auf  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  induziert eine Abbildung

$$p: U(n+1) \ni g \mapsto g \cdot e_1 \in S^{2n+1}.$$

- (1) Zeigen Sie, dass  $p$  ein Faserbündel mit Faser  $U(n) \subset U(n+1)$  ist.
- (2) Folgern Sie, dass  $\iota_n: U(n) \hookrightarrow U(n+1)$  eine  $(2n)$ -zusammenhängende Abbildung ist.
- (3) Bestimmen Sie  $\pi_k(U(n))$  für  $k = 0, 1$  und alle  $n$ .
- (4) Aufgrund von Bott-Periodizität gilt

$$\varinjlim \pi_k(U(n)) = \varinjlim \pi_{k+2}(U(n))$$

für alle  $k$ , wobei der Limes über  $n$  läuft. Welche  $\pi_k(U(n))$  können Sie mit dieser Information bestimmen?



## Ringspektren und Multiplikative Kohomologiefunktoren

In diesem Kapitel geht es um eine allgemeine Sprache für Produkte, wie wir sie zur gewöhnlichen Kohomologie, zur  $K$ -Theorie und zu Kobordismen bereits kennengelernt haben. Dazu führen wir zunächst CW-Spektren und ihr Smash-Produkt ein. Danach diskutieren wir Ringspektren und Produkte auf den zugehörigen (Ko-) Homologietheorien. Motiviert von unseren Überlegungen zur Poincaré-Dualität in der Bordismustheorie führen wir Orientierungen und Fundamentalklassen ein. Anschließend beweisen wir den Thom-Isomorphismussatz und Poincaré-Dualität.

### 7.a. Die stabile CW-Kategorie

In diesem Abschnitt spezifizieren wir den Begriff eines Spektrums aus Definition 5.35 analog zu CW-Komplexen, so dass wir von Zellen eines CW-Spektrums sprechen können. Die Hauptidee bei einem Spektrum ist wie bei jedem „Grenzwert“, dass es nie auf den „Anfangsteil“ des Spektrums ankommt. Aus diesem Grund definieren wir Abbildungen zwischen Spektra nicht zwingend auf den einzelnen Räumen, sondern achten nur darauf, dass jede Zelle des Spektrums irgendwann einmal mit berücksichtigt wird.

Es gibt mehrere Gründe, sich diese Mühe zu machen, und man wird mit einigen guten Eigenschaften belohnt.

- (1) Spektra erben viele schöne Eigenschaften von CW-Komplexen. Beispielsweise ist jede zelluläre Inklusion eine Kofaserung.
- (2) In der Kategorie der Spektra ist die Einhängung nach Konstruktion stets invertierbar. Daher ist jede Konstruktion in dieser Kategorie automatisch stabil.
- (3) In der stabilen Kategorie verhält sich jedes Spektrum so wie ein  $\omega$ -Spektrum. Auf diese Weise kann man jedem Spektrum je einen Homologie- und Kohomologiefunktor zuordnen.
- (4) In der Kategorie der Spektra sind endliche Koprodukte gleichzeitig endliche Produkte. Genauer gesagt, ist die Kategorie  $\mathcal{SHCW}$  additiv.
- (5) In der Kategorie der Spektra gibt es keinen Unterschied mehr zwischen Faser- und Kofasersequenzen. Genauer gesagt, kann man  $\mathcal{SHCW}$  mit der Struktur einer triangulierten Kategorie ausstatten.

Wir betrachten CW-Komplexe immer als Räume mit fixierten Zellen und charakteristischen Abbildungen. Auf der Einhängung eines punktierten CW-Komplexes  $X$  fixieren wir die folgende Zellstruktur. Wenn wir den Basispunkt als  $-1$ -Skelett betrachten, entspricht dabei jeder  $n$ -Zelle mit charakteristischer Abbildung  $\Phi^n: D^n \rightarrow X$  für  $n \geq 0$  eine  $(n+1)$ -Zelle mit charakteristischer Abbildung  $\Phi^{n+1} = s\Phi^n$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 I \times D^n & \xleftarrow{\cong} & D^{n+1} \\
 \downarrow & & \downarrow \searrow^{s\Phi^n} \\
 (I \times D^n)/(\partial I \times D^n) & \xrightarrow{\cong} & S^1 \wedge D_+^n \xrightarrow[S\Phi_+^n]{} SX
 \end{array}$$

kommutiert. Unter einer *zellulären Inklusion* verstehen wir die Inklusion eines Unterkomplexes.

7.1. DEFINITION. Ein *CW-Spektrum* ist ein Spektrum  $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , bei dem die Stabilisierungsabbildungen  $s_i: SE_i \rightarrow E_{i+1}$  zelluläre Inklusionen sind. Eine *strikte Abbildung*  $\mathbf{f}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  vom Grad  $k \in \mathbb{Z}$  ist eine Folge zellulärer Abbildungen  $f_i: E_i \rightarrow F_{i-k}$ , so dass  $Sf_i = f_{i+1}|_{SE_i}$  für alle  $i$ .

Für  $k \in \mathbb{Z}$  ist eine *k-Zelle* von  $\mathbb{E}$  eine Folge  $(e_{i+k})_{i \geq i_0}$  von  $(i+k)$ -Zellen von  $E_i$  mit charakteristischen Abbildungen  $\Phi^{i+k}: D^{i+k} \rightarrow E_i$  für  $i \geq i_0 \geq -k$ , so dass  $\Phi^{i+k+1} = s\Phi_+^{i+k}$ , und so dass es keine Zelle  $e_{i_0+k-1}$  von  $E_{i_0-1}$  gibt, deren Stabilisierung der Zelle  $e_{i_0+k}$  von  $E_{i_0}$  entspricht. Ein Spektrum aus nur endlich (abzählbar) vielen Zellen heißt *endlich (abzählbar)*.

Ein *Unterspektrum*  $\mathbb{U}$  eines CW-Spektrums  $\mathbb{E}$  ist eine Folge von Unterkomplexen  $U_i \subset E_i$  mit  $\text{im}(s_i|_{SE_i}) \subset U_{i+1}$ . Ein Unterspektrum  $\mathbb{U}$  von  $\mathbb{E}$  heißt *kofinal*, wenn es zu jeder Zelle  $(e_{i+k})_{i \geq i_0}$  ein  $j_0 \geq i_0$  gibt, so dass  $e_{j+k}$  eine Zelle von  $U_j$  ist für alle  $j \geq j_0$ .

7.2. BEISPIEL. Wir konstruieren einfache Beispiele.

- (1) Sei  $X$  ein punktierter CW-Komplex, dann ist das Einhängungsspektrum  $SX$  mit den Räumen  $S^k X$  ein CW-Spektrum. Für jede zelluläre Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  erhalten wir eine zelluläre Abbildung  $\mathbf{f}: SX \rightarrow SY$ . Wir sehen unten, dass strikte Abbildungen spezielle Morphismen von Spektren sind, und erhalten daher einen *Einhängungsfunktor*  $\mathbb{S}: CW_+ \rightarrow SCW$ .
- (2) Sei  $\mathbb{E}$  ein CW-Spektrum und  $X$  ein punktierter CW-Komplex, dann bilden wir das CW-Spektrum  $\mathbb{E} \wedge X$  mit den Räumen  $E_i \wedge X$  und den Stabilisierungsabbildungen  $s_i \wedge \text{id}_X$ . Insbesondere gilt  $SX = \mathbb{S} \wedge X$ .

Strikte Abbildungen heißen in der Literatur manchmal auch „Funktionen.“ In einem kofinalen Unterspektrum taucht jede Zelle irgendwann einmal auf. Die kofinalen Unterspektren eines CW-Spektrums bilden ein gerichtetes System, das heißt, der Durchschnitt zweier kofinaler Unterspektren ist wieder eins. Außerdem ist das Urbild eines kofinalen Unterspektrums unter einer strikten Abbildung ebenfalls wieder kofinal, und ein kofinales Unterspektrum eines kofinalen Unterspektrums von  $\mathbb{E}$  ist auch in  $\mathbb{E}$  kofinal. Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

7.3. DEFINITION. Es seien  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{F}$  CW-Spektren. Wir definieren den Raum der *Abbildungen* von  $\mathbb{E}$  nach  $\mathbb{F}$  vom Grad  $k$  als

$$\text{hom}_k(\mathbb{E}, \mathbb{F}) = \underset{\mathbb{U} \subset \mathbb{E} \text{ kofinal}}{\text{colim}} \{ \mathbf{f}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{F} \mid \mathbf{f} \text{ strikt vom Grad } k \}.$$

Die graduierte Kategorie der CW-Spektren und ihrer Abbildungen wird mit  $SCW$  bezeichnet. Die Unterkategorie  $SCW_0$  hat die gleichen Objekte, und als Morphismen alle Abbildungen vom Grad 0.

In einer *graduerten Kategorie* zerfällt der Raum aller Abbildungen in eine punktierte Vereinigung der Mengen von Abbildungen von den jeweiligen Graden. Beim Verketteten von Morphismen addieren sich die Grade, und die Identität hat stets Grad 0. Wir haben die Grade hier „homologisch“ gewählt, siehe unten.

Mit anderen Worten ist eine Abbildung  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  zwischen CW-Spektren eine Äquivalenzklasse strikter Abbildungen  $\mathbf{f}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{F}$ , wobei  $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$  ein kofinales Unterspektrum sei. Dabei heißen zwei solche Abbildungen  $\mathbf{f}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{F}$  und  $\mathbf{g}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$  äquivalent, wenn es ein kofinales Unterspektrum  $\mathbb{W} \subset \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$  gibt, so dass  $f_i|_{W_i} = g_i|_{W_i}$  für alle  $i$ . Der Merkvers hierzu lautet „Zellen sofort, Abbildungen später.“

7.4. BEMERKUNG. In der Kategorie  $SCW$  ist die Inklusion eines kofinalen Unterspektrums  $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{E}$  stets ein Isomorphismus, denn die Umkehrabbildung lässt sich auf  $\mathbb{U}$  definieren. Auf diese Weise lässt sich zu jeder Abbildung  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  bis auf eindeutige Isomorphismen ein Abbildungskegel  $Cf = C\mathbb{E} \cup_f \mathbb{F}$  konstruieren. Denn sei  $\mathbf{f}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{F}$  ein Repräsentant von  $f$ , dann erhalten wir ein Spektrum, bestehend aus den Räumen  $Cf_i = (CU_i \cup_{f_i} F_{i-k})$ . Ein anderer Repräsentant liefert ein anderes Spektrum, dass mit dem obigen ein kofinales Unterspektrum gemeinsam hat, so dass wir zwischen

je zwei so konstruierten Abbildungskegeln auf verträgliche Weise eindeutige Isomorphismen angeben können.

Wir versehen den Raum  $I_+$  mit der einfachst möglichen Zellstruktur, so dass es nur eine 1-Zelle gibt. Die folgende Definition lässt sich so wie die obige umschreiben in Termen von Äquivalenzklassen strikter Abbildungen, siehe Übung 7.41.

7.5. DEFINITION. Eine Homotopie zwischen Abbildungen  $f, g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  im Grad  $k$  von CW-Spektra ist eine Abbildung  $h: \mathbb{E} \wedge I_+ \rightarrow \mathbb{F}$  vom Grad  $k$ , so dass  $h|_{\mathbb{E} \wedge \{0\}_+} = f$  und  $h|_{\mathbb{E} \wedge \{1\}_+} = g$ . Die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen im Grad  $k$  wird mit  $[\mathbb{E}, \mathbb{F}]_k$  bezeichnet, und wir setzen

$$[\mathbb{E}, \mathbb{F}]_\bullet = \bigoplus_k [\mathbb{E}, \mathbb{F}]_k .$$

Die Kategorie der CW-Spektra mit Homotopieklassen von Abbildungen heißt *stabile Homotopiekategorie* und wird mit  $\mathcal{SHCW}$  bezeichnet. Wie oben betrachten wir die Unterkategorie  $\mathcal{SHCW}_0$  mit den gleichen Objekten und allen Homotopieklassen von Abbildungen vom Grad 0.

Hierzu überprüft man, dass Homotopie wie immer eine Äquivalenzrelation definiert, die mit Verkettung von Abbildungen verträglich ist, siehe wieder Übung 7.41. Außerdem ist  $[\mathbb{E}, \mathbb{F}]_k$  für alle  $k$  eine abelsche Gruppe. Seien etwas  $f, g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  gegeben, dann finden wir ein kofinales Unterspektrum  $\mathbb{U}$ , auf dem  $f$  und  $g$  durch strikte Abbildungen  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{g}$  darstellbar sind. Wir betrachten das Unterspektrum  $\mathbb{V}$  mit

$$V_k = \text{im}((s_{k-1} \circ s_{k-2})|_{S^2 U_{k-2}}) \quad \text{für } k \geq 0$$

und  $V_k = \text{pt}$  sonst. Es ist kofinal in  $\mathbb{U}$  und daher auch in  $\mathbb{E}$ , da jede Zelle entweder bei  $k = 0$  oder zweite Schritte später auftaucht als in  $\mathbb{U}$ . Wir schränken  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{g}$  beide auf  $\mathbb{V}$  ein. Nach Bemerkung 3.76 (2), (3) lassen sich  $f_k$  und  $g_k$  addieren, und es gilt  $S(f_k + g_k) = S f_k + S g_k$ . Da  $S V_k \subset V_{k+1}$  eine Kofaserung ist, können wir diese Homotopie auf  $V_{k+1}$  ausdehnen und erhalten so Schritt für Schritt eine strikte Abbildung  $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$ , die  $f + g$  repräsentiert. In den Übungen sehen wir außerdem, dass  $\mathcal{SHCW}_0$  eine additive Kategorie ist.

7.6. BEMERKUNG. Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  erhalten wir einen Funktor  $\Sigma^n: \mathcal{SCW} \rightarrow \mathcal{SCW}$  mit

$$\Sigma^n \mathbb{E} = (E_{i+n}, s_{i+n})_{i \in \mathbb{N}} .$$

Das Spektrum  $\mathbb{E} \wedge S^1$  aus Beispiel 7.2 (2) liegt kofinal in  $\Sigma \mathbb{E}$ , denn  $E_i \wedge S^1 \cong S E_i \subset E_{i+1}$ . Also ist es uns gelungen, den Einhängungsfunktor  $S: \mathcal{CW} \rightarrow \mathcal{CW}$  zu invertieren.

7.7. DEFINITION. Die  $k$ -te Homotopiegruppe eines CW-Spektrums  $\mathbb{E}$  ist definiert als  $\pi_k(\mathbb{E}) = [\Sigma^k \mathbb{S}, \mathbb{E}] = [\mathbb{S}, \mathbb{E}]_k$ . Für eine Abbildung  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  von Spektren definieren wir  $f_*: \pi_k(\mathbb{E}) \rightarrow \pi_k(\mathbb{F})$  wie üblich durch  $f_*([g]) = [f \circ g]$ .

7.8. BEMERKUNG. Da das Spektrum  $\Sigma^k \mathbb{S}$  aus nur einer Zelle besteht, die ab dem  $(-k)$ -ten Schritt sichtbar ist, können wir leicht alle kofinalen Unterspektren angeben: zu jedem  $\ell \geq -k$  existiert ein kofinales Unterspektrum  $\mathbb{U}$  mit  $U_i = \text{pt}$  für  $i < \ell$  und  $U_i = S^{i+k}$  für  $i \geq \ell$ . Jede Abbildung  $f: \Sigma^k \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{E}$  kann auf einem dieser Unterspektren dargestellt werden und wird dann bestimmt durch  $f_\ell: S^{\ell+k} \rightarrow E_\ell$ . Daher gilt

$$\pi_k(\mathbb{E}) = \varinjlim \pi_{k+\ell}(E_\ell) .$$

Indem wir  $\mathbb{E}$  durch das Spektrum  $\mathbb{E} \wedge X$  ersetzen, erhalten wir jetzt eine neue Schreibweise für die allgemeinen Homologiefunktionen aus Satz 5.37:

$$\tilde{E}_k(X) = \varinjlim \pi_{k+\ell}(E_\ell) = \pi_k(\mathbb{E} \wedge X) = [\mathbb{S}, \mathbb{E} \wedge X]_k .$$

Insbesondere haben wir den Kolimes in der Definition der stabilen Kategorie  $\mathcal{SHCW}$  versteckt.

7.9. BEMERKUNG. Um Kohomologietheorien in den Griff zu bekommen, haben wir verschiedene Möglichkeiten. Die Stabilisierungsabbildungen induzieren via Exponentialgesetzabbildungen

$$E_i \xrightarrow{s_i} \Omega E_{i+1} \xrightarrow{\Omega s_{i+1}} \Omega^2 E_{i+2} \longrightarrow \dots$$

Wir können den CW-Approximationssatz 4.32 auf die obigen Räume rechts anwenden und die Abbildungen  $\Omega^k s_{i+k}$  mit Satz 4.24 sukzessiv durch homotope zelluläre Abbildungen ersetzen, um (nach dem Satz 4.36 homotopieäquivalente) CW-Komplexe zu konstruieren:

$$F_i \longrightarrow \varinjlim \Omega^{k-i} E_k.$$

Dieses Verfahren ist leider nur bis auf Homotopien funktoriell, liefert aber zumindest ein  $\omega$ -CW-Spektrum  $\mathbb{F}$  und isomorphe Kohomologiegruppen

$$\tilde{E}^i(X) = [X, F_i].$$

Im Folgenden zeigen wir, dass wir in der stabilen Homotopiekategorie eine viel einfachere Beschreibung von Kohomologiefunktoren zur Verfügung haben.

Um Abbildungen zwischen CW-Spektra induktiv Zelle für Zelle zu konstruieren, brauchen wir eine geeignete Induktionsreihenfolge. Da es  $k$ -Zellen für beliebig kleine (auch negative)  $k \in \mathbb{Z}$  geben kann, zum Beispiel im  $K$ -Theorie-Spektrum  $\mathbb{K}$  aus Satz 6.38, ist eine Induktion über  $k$  nicht mehr möglich. Stattdessen sei  $e_k$  eine Zelle in  $\mathbb{E}$ , die zum ersten Mal in  $E_\ell$  auftritt. Aufgrund der Kompaktheit von  $S^{k+\ell-1}$  ist das Bild der Anklebeabbildung  $\varphi: S^{k+\ell-1} \rightarrow E_\ell$  von  $e_k$  in einem minimalen endlichen Unterkomplex  $Y \subset E_\ell$  enthalten. In allen höheren Schritten  $E_{\ell+j}$  ist die entsprechende Zelle an den Unterkomplex  $S^j Y \subset E_{\ell+j}$  angeklebt, der gleich vielen Zellen enthält. Wir nennen die Anzahl der Zellen von  $Y$  daher die *Höhe* der Zelle  $e_k$ . Sie ist wohldefiniert und invariant unter dem Übergang zu kofinalen Unterspektren. Alle Zellen der Höhe  $\leq n$  bilden ein CW-Unterspektrum  $\mathbb{E}^n$ , und wir erhalten die *Schichtfiltrierung*

$$* = \mathbb{E}^{-1} \subset \mathbb{E}^0 \subset \mathbb{E}^1 \subset \dots \quad \text{mit} \quad \mathbb{E} = \varinjlim \mathbb{E}^n.$$

Ersetzt man also die Dimension einer Zelle durch ihre Höhe, so sieht alles wieder so ähnlich wie bei CW-Komplexen aus. Man beachte aber, dass die einzelnen Schichten  $\mathbb{E}^n$  im Allgemeinen nicht kofinal sind, es sei denn, es gälte  $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}$ .

7.10. LEMMA. *Es sei  $X$  ein CW-Komplex und  $\mathbb{E}$  ein CW-Spektrum. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus abelscher Gruppen*

$$[\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_0 \xrightarrow{\cong} [X, \Omega^\infty \mathbb{E}], \quad \text{mit} \quad \Omega^\infty \mathbb{E} = \varinjlim \Omega^k E_k.$$

Man beachte, dass  $\Omega^\infty \mathbb{E}$  kein CW-Komplex, sondern nur ein topologischer Raum vom Homotopietyp eines CW-Komplexes ist. Im strengen Sinne ist der Funktor  $\Omega^\infty: \mathcal{SCW} \rightarrow kw\mathcal{H}_+$  daher nicht rechtsadjungiert zu  $\mathbb{S}: \mathcal{HCW}_+ \rightarrow \mathcal{SHCW}$ .

BEWEIS. Es sei  $f: \mathbb{S}X \rightarrow \mathbb{E}$  eine Abbildung vom Grad 0, dargestellt durch  $\mathbf{f}$  auf einem Unterspektrum  $U \subset \mathbb{S}X$ . Wir definieren  $g: X \rightarrow \Omega^\infty \mathbb{E}$  durch Induktion über die Höhe der Zellen von  $X$ . Es sei also  $e_k$  eine  $k$ -Zelle von  $X$ , und es sei  $Y \subset X$  der kleinste Unterkomplex, der  $\partial e_k$  enthält. Es existiert  $\ell > 0$ , so dass die zu  $e_k$  gehörige Zelle von  $\mathbb{S}X$  in  $U_\ell$  vorkommt, und es folgt  $S^\ell Y \subset U_\ell$ .

Nach Induktionsannahme haben wir  $g$  bereits auf  $Y$  definiert, so dass

$$g: Y \longrightarrow \Omega^j E_j \longrightarrow \Omega^\infty \mathbb{E}$$

unter der Exponentialabbildung der Abbildung  $f_j: S^j Y \rightarrow E_j$  entspricht. Man beachte, dass wir  $j$  beliebig groß wählen können, ohne  $g$  zu verändern, also  $j = \ell$  annehmen dürfen. Wir erhalten eine

Fortsetzung auf  $e_k$  aufgrund des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} S^\ell X \supset S^\ell Y & \xrightarrow{f_\ell} & E_\ell \\ S^\ell \varphi \uparrow & & \uparrow \\ S^{k+\ell-1} \hookrightarrow & \longrightarrow & S^\ell D_+^k. \end{array}$$

Da eine Homotopie gerade einer Abbildung von  $(SX) \wedge I_+ \cong \mathbb{S}(X \wedge I_+)$  entspricht, bildet die obige Konstruktion Homotopieklassen auf Homotopieklassen ab. Das entsprechende Argument wird uns auch die Homotopieinvarianz der inversen Konstruktion garantieren.

Zur Konstruktion der Umkehrabbildung sei  $g: X \rightarrow \Omega^\infty \mathbb{E}$  gegeben. Wir konstruieren einen Repräsentanten  $\mathbf{f}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E}$  induktiv über die Höhe der Zellen von  $X$ . Es seien also  $e_k$  und  $Y$  wie oben. Nach Induktionsannahme gilt  $S^j Y \subset U_j$  für ein  $j$ , und es sei  $f_j: S^j Y \rightarrow E_j$  eine zelluläre Approximation der zu  $g|_Y: Y \rightarrow \Omega^j E_j$  via Exponentialgesetz adjungierten Abbildung  $S^j Y \rightarrow E_j$ .

Da  $\Omega^\infty \mathbb{E}$  ein Kolimes und  $D^k$  kompakt ist, faktorisiert  $g|_{\bar{e}_k}$  über einen der Räume  $\Omega^\ell E_\ell$  gemäß Übung 4.53. Dann ist  $f_{\ell_j}|_{S^\ell Y} = S^{\ell-j}(f_j|_{S^j Y})$  eine zelluläre Approximation der zu  $g: Y \rightarrow \Omega^\ell E_\ell$  adjungierten Abbildung. Wir können daher  $f_{\ell_j}$  zu einer zellulären Approximation  $S^\ell(Y \cup e_k) \rightarrow E_\ell$  der zu  $g|_{Y \cup e_k}$  adjungierten Abbildung fortsetzen.  $\square$

Mit der obigen Konstruktion finden wir auch einen Isomorphismus

$$[\mathbb{S}X, \Sigma^i \mathbb{E}]_0 = [\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_{-i} \cong [X, \Omega^\infty \Sigma^i \mathbb{E}] = \left[ X, \varinjlim \Omega^{k-i} E_k \right].$$

Das motiviert die folgende Definition, die aufgrund von Satz 6.20 und Bemerkung 7.9 tatsächlich einen Kohomologiefunktor liefert.

7.11. DEFINITION. Es sei  $\mathbb{E}$  ein CW-Spektrum. Dann definieren wir einen allgemeinen Kohomologiefunktor  $\tilde{E}^\bullet: \mathcal{CW}_+ \rightarrow \mathcal{Ab}$  durch

$$\tilde{E}^i(X) = [\mathbb{S}X, \Sigma^i \mathbb{E}]_0 = [\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_{-i}.$$

Wenn der CW-Komplex  $X$  kompakt ist, faktorisiert jede stetige Abbildung  $X \rightarrow \Omega^\infty \Sigma^i \mathbb{E}$  über einen der Räume  $\Omega^{k-i} E_k$ , und wir erhalten

$$\tilde{E}^i(X) = \varinjlim [X, \Omega^{k-i} E_k] = \varinjlim [S^{k-i} X, E_k].$$

Im Allgemeinen gilt das jedoch nicht für beliebige CW-Komplexe. Genau dieses Problem hatten wir bereits bei der Definition von  $K$ -Theorie, siehe den Kommentar nach Satz 6.36.

## 7.b. Eigenschaften der stabilen Homotopiekategorie

In diesem Abschnitt fassen wir weitere wichtige Eigenschaften der Kategorie  $\mathcal{SHCW}$  zusammen.

Ein wichtiges Werkzeug im Beweis von Satz 6.20 war die Puppe-Sequenz für Kofasersequenzen aus Satz 4.39. In Satz 4.44 hatten wir eine Eckmann-Hilton-duale Sequenz für Fasersequenzen formuliert. In der Kategorie  $\mathcal{SHCW}$  müssen wir nicht mehr zwischen Faser- und Kofasersequenzen unterscheiden. Das folgende Resultat ist in gewissem Sinne das homotopietheoretische Pendant zum Schlangenlemma 5.65.

7.12. SATZ. Es sei  $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$  die Inklusion eines Unterspektrums und  $\mathbb{H} = \mathbb{G}/\mathbb{F}$  sei der Quotient. Dann erhalten wir exakte Sequenzen

...

Dieser Abschnitt wird später geschrieben.

### 7.c. Das reduzierte Produkt von Spektren

Wir haben in den Abschnitten 6.c und 6.f bereits Produkte auf der gewöhnlichen Kohomologie und der  $K$ -Theorie kennengelernt. Ziel dieses Kapitels ist es, Produkte so allgemein wie möglich zu beschreiben. Wir beginnen dazu mit einem Kohomologiefunktor  $\tilde{E}^\bullet = [\mathbb{S} \cdot, \mathbb{E}]_{-\bullet}$ . Der Einfachheit halber sei  $\mathbb{E}$  ein  $\omega$ -Spektrum, und  $[\alpha] \in \tilde{E}^k(X)$  und  $[\beta] \in \tilde{E}^\ell(Y)$  seien repräsentiert durch  $\alpha: X \rightarrow E_k$  und  $\beta: Y \rightarrow E_\ell$ . Wir nehmen an, dass es ein externes Produkt auf  $\tilde{E}^\bullet$  analog zum Produkt aus Proposition 6.13 gibt. Wenn es unter Abbildungen von beliebigem Grad natürlich ist, dann folgt

$$[\alpha] \wedge [\beta] = (\alpha^*[\text{id}_{E_k}]) \wedge (\beta^*[\text{id}_{E_\ell}]) = (\alpha \wedge \beta)^*([\text{id}_{E_k}] \wedge [\text{id}_{E_\ell}]) .$$

Zu bestimmen ist somit die Klasse

$$[\text{id}_{E_k}] \wedge [\text{id}_{E_\ell}] \in \tilde{E}^{k+\ell}(E_k \wedge E_\ell) = [E_k \wedge E_\ell, E_{k+\ell}] .$$

Also suchen wir geeignete Abbildungen  $\mu_{k,\ell}: E_k \wedge E_\ell \rightarrow E_{k+\ell}$  für alle  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ . Dann erhalten wir ein externes Produkt  $[a] \wedge [b]$  als Verkettung

$$X \wedge Y \xrightarrow{\alpha \wedge \beta} E_k \wedge E_\ell \xrightarrow{\mu_{k,\ell}} E_{k+\ell} .$$

Sei jetzt  $[b] \in \tilde{E}_{k+\ell}(X \wedge Y)$  repräsentiert durch  $b: S^{k+\ell+m} \rightarrow E_m \wedge X \wedge Y$  und  $[\alpha]$  wie oben, dann definieren das Schräg-Produkt  $[b]/[\alpha] \in \tilde{E}_\ell(Y)$  als Verkettung

$$S^{k+\ell+m} \xrightarrow{b} E_m \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\text{id} \wedge \alpha \wedge \text{id}} E_m \wedge E_k \wedge Y \xrightarrow{\mu_{m,k}} E_{m+k} \wedge Y .$$

Anschließend können wir wie in Definition 6.15 innere Produkte definieren.

Um die in Proposition 6.13 für die Produkte auf der gewöhnlichen Kohomologie gezeigten Eigenschaften allgemein zu erhalten, müssen die Abbildungen  $\mu_{k,\ell}$  die entsprechenden Eigenschaften erfüllen. Am einfachsten lässt sich all das beschreiben, indem man zunächst ein Spektrum  $\mathbb{E} \wedge \mathbb{E}$  konstruiert, und dann eine Abbildung  $\mu: \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  von Spektren. Dadurch wird das externe Produkt stabil im Sinne von Proposition 6.13 (3). Wenn wir (Ko-) Homologie mit anderen Koeffizienten betrachten wollen, benötigen wir entsprechend auch ein reduziertes Produkt  $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ . Dieses Produkt soll bis auf Homotopie in kohärenter Weise assoziativ, unitär und graduiert kommutativ sein. Dazu folgen wir Adams [Ad] und Switzer [Sw] und beginnen mit einem ganzen Sammelsurium sogenannter naiver reduzierter Produkte.

Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst nur Spektren  $\mathbb{E} = (E_\bullet, s_\bullet)$  und  $\mathbb{F} = (F_\bullet, t_\bullet)$  mit  $E_n = F_n = \text{pt}$  für alle  $n < 0$ . Wir konstruieren ein ebensolches Spektrum  $\mathbb{G}$ , so dass  $G_n = E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)}$  mit Funktionen  $k, \ell: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und  $k(n) + \ell(n) = n$ . Um Stabilisierungsabbildungen  $u_n$  definieren zu können, erlauben wir für jedes  $n$  nur zwei Fälle.

(1) Es gilt  $k(n+1) = k(n) + 1$  und  $\ell(n+1) = \ell(n)$ , und wir setzen

$$u(n) = s_{k(n)} \wedge \text{id}_{F_{\ell(n)}}: S(E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)}) \cong (SE_{k(n)}) \wedge F_{\ell(n)} \longrightarrow E_{k(n)+1} \wedge F_{\ell(n)} .$$

(2) Es gilt  $k(n+1) = k(n)$  und  $\ell(n+1) = \ell(n) + 1$ , und wir setzen

$$u(n) = \text{id}_{E_{k(n)}} \wedge ((-1)^{k(n)} t_{\ell(n)}): S(E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)}) \cong E_{k(n)} \wedge (SF_{\ell(n)}) \longrightarrow E_{k(n)} \wedge F_{\ell(n)+1} .$$

Hierbei nutzen wir aus, dass  $SX = S^1 \wedge X$  und  $X \wedge S^1$  natürlich homöomorph sind. Das Vorzeichen in (2) entspricht dem in Proposition 6.13 (3). Wir realisieren es, indem wir  $S^n$  künftig als Einpunktkompaktifizierung von  $\mathbb{R}^n$  betrachten, durch

$$-t_\ell(r, y) = t_\ell(-r, y) ,$$

so dass  $-t_\ell$  zu  $t_\ell$  in  $[SF_\ell, F_{\ell+1}]$  invers ist. Generell stellen wir uns auf den Standpunkt, dass das reduzierte Produkt von Räumen (bis auf natürliche Homöomorphismen) assoziativ und kommutativ ist, und versehen nur Abbildungen mit Vorzeichen.



Die Abbildung  $(k, \ell): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  beschreibt also einen Zickzack-Pfad nach rechts oben. Diese Zickzack-Pfade kodieren wir wie folgt. Es sei  $B \subset \mathbb{N}$  eine Teilmenge, dann definieren wir  $\varphi_A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  durch

$$\varphi_A(n) = \#\{k \in A \mid k < n\}.$$

Beispielsweise ist  $\varphi_{\mathbb{N}} = \text{id}_{\mathbb{N}}$  und  $\varphi_{\emptyset} \equiv 0$ . Falls  $A = B \dot{\cup} C \subset \mathbb{N}$ , erhalten wir

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_C,$$

und  $\varphi_{B \cup C}(n) \mapsto (\varphi_B(n), \varphi_C(n))$  liefert einen Zickzack-Pfad wie oben falls  $A$  unendlich ist.

7.13. DEFINITION. Es sei  $A = B \dot{\cup} C \subset \mathbb{N}$  eine unendliche Teilmenge, dann definieren wir ein *naives reduziertes Produkt*  $\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} = (G_k, u_k)_k$  durch

$$\begin{aligned} G_{\varphi_A(n)} &= E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)}, \\ u_{\varphi_A(n)} &= \begin{cases} s_{\varphi_B(n)} \wedge \text{id} & \text{falls } \varphi_B(n+1) = \varphi_B(n) + 1, \text{ und} \\ \text{id} \wedge ((-1)^{\varphi_B(n)} t_{\varphi_C(n)}) & \text{falls } \varphi_C(n+1) = \varphi_C(n) + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Falls  $A$  endlich ist, liefert die obige Definition immer noch den Anfang eines Spektrums; auch diesen Fall werden wir betrachten.

7.14. BEISPIEL. Es sei  $\mathbb{E}$  ein Spektrum und  $X$  ein Raum. Dann gilt

$$\mathbb{E} \wedge_{\mathbb{N}, \emptyset} \mathbb{S}X = \mathbb{E} \wedge X \quad (1)$$

wie in Beispiel 7.2 (2), hingegen ist

$$\mathbb{E} \wedge_{\emptyset, \mathbb{N}} \mathbb{S}X = E_0 \wedge \mathbb{S}X. \quad (2)$$

7.15. PROPOSITION. *Es seien  $A = B \dot{\cup} C \subset \mathbb{N}$ , und  $B$  und  $C$  seien unendlich. Dann ist das naive Produkt  $\wedge_{B,C}: \mathcal{SCW}_0 \times \mathcal{SCW}_0 \rightarrow \mathcal{SCW}_0$  nat\u00fcrlich.*

BEWEIS. Wenn  $B$  unendlich ist und  $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$  kofinal, dann ist  $\mathbb{U} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \subset \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}$  kofinal. Denn sei  $c$  eine Zelle von  $\mathbb{E}$  mit  $c_k \in U_k$  f\u00fcr ein  $k$ . Da  $B$  unendlich ist, gibt es ein  $n_0$ , so dass  $B$  mindestens  $k$  Elemente kleiner  $n_0$  enth\u00e4lt, somit taucht  $c$  in  $U_{\varphi_B(n)}$  f\u00fcr alle  $n \geq n_0$  auf.

Wenn  $B$  und  $C$  unendlich sind, k\u00f6nnen wir zu  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{P}$  und  $g: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Q}$  daher eine Abbildung

$$f \wedge_{B,C} g: \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{P} \wedge_{B,C} \mathbb{Q}$$

definieren. Es gilt  $\text{id}_{\mathbb{E}} \wedge_{B,C} \text{id}_{\mathbb{F}} = \text{id}_{\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}}$ , und das naive reduzierte Produkt ist ebenfalls mit der Verkettung von Abbildungen vertr\u00e4glich.  $\square$

Wenn  $B$  hingegen endlich ist, etwa  $\#B = k$ , und  $c$  eine Zelle, die in  $E_k$  bereits existiert, in  $U_k$  jedoch noch nicht, dann fehlt diese Zelle in  $\mathbb{U} \wedge_{B,C} \mathbb{P}$ . Also ist  $\mathbb{U} \wedge_{B,C} \mathbb{P}$  nicht immer kofinal in  $\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{P}$ .

Abbildungen vom Grad ungleich 0 k\u00f6nnen wir noch nicht betrachten, denn seien  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{P}$  und  $g: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Q}$  vom Grad  $k$  beziehungsweise  $\ell$ , dann erhielten wir

$$f_{\varphi_B(n)} \wedge g_{\varphi_C(n)}: E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)} \longrightarrow P_{\varphi_B(n)+k} \wedge Q_{\varphi_C(n)+\ell},$$

und die R\u00e4ume rechts geh\u00f6ren unter Umst\u00e4nden nicht zum Spektrum  $\mathbb{P} \wedge_{B,C} \mathbb{Q}$ .

Wir fassen jetzt alle naiven Produkte in einem gro\u00dfen Spektrum zusammen. Die Konstruktion \u00e4hneln dem Teleskop aus dem Beweis von Lemma 5.20, allerdings verwenden wir diesmal einen zweidimensionalen „Basisraum“. Zur Motivation: als  $n$ -ter Raum von  $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$  kommen alle Smash-Produkte  $E_k \wedge F_\ell$  mit  $k+\ell$  in Frage. Die Stabilisierungsabbildungen stellen zwischen diesen R\u00e4umen

Beziehungen her. Wir können hier auch wieder Spektren mit  $E_k \neq \text{pt}$  für  $k < 0$  zulassen.

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots & \longrightarrow & E_{k-1} \wedge F_{\ell+1} & & \\
& & \uparrow \text{id} \wedge (-1)^{k-1} t_\ell & & \\
\cdots & \longrightarrow & E_{k-1} \wedge F_\ell \wedge S^1 & \xrightarrow{s_{k-1} \wedge \text{id}} & E_k \wedge F_\ell \\
& & \uparrow \text{id} \wedge (-1)^{k-1} t_{\ell-1} & & \uparrow \text{id} \wedge (-1)^k t_{\ell-1} \\
\cdots & \longrightarrow & E_{k-1} \wedge F_{\ell-1} \wedge S^2 & \xrightarrow{s_{k-1} \wedge \text{id}} & E_k \wedge F_{\ell-1} \wedge S^1 & \xrightarrow{s_k \wedge \text{id}} & E_{k+1} \wedge F_{\ell-1} \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Dabei achten wir zunächst einmal nicht auf die genaue Reihenfolge der Faktoren in den einzelnen reduzierten Produkten. Mit  $-t_\ell: F_\ell \wedge S^1 \rightarrow F_{\ell+1}$  bezeichnen wir wieder die Abbildung  $y \wedge t \mapsto t_\ell(y \wedge (1-t))$ .

Wir können sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung Teleskope bilden, die sich an den Ecken des Diagramms überschneiden. Dazu betrachten wir

$$\left( \bigvee_{k+\ell \leq n} (\{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell}) \vee \bigvee_{k+\ell \leq n-1} ([k, k+1]_+ \wedge \{\ell\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell}) \vee \bigvee_{k+\ell \leq n-1} (\{k\}_+ \wedge [\ell, \ell+1]_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell}) \right) / \sim,$$

dabei verkleben wir an den unteren Enden der Intervalle mit der Identität. Mit  $S^{n-k-\ell} = S^1 \wedge S^{n-k-\ell-1}$  verkleben wir an den oberen Enden via

$$\begin{aligned}
[k, k+1]_+ \wedge \{\ell\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-1} &\ni (k+1, \ell, x, y, u, z) \\
&\sim (k+1, \ell, s(x, u), y, z) \in \{(k+1, \ell)\}_+ \wedge E_{k+1} \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell-1} \quad (7.1)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\{k\}_+ \wedge [\ell, \ell+1]_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-1} &\ni (k, \ell+1, x, y, u, z) \\
&\sim (k, \ell+1, x, t(y, (-1)^k u), z) \in \{(k, \ell+1)\}_+ \wedge E_k \wedge F_{\ell+1} \wedge S^{n-k-\ell-1}. \quad (7.2)
\end{aligned}$$

Dadurch entstehen über den Quadraten  $(k, k+1) \times (\ell, \ell+1)$  „Löcher“, die wir als nächstes stopfen wollen. Wir verschieben zunächst den Punkt  $(k, \ell, x, y, u, v, z) \in \{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-2}$  mit  $k+\ell \leq n-2$  zunächst nach oben, dann nach rechts, und erhalten

$$(k, \ell, x, y, u, v, z) \mapsto (k, \ell+1, x, t(y, (-1)^k u), v, z) \mapsto (k+1, \ell+1, s(x, v), t(y, (-1)^k u), z).$$

Umgekehrt verschieben wir  $(k, \ell, x, y, v, -u, z) \in \{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^1 \wedge S^1 \wedge S^{n-k-\ell-2}$  zunächst nach rechts, dann nach oben, und erhalten wieder

$$(k, \ell, x, y, v, -u, z) \mapsto (k+1, \ell, s(x, v), y, -u, z) \mapsto (k+1, \ell+1, s(x, v), t(y, (-1)^k u), z).$$

Wir können also nicht ganz naiv den Raum  $[k, k+1]_+ \wedge [\ell, \ell+1]_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell}$  einkleben, sondern müssen die Koordinaten  $(u, v)$  von  $S^2 = S^1 \wedge S^1$  beim Einkleben entlang  $\partial([k, k+1] \times [\ell, \ell+1])$  um  $\frac{\pi}{2}$  rotieren lassen. Dazu ersetzen wir  $[k, k+1]_+ \wedge [\ell, \ell+1]_+ \wedge S^2$  durch den Thom-Raum  $MV$  eines festen zweidimensionalen reellen Vektorbündels  $V \rightarrow I^2$ . Welches wir wählen, ist egal, allerdings wählen wir über jedem Quadrat das gleiche. An dieser Stelle zeigt sich die Bedeutung der Vorzeichen in Definition 7.13 und (7.1), (7.2) — ohne sie würde sich beim Umlaufen um  $\partial([k, k+1] \times [\ell, \ell+1])$  die Orientierung der  $S^2$  ändern, und wir könnten nichts passendes einkleben.

Um die Notation zu vereinfachen, sei  $e_{k,\ell}$  eine der Zellen  $\{(k,\ell)\}, [k, k+1] \times \{\ell\}, \{k\} \times [\ell, \ell+1]$  oder  $[k+1] \times [\ell+1]$  mit unterer linker Ecke  $(k,\ell)$ , und  $d$  sei ihre Dimension. Wir betrachten also die Räume

$$P_n = \left( \bigvee_{\substack{e_{k,\ell} \\ k+\ell+d \leq n}} MV \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-k-\ell-d} \right) / \sim, \quad (7.3)$$

wobei  $V \rightarrow e_{k,\ell}$  jetzt ein  $d$ -dimensionales Vektorbündel sei. Als Stabilisierungsabbildungen wählen wir die Inklusionen  $P_n \wedge S^1 \hookrightarrow P_{n+1}$ , und haben ein Spektrum  $\mathbb{P} = \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$  definiert.

7.16. PROPOSITION. *Seien  $B, C \subset \mathbb{N}$  disjunkte Teilmengen. Dann gibt es in den folgenden drei Fällen natürliche  $\mathit{SHCW}_0$ -Isomorphismen  $\eta_{B,C}: \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ .*

- (1) Die Mengen  $B, C$  sind beide unendlich.
- (2) Die Menge  $B$  ist endlich,  $C$  ist unendlich, und  $SE_k = E_{k+1}$  für alle  $k \geq \#B$ .
- (3) Die Menge  $B$  ist unendlich,  $C$  ist endlich, und  $SF_\ell \cong F_{\ell+1}$  für alle  $\ell \geq \#C$ .

BEWEIS. Es sei  $\mathbb{G}$  ein Spektrum und  $\mathbb{T}\mathbb{G}$  das Teleskop  $\mathbb{T}\mathbb{G}$  mit

$$T\mathbb{G}_n = G_n \times \{n\} \vee \bigvee_{m=-\infty}^{n-1} S^{n-m} G_m \wedge [m, m+1]_+ / \sim.$$

Das Teleskop ist funktoriell, denn sei  $g: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{P}$  gegeben und auf einem kofinalen Unterspektrum  $\mathbb{U} \subset \mathbb{G}$  strikt. Wir konstruieren  $Tg$  auf einem kofinalen Unterspektrum  $\mathbb{V} \subset \mathbb{T}\mathbb{G}$  Zelle für Zelle durch Induktion über die Schichtfiltrierung. Sei etwa  $c$  eine Zelle, die in  $E_k$  und in  $U_\ell$  jeweils erstmalig auftritt, dann ist sie an Zellen angeklebt, die in  $E_k$  und  $U_\ell$  bereits vorhanden sind. Dann nehmen wir die Zelle  $c$  über  $[k, n]$  für alle  $n \geq \ell$  zu  $V_n \subset T\mathbb{G}_n$  hinzu. Da  $g_n$  auf  $c$  für alle  $n \geq \ell$  definiert ist, können wir  $Tg: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{T}\mathbb{P}$  definieren.

Es bezeichne  $\pi_n: T\mathbb{G}_n \rightarrow G_n \times \{n\}$  die offensichtliche Projektion; sie ist eine Deformationsretraktion vermöge einer Teleskopomotopie wie im Beweis von Satz 1.93, und liefert eine strikte Homotopieäquivalenz  $\pi: \mathbb{T}\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ . Wir konstruieren eine Homotopieinverse  $f: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{T}\mathbb{G}$ . Sei dazu  $c$  eine  $j$ -Zelle, die erstmals in  $G_n$  auftritt, mit charakteristischer Abbildung  $\Phi: S^{n+j-1} \rightarrow G_n$ . Alle Zellen im Rand von  $c$  trete ebenfalls spätestens in  $G_n$  auf, somit ist  $f \circ \varphi: S^{n+j-1} \rightarrow T\mathbb{G}_n$  bereits definiert, und wir nehmen an, dass  $\pi_n \circ f \circ \varphi$  zur Anklebeabbildung  $\varphi: S^{n+j-1} \rightarrow G_n \times \{n\}$  homotop ist. Da  $(D^{n+j}, S^{n+j-1})$  eine Kofaserung ist, können wir diese Homotopie zu einer Homotopie von  $\Phi$  fortsetzen, und erhalten so eine Fortsetzung von  $f$  auf  $c$ . Die so konstruierte Abbildung  $f$  ist dann sogar eine strikte Homotopieäquivalenz. Mit einem ähnlichen Argument sieht man, dass für alle  $g: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{P}$  das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} & \xrightarrow{g} & \mathbb{P} \\ f \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathbb{T}\mathbb{G} & \xrightarrow{Tg} & \mathbb{T}\mathbb{P} \end{array}.$$

Als nächstes definieren wir  $\gamma: \mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ . Es beschreibe  $(r(t), s(t)) \in \mathbb{R}^2$  den Zickzackpfad mit  $r(\varphi_{B \cup C}(n)) = \varphi_B(n)$  und  $s(\varphi_{B \cup C}(n)) = \varphi_C(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $(r, s)|_{[m, m+1]}$  für alle  $m$  linear sei. Es sei  $k = \varphi_B(m)$  und  $\ell = \varphi_C(m)$  mit  $k + \ell \leq n$ . Dann definieren wir  $\gamma_n$  auf

$$[k + \ell, k + \ell + 1]_+ \wedge E_k \wedge F_\ell \wedge S^{n-m} \subset T\mathbb{G}_n$$

für  $t \in [k + \ell, k + \ell + 1]$ ,  $x \in E_k$ ,  $y \in F_\ell$ ,  $z \in S^{n-k-\ell}$  durch

$$\gamma_n(t, x, y, z) = (r(t), s(t), x, y, z).$$

Diese stückweisen Definitionen legen  $\gamma_n$  stetig auf  $TG_n$  fest, und sind kompatibel mit Stabilisierung. Wir erhalten daher sogar eine strikte Abbildung  $\gamma: \mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ . Mit dem gleichen Argument wie in Proposition 7.15 ist diese Konstruktion unter den Bedingungen (1), (2) oder (3) natürlich.

Um zu zeigen, dass  $\eta_{B,C} = \gamma \circ f: \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$  eine stabile Homotopieäquivalenz ist, betrachten wir zunächst Bedingung (1). Wir konstruieren ein Unterspektrum  $\mathbb{U} \subset \mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ , so dass  $U_{k+\ell}$  für  $k = \varphi_B(m)$ ,  $\ell = \varphi_C(n)$  wie oben aus allen Zellen oberhalb von  $(-\infty, k] \times (-\infty, \ell]$  besteht. Aufgrund der Bedingung (1) ist dieses Unterspektrum kofinal in  $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$ . Der Raum  $U_{k+\ell}$  enthält  $\{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell$  als Deformationsretrakt. Ähnlich wie oben erhalten wir als Homotopieinverse von  $\eta_{B,C}$  eine strikte Abbildung  $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}$ .

Im Fall (2) enthalte  $U_{k+\ell}$  stattdessen alle Zellen oberhalb von  $\mathbb{R} \times (-\infty, \ell]$ , falls  $k = \varphi_B(m) \geq \#B$ . Dann ist  $\mathbb{U}$  wieder kofinal, und  $U_{k+\ell}$  enthält  $\{(k, \ell)\}_+ \wedge E_k \wedge F_\ell$  als Deformationsretrakt, da in allen  $E_r$  mit  $r \geq k$  keine neuen Zellen hinzukommen. Der Fall (3) funktioniert analog.  $\square$

7.17. BEMERKUNG. Aufgrund der Natürlichkeit von  $\pi$  und  $\gamma$  im vorangegangenen Beweis kommutiert für disjunkte Teilmengen  $B, C, D \subset \mathbb{N}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{T}((\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G}) & \xrightarrow{\gamma} & (\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \\
\pi \wedge \text{id} \uparrow & & T(\pi \wedge \text{id}) \uparrow & & \pi \wedge \text{id} \uparrow \\
(\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{T}((\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G}) & \xrightarrow{\gamma} & (\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge \mathbb{G} \\
\gamma \wedge \text{id} \downarrow & & T(\gamma \wedge \text{id}) \downarrow & & \gamma \wedge \text{id} \downarrow \\
(\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{T}((\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G}) & \xrightarrow{\gamma} & (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} .
\end{array}$$

Wir werden später benutzen, dass dann das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xrightarrow{\eta_{B \cup C, D}} & (\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \\
\eta_{B,C} \wedge \text{id} \downarrow & & \downarrow \eta_{B,C} \wedge \text{id} \\
(\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xrightarrow{\eta_{B \cup C, D}} & (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} .
\end{array}$$

Als nächstes erinnern wir uns an die Struktur einer monoidalen Kategorie aus Definition 4.9. Da wir hier zusätzlich eine Symmetrie zwischen  $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$  und  $\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}$  einführen wollen, benötigen wir natürliche  $\mathcal{SHCW}$ -Isomorphismen

$$\begin{array}{l}
\alpha_{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}}: (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) , \\
\tau_{\mathbb{E}, \mathbb{F}}: \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} , \quad \lambda_{\mathbb{E}}: \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \quad \text{und} \quad \rho_{\mathbb{E}}: \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{E} ,
\end{array}$$

die insgesamt acht Relationen zu erfüllen haben. Für die naiven reduzierten Produkte gibt es analoge Isomorphismen in  $\mathcal{SCW}$ , die sogar strikt sind. Wir werden daher versuchen, die obigen  $\mathcal{SHCW}$ -Isomorphismen so zu konstruieren, dass sie über die Abbildungen aus Proposition 7.16 mit den entsprechenden Isomorphismen naiver reduzierter Produkte verträglich sind.

Wir erinnern uns an Beispiel 7.14 (1) und wählen für  $\lambda_{\mathbb{E}}$  und  $\rho_{\mathbb{E}}$  Homotopieinverse der Abbildungen

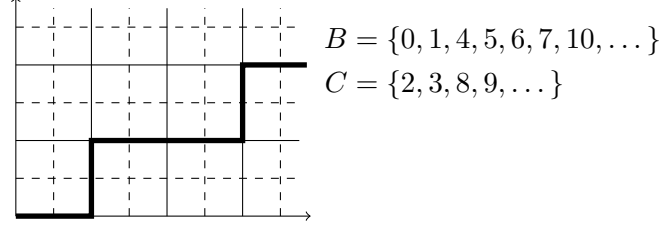
$$\eta_{\emptyset, \mathbb{N}}: \mathbb{E} = \mathbb{S} \wedge_{\emptyset, \mathbb{N}} \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \quad \text{und} \quad \eta_{\mathbb{N}, \emptyset}: \mathbb{E} = \mathbb{E} \wedge_{\mathbb{N}, \emptyset} \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} .$$

Zur Konstruktion von  $\tau_{\mathbb{E}, \mathbb{F}}$  überlegen wir uns zunächst, dass das reduzierte Produkt von Räumen nach Bemerkung 3.74 (2) kommutativ ist. Daher bestehen die naiven Produkte  $\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}$  und  $\mathbb{F} \wedge_{B,C} \mathbb{E}$  bis auf einen natürlichen Homöomorphismus aus den gleichen Räumen  $E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)}$ . Allerdings passen die Stabilisierungsabbildungen nicht unbedingt zusammen. Wenn etwa  $\varphi_B(n+1) = \varphi_B(n) +$

1, betrachten wir

$$\begin{aligned} s_{\varphi_B(n)} \wedge \text{id}: SE_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)} &\longrightarrow E_{\varphi_B(n)+1} \wedge F_{\varphi_C(n)} \\ \text{und } \text{id} \wedge ((-1)^{\varphi_C(n)} s_{\varphi_B(n)}): F_{\varphi_C(n)} \wedge SE_{\varphi_B(n)} &\longrightarrow F_{\varphi_C(n)} \wedge E_{\varphi_B(n)+1}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Wir müssen also vermeiden, dass  $\varphi_C(n)$  ungerade ist, wenn  $\varphi_B(n+1) = \varphi_B(n) + 1$ .



Genauso vermeiden wir, dass  $\varphi_B(n)$  ungerade ist, wenn  $\varphi_C(n+1) = \varphi_C(n) + 1$ , indem wir fordern, dass  $B$  und  $C$  von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen  $2k, 2k+1 \in \mathbb{N}$  je entweder beide oder keines enthalten, denn dann verläuft unser Zickzackpfad immer je zwei Schritte in die gleiche Richtung. Unter dieser Bedingung erhalten wir einen strikten Isomorphismus  $\tau_{B,C}: \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \wedge_{C,B} \mathbb{E}$ .

7.18. PROPOSITION. *Zu je zwei Spektren  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{F}$  gibt es ein Spektrum  $\mathbb{Q}$  und stabile Homotopieäquivalenzen  $\iota_0: \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Q}$  und  $\iota_1: \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{Q}$  vom Grad 0, so dass für alle disjunkten Teilmengen  $B, C \subset \mathbb{N}$ , von denen jede für jedes  $k \in \mathbb{N}$  jeweils entweder alle vier Zahlen  $4k, 4k+1, 4k+2$  und  $4k+3$  enthält oder keine von ihnen, das folgende Diagramm bis auf stabile Homotopie kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \\ \downarrow T\tau_{B,C} & & \searrow \iota_0 \\ \mathbb{T}(\mathbb{F} \wedge_{C,B} \mathbb{E}) & \longrightarrow & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \\ & & \nearrow \iota_1 \\ & & \mathbb{Q} \end{array}$$

Dann können wir  $\tau_{\mathbb{E},\mathbb{F}} = \iota_1^{-1} \circ \iota_0 \in [\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}, \mathbb{F} \wedge \mathbb{E}]_0$  definieren.

BEWEIS. Wir konstruieren  $\mathbb{Q}$  als Zylinder von zweidimensionalen Teleskopen, betrachten in  $\mathbb{Q}_n$  also Zellen über  $[k, k+1] \times [\ell, \ell+1] \times I$  mit  $k+\ell \leq n-2$ . Für  $r=0 \in I$  fügen wir eine Kopie von  $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$  ein, und für  $r=1 \in I$  eine Kopie von  $\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}$ , bei der die Rollen von  $k$  und  $\ell$  vertauscht sind. Aufgrund der Vorzeichenwahlen in (7.1), (7.2) können wir für  $2i+2j \leq n-2$  Zylinder der Form

$$[2i, 2i+2]_+ \wedge \{2j\}_+ \wedge I_+ \wedge E_{2i} \wedge F_{2j} \wedge S^{n-2i-2j} \quad \text{und} \quad \{2i\}_+ \wedge [2j, 2j+2]_+ \wedge I_+ \wedge E_{2i} \wedge F_{2j} \wedge S^{n-2i-2j}$$

einkleben, wobei  $E_{2i}$  und  $F_{2j}$  bei  $r=1$  formal die Plätze tauschen.

Über dem Rand des Quaders  $e = [2i, 2i+2] \times [2j, 2j+2] \times I$  für  $2i+2j \leq n-4$  erhalten wir dadurch den Raum

$$MV' \wedge E_{2i} \wedge F_{2j} \wedge S^{n-2i-2j-4},$$

dabei ist  $MV'$  der Thom-Raum eines vierdimensionalen Vektorbündels  $V' \rightarrow \partial e \cong S^2$ , klassifiziert durch  $\alpha \in \pi_2(BSO(4)) \cong \pi_1(SO(4)) \cong \mathbb{Z}/2$ , siehe Satz 3.100 und Bemerkung 6.40 (3). Diese Bündel hängt nicht von  $n, i$  und  $j$  ab, sondern nur von der obigen Wahl von  $V \rightarrow I^2$ .

Wenn wir zu größeren Quadern  $e' = [4i, 4i+4] \times [4j, 4j+4] \times I$  für  $4i+4j \leq n-8$  übergehen, wird das analog konstruierte achtdimensionale Vektorbündel  $V'' \rightarrow \partial e'$  durch  $4\alpha = 0$  klassifiziert, lässt sich also auf  $e'$  fortsetzen. Wir fixieren eine solche Fortsetzung  $W \rightarrow e$  und kleben den Raum

$$MW \wedge E_{4i} \wedge F_{4j} \wedge S^{n-4i-4j-8}$$

entsprechend ein.

Mit Lemma 6.29 erhalten wir die gesuchten Homotopieäquivalenzen  $\iota_0$  und  $\iota_1$ , definiert jeweils auf dem kofinalen Unterspektrum von  $\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}$  beziehungsweise  $\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}$ , das jeweils nur aus Quadraten  $[4i, 4i + 4] \times [4j, 4j + 1]$  und den Räumen  $E_{4i}$  und  $F_{4j}$  aufgebaut wurde. Aufgrund unserer Bedingung an die Mengen  $B$  und  $C$  reicht das, um die horizontalen Pfeile im obigen Diagramm zu erhalten. Da wir über den Intervallen  $[4i, 4i + 4] \times \{4j\}$  und  $\{4i\} \times [4j, 4j + 4]$  triviale Zylinder gebildet haben, kommutiert das obige Diagramm.  $\square$

Es seien  $B, C, D \subset \mathbb{N}$  paarweise disjunkte Teilmengen. Das reduzierte Produkt von Räumen ist nach Bemerkung 3.74 (2) bis auf einen natürlichen Homöomorphismus assoziativ. Wir erhalten Abbildungen

$$\alpha_{B,C,D}: (E_{\varphi_B(n)} \wedge F_{\varphi_C(n)}) \wedge G_{\varphi_D(n)} \cong E_{\varphi_B(n)} \wedge (F_{\varphi_C(n)} \wedge G_{\varphi_D(n)}).$$

Nach Konstruktion der naiven reduzierten Produkte liefern diese zusammen einen strikten Isomorphismus der Spektren  $(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D}$  und  $\mathbb{E} \wedge_{B, C \cup D} (\mathbb{F} \wedge_{C, D})$ , dazu überprüft man Verträglichkeit mit den Vorzeichen in (7.1) und (7.2).

**7.19. PROPOSITION.** *Für alle Spektren  $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$  existiert ein Spektrum  $\mathbb{P}$  und Homotopieäquivalenzen  $\iota_0: \mathbb{P} \rightarrow (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}$ , und  $\iota_1: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G})$ , so dass für alle Tripel paarweise disjunkter Teilmengen  $B, C, D \subset \mathbb{N}$  mit  $\#(B \cup C) = \#(C \cup D) = \infty$  das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:*

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} & \xleftarrow{\pi \wedge \text{id}} & (\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge \mathbb{G} & \xrightarrow{\gamma \wedge \text{id}} & (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} \\
\eta_{B \cup C, D} \uparrow & & \uparrow \gamma_0 & & \uparrow \sim \iota_0 \\
(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G} & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{T}((\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G}) & & \mathbb{P} \\
\alpha_{B,C,D} \downarrow & & T\alpha_{B,C,D} \downarrow & \xrightarrow{\kappa_0} & \downarrow \sim \iota_1 \\
\mathbb{E} \wedge_{B, C \cup D} (\mathbb{F} \wedge_{C, D} \mathbb{G}) & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B, C \cup D} (\mathbb{F} \wedge_{C, D} \mathbb{G})) & \xrightarrow{\kappa_1} & \mathbb{P} \\
\eta_{B, C \cup D} \downarrow & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \sim \iota_1 \\
\mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge_{C, D} \mathbb{G}) & \xleftarrow{\text{id} \wedge \pi} & \mathbb{E} \wedge (\mathbb{T}(\mathbb{F} \wedge_{C, D} \mathbb{G})) & \xrightarrow{\text{id} \wedge \gamma} & \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G})
\end{array}$$

**BEWEIS.** Das Produkt  $\mathbb{K} = (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}$  besteht aus vierdimensionalen Teleskopen der Form

$$\begin{aligned}
K_n &= \left( \bigvee_{e_{i,j}, e_{h,k}} MW \wedge (MV \wedge E_i \wedge F_j \wedge S^{h-i-j-d}) \wedge G_k \wedge S^{n-h-k-\delta} \right) / \sim \\
&\cong \left( \bigvee_{e_{i,j}, e_{h,k}} M(V \boxplus W) \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k-d-\delta} \right) / \sim. \quad (7.5)
\end{aligned}$$

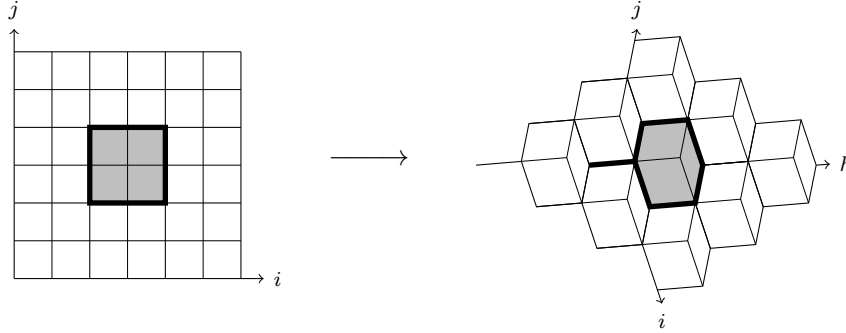
Hierbei sind  $e_{i,j}, e_{h,k}$  wieder Zellen der Dimensionen  $d, \delta \leq 2$  mit unterer linker Ecke  $(i, j)$  beziehungsweise  $(h, k)$ , wobei  $i + j + d \leq h \leq n - k - \delta$ . Außerdem sind  $V \rightarrow e_{i,j}$  und  $W \rightarrow e_{h,k}$  wieder reelle Vektorbündel vom Rang  $d$  beziehungsweise  $\delta$ . Verklebt sind die einzelnen Blöcke wie in (7.3).

Wir konstruieren  $\mathbb{P}'$  aus dreidimensionalen Teleskopen, indem wir die überflüssige Richtung  $h$  eliminieren. Dazu betrachten wir den Komplex  $C_n^3 \subset \mathbb{R}^3$  bestehend aus Würfeln der Kantenlänge 1 mit ganzzahligen Koordinaten und alle ihren Seiten, so dass die Summe aller Koordinaten  $\leq n$  bleibt. Wir definieren eine Abbildung  $\vartheta = \varphi \otimes \text{id}: C_n^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , die die Faktoren in Richtung von  $k$

unverändert lässt, so dass

$$\begin{aligned} \text{im}(\varphi|_{\{(i,j)\}}) &= \{(i,j,i+j)\}, \\ \text{im}(\varphi|_{[i,i+1] \times \{j\}}) &= \{(i,j)\} \times [i+j,i+j+1] \cup [i,i+1] \times \{(j,i+j+1)\}, \\ \text{im}(\varphi|_{\{i\} \times [j,j+1]}) &= \{(i,j)\} \times [i+j,i+j+1] \cup \{i\} \times [j,j+1] \times \{i+j+1\}, \\ \text{im}(\varphi|_{[i,i+1] \times [j,j+1]}) &= \{(i,j)\} \times [i+j,i+j+1] \cup [i,i+1] \times \{j\} \times [i+j+1,i+j+2] \\ &\quad \cup \{i\} \times [j,j+1] \times [i+j+1,i+j+2] \cup [i,i+1] \times [j,j+1] \times \{i+j+2\}. \end{aligned}$$

Hierbei legt  $\varphi$  auf den Rändern jeder Zelle die Abbildung im Inneren bis auf Homotopie eindeutig fest, und wir können vereinbaren, dass  $\varphi$  auf den Zellen halber Kantenlänge affin ist.



Das Bild von  $\vartheta$  enthält nur Zellen der Dimension  $\leq 3$  und ist ein Deformationsretrakt der  $K_n$  zugrunde liegenden Teilmenge  $C_n^4 \subset \mathbb{R}^4$ . Wir vergessen Basispunkte für den Moment, ersetzen die reduzierten Produkte in der Konstruktion von  $K_n$  durch kartesische Produkte und stellen uns den so erhaltenen Raum als „Bündel“  $\bar{K}_n \rightarrow C_n^4$  vor. Dann ist die Einschränkung dieses Bündels auf im  $\vartheta$  ein Deformationsretrakt, denn wegen Lemma 6.29 sind die Vektorbündel  $V$  und  $W$  auf jeder Zelle trivial. Es bezeichne  $\bar{P}_n = \vartheta^* \bar{K}_n$  den Rückzug dieses Bündels nach  $C_n^3$  und  $\bar{\iota}_0: \bar{P}_n \rightarrow K_n$  die zugehörige Einbettung. Da  $C_n^3$  zusammenziehbar ist, ist auch  $P_n = \bar{P}_n/C_n^3$  homotopieäquivalent zu  $K_n$ , und  $\iota_0: P_n \rightarrow K_n$  ist eine Homotopieäquivalenz.

Wir betrachten die Struktur des Raumes  $P_n$ , dabei bezeichne  $e_{i,j,k} \cong I^d$  eine Zelle der Dimension  $0 \leq d \leq 3$  mit linker unterer Ecke  $(i,j,k)$ .

- (0) Über den Null-Zellen haben wir den Raum  $E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k}$ .
- (1) Über den Eins-Zellen betrachten wir die Räume  $I_+ \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k}$ , die wir wie in (7.1), (7.2) mit den korrekten Vorzeichen an die obigen Räume ankleben.
- (2) Über den Zwei-Zellen betrachten wir  $MV \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k-2}$ . Dabei entspricht das Bündel  $V \rightarrow e_{i,j,k}$  entweder dem Bündel  $V \rightarrow I^2$  in (7.5), falls  $e_{i,j,k}$  in  $i$ - $j$ -Richtung liegt, oder dem isomorphen Bündel  $W \rightarrow I^2$  in den anderen Fällen.
- (3) Über jeder Drei-Zelle betrachten wir  $MV \wedge E_i \wedge F_j \wedge G_k \wedge S^{n-i-j-k-3}$ , dabei ist  $V \rightarrow I^3$  jetzt ein reelles Bündel vom Rang 3. Da  $\pi_3(BSO(3)) = \pi_2(SO(3)) = 0$ , hängt dieses Bündel bis auf Isomorphie nur von seiner Einschränkung auf  $\partial I^3$  ab.

Wenn wir anstelle  $\mathbb{K} = (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}$  das Spektrum  $\mathbb{L} = \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G})$  betrachten, erhalten wir einen genauso konstruierten Raum. Daher können wir auch eine Homotopieäquivalenz  $\iota_1: P_n \rightarrow L_n$  angeben.

Als nächstes konstruieren wir  $\kappa_0: \mathbb{T}((\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F}) \wedge_{B \cup C, D} \mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{P}$  analog zu  $\gamma$  im Beweis von Proposition 7.16. Die Verkettung  $i_0 \circ \kappa_0$  faktorisiert in natürlicher Weise über  $(\mathbb{T}(\mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F})) \wedge \mathbb{G}$ , und wir erhalten die Abbildungen  $\gamma'_0$ . Analog konstruieren wir  $\kappa_1$  und  $\gamma'_1$ . Man überprüft leicht, dass das obige Diagramm dann bis auf Homotopie kommutiert.  $\square$

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Eigenschaften des reduzierten Produktes zusammen.

7.20. SATZ. Die Kategorie  $(SHCW, \wedge, \mathbb{S})$  ist eine graduiert symmetrische monoidale Kategorie. Insbesondere ist das reduzierte Produkt ein graduiertes Bifunktoren, das heißt, für komponierbare Abbildungen  $f, g, p$  und  $q$  vom Grad  $k, \ell, m$  beziehungsweise  $n$  gilt

$$(g \wedge q) \circ (f \wedge p) = (-1)^{kn} (g \circ f) \wedge (q \circ p),$$

und es existieren natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}}: (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} &\longrightarrow \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}), \\ \tau: \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \wedge \mathbb{E}, \quad \lambda: \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \quad \text{und} \quad \rho: \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{E}, \end{aligned}$$

so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} ((\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G}) \wedge \mathbb{H} & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}} \wedge \text{id}_{\mathbb{H}}} & (\mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G})) \wedge \mathbb{H} \\ \alpha_{\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{H}} \swarrow & & \downarrow \alpha_{\mathbb{E}, \mathbb{F} \wedge \mathbb{G}, \mathbb{H}} \\ (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge (\mathbb{G} \wedge \mathbb{H}) & & \mathbb{E} \wedge ((\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) \wedge \mathbb{H}) \\ \alpha_{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G} \wedge \mathbb{H}} \searrow & \xleftarrow{\text{id}_{\mathbb{E}} \wedge \alpha_{\mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{H}}} & \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge (\mathbb{G} \wedge \mathbb{H})) \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} & \xrightarrow{\tau_{\mathbb{E}, \mathbb{F}}} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\tau_{\mathbb{F}, \mathbb{E}}} & \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \\ & \searrow \text{id}_{\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}} & & & \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & (\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}) \wedge \mathbb{G} & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{F}, \mathbb{E}, \mathbb{G}}} & \mathbb{F} \wedge (\mathbb{E} \wedge \mathbb{G}) \\ \tau_{\mathbb{E}, \mathbb{F}} \wedge \text{id}_{\mathbb{G}} \nearrow & & & & \searrow \text{id}_{\mathbb{F}} \wedge \tau_{\mathbb{E}, \mathbb{G}} \\ (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{G} & & & & \mathbb{F} \wedge (\mathbb{G} \wedge \mathbb{E}) \\ \alpha_{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}} \searrow & & \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) & \xrightarrow{\tau_{\mathbb{E}, \mathbb{F} \wedge \mathbb{G}}} & (\mathbb{F} \wedge \mathbb{G}) \wedge \mathbb{E} \\ & & & & \nearrow \alpha_{\mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{E}} \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{S} \wedge \mathbb{E}) \wedge \mathbb{F} & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{S}, \mathbb{E}, \mathbb{F}}} & \mathbb{S} \wedge (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}}} & \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \\ & \searrow \lambda_{\mathbb{E}} \wedge \text{id}_{\mathbb{F}} & & & \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{E} \wedge \mathbb{S}) \wedge \mathbb{F} & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{E}, \mathbb{S}, \mathbb{F}}} & \mathbb{E} \wedge (\mathbb{S} \wedge \mathbb{F}) & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{E}} \wedge \lambda_{\mathbb{F}}} & \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \\ & \searrow \rho_{\mathbb{E}} \wedge \text{id}_{\mathbb{F}} & & & \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}) \wedge \mathbb{S} & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{S}}} & \mathbb{E} \wedge (\mathbb{F} \wedge \mathbb{S}) & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{E}} \wedge \rho_{\mathbb{F}}} & \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \\ & \searrow \rho_{\mathbb{E} \wedge \mathbb{F}} & & & \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\tau_{\mathbb{S}, \mathbb{E}}} & \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} & \xrightarrow{\rho_{\mathbb{E}}} & \mathbb{E} \\ & \searrow \lambda_{\mathbb{E}} & & & \end{array} \quad (7)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} \wedge \mathbb{S} & \xrightarrow{\tau_{\mathbb{S}, \mathbb{S}}} & \mathbb{S} \wedge \mathbb{S} \\ & \searrow \text{id}_{\mathbb{S} \wedge \mathbb{S}} & \end{array} \quad (8)$$



Üblicherweise werden diese acht Kohärenzbedingungen gemeinsam aufgeführt. Nach einem Satz von Mac Lane folgen alle anderen Kohärenzen (wenn sie denn gelten) aus den obigen. Allerdings braucht man von den Aussagen (4) und (6) nur eine.

BEWEIS. Aus den Proposition 7.15 und 7.16 folgt die Natürlichkeit des reduzierten Produktes unter Abbildungen vom Grad 0. Mit den Propositionen 7.16–7.19 können wir jede der Bedingungen (1)–(7) durch eine äquivalente Bedingung an naive Produkte ersetzen. Dazu wählen wir für jedes am Diagramm beteiligte Spektrum eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$  mit folgenden Nebenbedingungen.

- Wenn ein Sphärenspektrum  $\mathbb{S}$  zusammen mit  $\lambda$  oder  $\rho$  auftritt, ordnen wir ihm stets die leere Menge zu, alle anderen Teilmengen seien unendlich.
- Jede Teilmenge enthalte für jedes  $k \in \mathbb{N}$  entweder alle vier Zahlen  $4k, \dots, 4k + 3$  oder keine von ihnen.
- Alle Teilmengen für ein festes Diagramm seien paarweise disjunkt.

Anschließend überprüfen wir, dass das so erhaltene Diagramm naiver Produkte strikt kommutiert. Nur Bedingung (8) überprüfen wir von Hand in Übung 7.46.

Es bleibt das Verhalten unter Abbildungen von verschiedenen Graden zu prüfen (später).  $\square$

### 7.d. Ringspektren und Produkte

Wir benutzen das soeben eingeführte reduzierte Produkt von Spektren, um Produkte wie in den Propositionen 6.13 und Definition 6.15 zu formalisieren. Dadurch erhalten wir automatisch Stabilitätseigenschaften analog zu Proposition 6.13 (3).

7.21. DEFINITION. Ein *Ringspektrum*  $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$  besteht aus einem Spektrum  $\mathbb{E}$ , einer *Multiplikation*  $\mu: \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  und einer *Einheitsabbildung*  $\varepsilon: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{E}$ , so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\mu \wedge \text{id}} & \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \\ \text{id} \wedge \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{E} \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\varepsilon \wedge \text{id}} & \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} & \xleftarrow{\varepsilon \wedge \text{id}} & \mathbb{E} \wedge \mathbb{S} \\ & \searrow \lambda & \downarrow \mu & \swarrow \rho & \\ & & \mathbb{E} & & \end{array} \quad (2)$$

in  $\mathcal{SHCW}_0$  kommutieren. Es heißt (*graduiert*) *kommutativ*, wenn auch das folgende Diagramm kommutiert:

$$\mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\tau} \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\mu} \mathbb{E} \quad (3)$$

Ein (*Rechts-*) *Modulspektrum*  $(\mathbb{F}, \nu)$  über einem Ringspektrum  $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$  besteht aus einem Spektrum  $\mathbb{F}$  und einer Multiplikation  $\nu: \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ , so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\nu \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \\ \text{id} \wedge \mu \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{F} \end{array} \quad (4)$$

$$\mathbb{F} \wedge \mathbb{S} \xrightarrow{\text{id} \wedge \varepsilon} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\nu} \mathbb{F} \quad (5)$$

$\rho$

in  $\mathcal{SHCW}_0$  kommutieren. Analog definiert man Linksmodulspektren über  $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$ .

Wir nehmen also wieder an, dass alle Ringspektren eine Eins haben, die auf allen Modulspektren durch die Identität wirkt. Im Folgenden schreiben wir kurz  $\mathbb{E}$  oder  $\mathbb{F}$  für Ring- beziehungsweise Modulspektren, wenn Multiplikation und Einheitsabbildung klar sind.

7.22. BEMERKUNG. Wenn wir Multiplikationsabbildungen  $\mu_{k,\ell}: E_k \rightarrow E_\ell \rightarrow E_{k+\ell}$  und  $\varepsilon_k: S^k \rightarrow E_k$  angeben können, die (1) und (2) im Sinne „naiver“ Produkte sowie die Stabilitätsbedingung

$$\mu_{k+1,\ell} \circ (s_k \wedge \text{id}_{E_\ell}) = s_{k+\ell} \circ S\mu_{k,\ell} = \mu_{k,\ell+1} \circ (\text{id}_{E_k} \wedge (-1)^k s_\ell)$$

für alle  $k$  und  $\ell$  erfüllen, erhalten wir die obigen Abbildungen  $\mu$  und  $\varepsilon$  sogar strikt wie in Übung 7.45 und haben ein Ringspektrum konstruiert.

Dabei tritt an Stelle von (3) die Bedingung

$$\mu_{\ell,k} = \mu_{k,\ell} \circ \tau_{\ell,k}.$$

Man beachte, dass  $\tau_{k,\ell}: E_k \wedge E_\ell \rightarrow E_\ell \wedge E_k$  der natürlichen Abbildung aus Bemerkung 3.74 (2) nur bis auf das Vorzeichen  $(-1)^{k\ell}$  entspricht; dies ergibt sich aus (7.4) und der obigen Stabilitätsbedingung. Daher sind kommutative Ringspektren in Wirklichkeit nur graduiert kommutativ.

Um ein Modulspektrum zu konstruieren, benötigen wir entsprechend Abbildungen  $\nu_{k,\ell}: E_k \wedge E_\ell \rightarrow F_{k+\ell}$ , die (4) und (5) im „naiven“ Sinne erfüllen.

7.23. BEISPIEL. Wir kennen bereits einige Ring- und Modulspektren.

- (1) Das Sphärenspektrum ist ein Ringspektrum, dabei ist  $\mu_{k,\ell}: S^k \wedge S^\ell \rightarrow S^{k+\ell}$  der natürliche Homöomorphismus. Das Sphärenspektrum ist kommutativ, siehe Satz 7.20 8 und Übung 7.46. Jedes Spektrum  $\mathbb{E}$  ist ein Modulspektrum über  $\mathbb{S}$  mit  $\nu = \lambda$ .
- (2) Das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum  $\mathbb{H}R$  über einem Ring  $R$  aus Abschnitt 5.e ist ein Ringspektrum, siehe Übung 7.47. Dabei sind Multiplikation und Einheitsabbildung von  $\mathbb{H}R$  durch die Multiplikation und die Eins in  $R$  festgelegt. Es ist kommutativ, wenn  $R$  kommutativ ist, siehe Übung 7.48. Sei  $A$  ein Links- $R$ -Modul, dann ist  $\mathbb{H}A$  ein Linksmodulspektrum über  $\mathbb{H}R$ .
- (3) Zur reellen und komplexen  $K$ -Theorie gehören die Ringspektren  $\mathbb{K}$  und  $\mathbb{K}\mathbb{O}$ , siehe Bemerkung 6.41. Das Spektrum  $\mathbb{K}Sp \cong \Sigma^4 \mathbb{K}\mathbb{O}$  zur quaternionischen  $K$ -Theorie ist ein  $\mathbb{K}\mathbb{O}$ -Modulspektrum.
- (4) Die Thom-Spektren  $\mathbb{M}\mathbb{O}$ ,  $\mathbb{M}\mathbb{U}$ ,  $\mathbb{M}SO$  zu den diversen Bordismus- und Kobordismusfunktoren sind ebenfalls Ringspektren.

7.24. BEMERKUNG. Es sei  $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$  ein Ringspektrum und  $\mathbb{F}$  ein beliebiges Spektrum, dann ist  $(\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}, \text{id} \wedge \mu)$  ein Rechtsmodulspektrum über  $\mathbb{E}$  nach Übung 7.49. Insbesondere ist  $\mathbb{E} \cong \mathbb{S} \wedge \mathbb{E} \cong \mathbb{E} \wedge \mathbb{S}$  selbst sowohl Links- als auch Rechtsmodulspektrum über sich selbst.

Als Beispiel für  $\mathbb{F}$  können wir das Moore-Spektrum  $\mathbb{M}A$  zu einer abelschen Gruppe  $A$  aus Definition 5.70 wählen. Auf diese Weise erhalten wir  $\mathbb{E}$ -Homologie und -Kohomologie mit Koeffizienten in  $A$ , siehe Definition 5.73.

Im Folgenden können wir jederzeit  $(\mathbb{F}, \nu)$  durch  $(\mathbb{E}, \mu)$ , aufgefasst als Rechtsmodulspektrum, ersetzen.

7.25. DEFINITION. Es sei  $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$  ein Ringspektrum und  $(\mathbb{F}, \nu)$  ein Rechts- $\mathbb{E}$ -Modulspektrum. Dann definieren wir zwei externe Produkte, das Smash-Produkt  $\wedge: \tilde{F}^k(X) \times \tilde{E}^\ell(Y) \rightarrow \tilde{E}^{k+\ell}(X \wedge Y)$

und das Schräg-Produkt  $/: \tilde{F}_{k+\ell}(X \wedge Y) \times \tilde{E}^k(X) \rightarrow \tilde{F}_\ell(Y)$  für alle  $\alpha \in [\mathbb{S}X, \mathbb{F}]_{-k} = \tilde{F}^k(X)$ ,  $\beta \in [\mathbb{S}Y, \mathbb{E}]_{-\ell} = \tilde{E}^\ell(Y)$ ,  $\gamma \in [\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_{-k} = \tilde{E}^k(X)$  und  $b \in [\mathbb{S}, \mathbb{F} \wedge X \wedge Y]_{k+\ell} = \tilde{F}_{k+\ell}(X \wedge Y)$  durch

$$\alpha \wedge \beta: \mathbb{S} \wedge X \wedge Y \cong \mathbb{S} \wedge X \wedge \mathbb{S} \wedge Y \xrightarrow{\alpha \wedge \beta} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\nu} \mathbb{F} \quad (1)$$

$$\text{und } b/\gamma: \mathbb{S} \xrightarrow{b} \mathbb{F} \wedge X \wedge Y \cong \mathbb{F} \wedge \mathbb{S} \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\text{id} \wedge \gamma \wedge \text{id}} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \wedge Y \xrightarrow{\nu \wedge \text{id}} \mathbb{F} \wedge Y. \quad (2)$$

Im Fall von  $\omega$ -Spektren entsprechen die obigen Definitionen genau der vorläufigen Beschreibung am Anfang von Abschnitt 7.c. Aus der Konstruktion der zellulären externen Produkte in Abschnitt 6.d kann man schließen, dass die obigen Produkte mit denen aus Proposition 6.13 übereinstimmen. Wie immer erhalten wir unreduzierte Varianten, indem wir  $X$  und  $Y$  durch  $X_+$  und  $Y_+$  ersetzen.

Wegen Satz 7.20 (5) ist es in (1) und (2) unerheblich, wie wir das neutrale Element  $\mathbb{S}$  des reduzierten Produktes einfügen. Genauso ist es wegen Satz 7.20 (1) unerheblich, wie wir in (2) klammern.

**7.26. PROPOSITION.** *Die externen Produkte sind natürlich und haben für alle  $\alpha \in [\mathbb{S}X, \mathbb{F}]_{-k}$ ,  $\beta \in [\mathbb{S}Y, \mathbb{E}]_{-\ell}$ ,  $\gamma \in [\mathbb{S}Z, \mathbb{E}]_{-m}$  und alle  $a \in [\mathbb{S}, \mathbb{F} \wedge X]$ ,  $b \in [\mathbb{S}, \mathbb{F} \wedge Y \wedge X]_{k+\ell}$ ,  $c \in [\mathbb{S}, \mathbb{F} \wedge Y \wedge Z \wedge X]$  die folgenden Eigenschaften.*

(1) Assoziativität. *Es gilt*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \in \tilde{F}^{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z)$$

$$\text{und } (c/\beta)/\gamma = c/(\beta \wedge \gamma) \in \tilde{F}_k(X).$$

(2) Einselement. *Für das Element  $1 = [\varepsilon] \in [\mathbb{S}, \mathbb{E}]_0$  gilt*

$$\alpha \wedge 1 = \alpha \in \tilde{F}^k(X), \quad 1 \wedge \beta = \beta \in \tilde{E}^\ell(Y)$$

$$\text{und } a/1 = a \in \tilde{F}_k(X).$$

(3) Stabilität. *Für die Stabilisierungs-Isomorphismen  $\sigma$  gilt*

$$(\sigma\alpha) \wedge \beta = \sigma(\alpha \wedge \beta) = (-1)^k \alpha \wedge (\sigma\beta) \in \tilde{F}^{k+\ell+1}(S(X \wedge Y)),$$

$$(\sigma b)/(\sigma\beta) = b/\beta \in \tilde{F}_k(X) \quad \text{und} \quad (\sigma b)/\beta = (-1)^k \sigma(b/\beta) \in \tilde{F}_{k+1}(X).$$

(4) Transposition. *Es sei  $t: X \wedge Y \rightarrow Y \wedge X$  die Transpositionsabbildung. Wenn  $\mathbb{E}$  kommutativ ist, dann gilt*

$$t^*(\beta \wedge \gamma) = (-1)^{\ell m} \gamma \wedge \beta.$$

**BEWEIS.** Zur Natürlichkeit nutzen wir aus, dass das reduzierte Produkt von Spektren ein graduierter Bifunktor ist. Es seien  $f: U \rightarrow X$  und  $g: V \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $(f^*\alpha) \wedge (g^*\beta) = (f \wedge g)^*(\alpha \wedge \beta)$  definiert durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} \wedge U \wedge V & \xleftarrow[\cong]{\text{id} \wedge \text{id} \wedge \lambda} & \mathbb{S} \wedge U \wedge \mathbb{S} \wedge V \\ \text{id} \wedge f \wedge g \downarrow & & \downarrow \text{id} \wedge f \wedge \text{id} \wedge g \\ \mathbb{S} \wedge X \wedge Y & \xleftarrow[\cong]{\text{id} \wedge \text{id} \wedge \lambda} & \mathbb{S} \wedge X \wedge \mathbb{S} \wedge Y \xrightarrow{\alpha \wedge \beta} \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\nu} \mathbb{F}. \end{array}$$

Für  $x \in [\mathbb{S}, \mathbb{F} \wedge V \wedge U]_{k+\ell}$  wird  $f_*(x/g^*\beta) = ((g \wedge f)_*x)/\beta$  dargestellt durch

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{S} & \xrightarrow{x} & \mathbb{F} \wedge V \wedge U & \xrightarrow[\cong]{\rho^{-1} \wedge g \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{S} \wedge Y \wedge U & \xrightarrow{\text{id} \wedge \beta \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \wedge U \xrightarrow{\nu \wedge \text{id}} \mathbb{F} \wedge U \\ \text{id} \wedge g \wedge f \downarrow & & \downarrow \text{id} \wedge \text{id} \wedge \text{id} \wedge f & & \downarrow \text{id} \wedge \text{id} \wedge f & & \downarrow \text{id} \wedge f \\ \mathbb{F} \wedge Y \wedge X & \xleftarrow[\cong]{\text{id} \wedge \lambda \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{S} \wedge Y \wedge X & \xrightarrow{\text{id} \wedge \beta \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge \mathbb{E} \wedge X & \xrightarrow{\nu \wedge \text{id}} & \mathbb{F} \wedge X. \end{array}$$

Zu den restlichen Punkten betrachtet man wieder kommutative Diagramme und benutzt die passenden Eigenschaften aus Satz 7.20 und Definition 7.21, siehe Übung 7.51.  $\square$

7.27. BEMERKUNG. Es sei  $\mathbb{E}$  ein Ringspektrum. Mithilfe der natürlichen Transformationen  $\lambda$  und  $\rho$  erhalten wir einen Isomorphismus  $\mathbb{S} \wedge \mathbb{S} \cong \mathbb{S}$ . Daher erhalten wir eine Multiplikation auf den Koeffizienten  $\pi_{\bullet}(\mathbb{E}) \cong \tilde{E}^{\bullet}(S^0) \cong \tilde{E}_{\bullet}(S^0)$  durch

$$\alpha \wedge \beta: \mathbb{S} \cong \mathbb{S} \wedge \mathbb{S} \xrightarrow{\alpha \wedge \beta} \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \xrightarrow{\mu} \mathbb{E}.$$

Somit erhalten wir den Koeffizientenring

$$E^{\bullet} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{E}^n(S^0)$$

von  $\mathbb{E}$ . Es handelt sich dabei um einen  $\mathbb{Z}$ -graduerten Ring, das heißt, jedes Element ist eine Summe homogener Elemente, also von Elementen mit einem wohldefinierten Grad in  $\mathbb{Z}$ , und beim Multiplizieren addieren sich die Grade. Sollte  $\mathbb{E}$  kommutativ sein, ist  $E^{\bullet}$  *graduert kommutativ*, das heißt,

$$ab = (-1)^{kl} ba \quad \text{falls } a \in E^k \text{ und } b \in E^l.$$

Sei  $\mathbb{F}$  ein  $\mathbb{E}$ -Modulspektrum, zum Beispiel  $\mathbb{F} = \mathbb{E}$ . Nach Definition 7.25 sind  $\tilde{F}_{\bullet}(X)$  und  $\tilde{F}^{\bullet}(X)$  für jeden Raum graduierte  $E^{\bullet}$ -Module, und für stetige Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  sind  $f_*: \tilde{F}_{\bullet}(X) \rightarrow \tilde{F}_{\bullet}(Y)$  und  $f^*: \tilde{F}^{\bullet}(Y) \rightarrow \tilde{F}^{\bullet}(X)$  rechts- $E^{\bullet}$ -lineare Abbildungen, siehe Übung 7.52. Wir erhalten somit Funktoren

$$\tilde{F}_{\bullet}, \quad \tilde{F}^{\bullet}: \mathcal{H}kw\mathcal{H}_+ \rightarrow \text{Mod}_{E^{\bullet}}.$$

Schließlich überprüft man noch, dass die externen Produkte im zweiten Argument rechts- $E^{\bullet}$ -linear sind. Wenn  $\mathbb{E}$  kommutativ ist, erhält man auch eine Linearität im ersten Argument.

7.28. BEISPIEL. Wir betrachten die Koeffizientenringe einiger Spektren.

- (1) Der Koeffizientenring des Eilenberg-Mac Lane-Spektrums  $\mathbb{H}R$  ist  $R = HR^0 = HR^{\bullet}$ . Insbesondere können wir gewöhnliche Kohomologie mit Koeffizienten in einem  $R$ -Modul  $A$  jetzt endlich als  $\text{Mod}_R$ -wertigen Funktor verstehen.
- (2) Aufgrund von Bott-Periodizität fasst man komplexe  $K$ -Theorie gern als  $\mathbb{Z}/2$ -graduerten Funktor auf. Der Koeffizientenring ist dann  $K^{\bullet} = K^0 = \mathbb{Z}$ . Über  $\mathbb{Z}$  hingegen erhalten wir den Koeffizientenring

$$K^k = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Analog betrachten wir reelle  $K$ -Theorie als  $\mathbb{Z}/8$ -graduerten Funktor.

- (3) Die diversen Bordismusfunktoren haben in der Regel kompliziertere Koeffizientenringe. Beispielsweise wird  $MU^{\bullet}$  frei erzeugt von je einem Erzeuger in Grad  $2k$  für  $k \geq 0$ .

7.29. BEMERKUNG. Wie nach Satz 6.8 eingeführt gibt es auch ein *Kronecker-Produkt*  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \tilde{E}_{\bullet}(X) \times \tilde{E}^{\bullet}(X) \rightarrow E^{\bullet}$ , definiert durch  $\langle a, \alpha \rangle = a/\alpha \in \tilde{E}_{\bullet}(S^0) = E^{\bullet}$ . Die Rechenregeln aus Proposition 6.13 (4) übertragen sich entsprechend.

Es seien  $A, B \subset X$  Teilmengen, so dass  $(X, A)$ ,  $(X, B)$  und  $(X, A \cup B)$  punktierte Kofaserungen sind. Dann definieren wir eine Diagonalabbildung

$$\Delta_{X;A,B}: X/(A \cup B) \longrightarrow X/A \wedge X/B.$$

7.30. DEFINITION. Es sei  $\mathbb{E}$  ein Ring- und  $\mathbb{F}$  ein Rechts- $\mathbb{E}$ -Modulspektrum, es sei  $X$  ein topologischer Raum mit Teilmengen  $A, B \subset X$ , so dass  $(X, A)$ ,  $(X, B)$  und  $(X, A \cup B)$  punktierte Kofaserungen sind. Dann definieren wir die *inneren Produkte*, das *Cup-Produkt*  $\smile: \tilde{F}^k(X/A) \times \tilde{E}^l(X/B) \rightarrow$

$\tilde{F}^{k+\ell}(X/(A \cup B))$  und das *Cap-Produkt*  $\smile: \tilde{F}_{k+\ell}(X/(A \cup B)) \times \tilde{E}^k(X/A) \rightarrow \tilde{F}_\ell(X/B)$  für alle  $\alpha \in \tilde{F}^k(X/A)$ ,  $\beta \in \tilde{E}^\ell(X/B)$  und  $c \in \tilde{F}_{k+\ell}(X/(A \cup B))$  durch

$$\alpha \smile \beta = \Delta_X^*(\alpha \wedge \beta) \quad \text{und} \quad c \frown \alpha = (\Delta_{X*}c)/\alpha .$$

Wir bezeichnen  $(\tilde{E}^\bullet(X), \smile)$  als die reduzierte *E-Kohomologiealgebra* von  $X$ .

Diese Definition ist also völlig analog zu Definition 6.15; die unreduzierten Varianten erhalten wir analog. Aufgrund der folgenden Eigenschaften können wir tatsächlich von Kohomologieringen und (Ko-) Homologiemoduln sprechen. Außerdem sind  $(\tilde{F}^\bullet(X), \smile)$  und  $(\tilde{F}_\bullet(X), \smile)$  Rechts- $(\tilde{E}^\bullet(X), \smile)$ -Moduln.

7.31. PROPOSITION. *Die inneren Produkte sind natürlich und haben folgende Eigenschaften.*

(1) Assoziativgesetz. *Es gilt*

$$(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma) \quad \text{und} \quad (c \frown \alpha) \frown \beta = c \frown (\alpha \smile \beta) .$$

(2) Einselement. *Sei  $p: X \rightarrow \text{pt}$  die konstante Abbildung, dann ist  $1 = p_+^*(\varepsilon) \in \tilde{H}^0(X_+; R) = H^0(X; R)$  neutrales Element für beide Produkte.*

(3) Adjunktion. *Es gilt*

$$\langle b \frown \alpha, \beta \rangle = \langle b, \alpha \smile \beta \rangle .$$

(4) *Wenn  $\mathbb{E}$  kommutativ ist, ist das Cup-Produkt graduiert kommutativ, das heißt, für alle  $\alpha \in \tilde{E}^k(X; R)$  und  $\beta \in \tilde{E}^\ell(X; R)$  gilt*

$$\beta \smile \alpha = (-1)^{k\ell} \alpha \smile \beta .$$

BEWEIS. Das ist eine unmittelbare Folgerung aus Proposition 7.26. □

7.32. BEMERKUNG. Als erste Anwendung zeigen wir, dass das Cup-Produkt auf  $\tilde{E}^\bullet(SX)$  verschwindet. Dazu sei

$$SX = X \wedge ([0, 1]/\{0, 1\}) , \quad A = X \wedge ([0, \frac{1}{2}], 0) , \quad \text{und} \quad B = X \wedge ([\frac{1}{2}, 1], 1) .$$

Dann gilt  $A \cup B = SX$ . Außerdem sind  $A, B \cong CX$  zusammenziehbar, und nach Proposition 3.62 sind die Quotientenabbildungen  $p: SX \rightarrow SX/A$  und  $q: SX \rightarrow SX/B$  Homotopieäquivalenzen. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}^k(SX/A) \times \tilde{E}^\ell(SX/B) & \xrightarrow{\smile} & \tilde{E}^{k+\ell}(SX/SX) = 0 \\ p^* \times q^* \Big\downarrow \cong & & \Big\downarrow \\ \tilde{E}^k(SX) \times \tilde{E}^\ell(SX) & \xrightarrow{\smile} & \tilde{E}^{k+\ell}(SX) . \end{array}$$

7.33. BEMERKUNG. Wie in Bemerkung 6.17 ist  $\tilde{E}^\bullet(X)$  eine  $E^\bullet$ -Algebra ohne Eins. Wir können eine Eins hinzufügen und erhalten die unreduzierte Kohomologie-Algebra  $E^\bullet(X)$ . Während  $\tilde{E}^\bullet(X)$  als  $E^\bullet$ -Modul unabhängig von der Wahl des Basispunktes ist, sieht  $\tilde{E}^\bullet(X)$  als  $E^\bullet$ -Algebra zumindest die Zusammenhangskomponente des Basispunktes. Die unreduzierte Kohomologie-Algebra  $E^\bullet(X)$  ist wiederum basispunktunabhängig.

Falls  $X$  ein  $m$ -dimensionaler, zusammenhängender CW-Komplex ist, ist  $\tilde{E}^\bullet(X)$  nilpotent, genauer gesagt, verschwinden alle  $(m+1)$ -fachen Produkte. Dazu nehmen wir an, dass das 0-Skelett  $X^0$  nur aus dem Basispunkt besteht, indem wir Satz 4.32 auf  $(X, \{x_0\})$  anwenden. Seien jetzt  $1 \leq p, q \leq m$ , und sei  $\Delta'_{X; X^{p-1}, X^{q-1}}$  eine zelluläre Approximation der Diagonalen  $\Delta_{X; X^{p-1}, X^{q-1}}$ . Wir

betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Delta} & X \wedge X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X/X^{p+q-1} & \xrightarrow{\Delta'_{X;X^{p-1},X^{q-1}}} & (X \wedge X)/(X^{p-1} \wedge X \cup X \wedge X^{q-1}) = (X/X^{p-1}) \wedge (X/X^{q-1}) .
 \end{array}$$

Für  $\alpha \in \tilde{E}^k(X/X^{p-1})$  und  $\beta \in \tilde{E}^\ell(X/X^{q-1})$  folgt  $\alpha \smile \beta \in \tilde{E}^{k+\ell}(X/X^{p+q-1})$ . Da  $\tilde{E}^\bullet(X) = \tilde{E}^\bullet(X/X^0)$ , liegen induktiv alle  $p$ -fachen Produkte in  $\tilde{E}^\bullet(X/X^{p-1})$ .

### 7.e. Allgemeine singuläre Homologie und Kohomologie

Bisher haben wir durch Spektren gegebene Homologie und -Kohomologie immer nur für CW-Komplexe betrachtet. Um Dualitätssätze für Mannigfaltigkeiten zu formulieren, benötigen wir eine allgemeinere Definition. Dazu ersetzen wir beliebige Paare von Räumen durch schwach äquivalente CW-Paare ähnlich wie in Abschnitt 4.c.

Sei  $(Z, U)$  ein beliebiges Paar topologischer Räume. Mit Satz 4.32 finden wir zunächst eine CW-Approximation  $A \rightarrow U$ . Sei  $g: A \rightarrow Z$  die zusammengesetzte Abbildung, dann ersetzen wir  $Z$  durch den Abbildungszylinder  $Zg$ . Anschließend konstruieren wir ein CW-Modell  $(X, A)$  für  $(Zg, A)$ . Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \longrightarrow & Zg & \xrightarrow{\sim} & Z \\
 & \searrow & \uparrow g & \nearrow & \uparrow \\
 & & A & \longrightarrow & U
 \end{array}$$

Dabei sind sowohl  $A$  als auch  $X$  jeweils bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig, und die Homotopieäquivalenzen selbst sind ebenfalls bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. Wir nennen  $(X, A) \rightarrow (Z, U)$  eine *Approximation* von  $(Z, U)$  durch ein CW-Paar.

Sei jetzt  $f: (Z, U) \rightarrow (W, V)$  seine stetige Abbildung von Paaren und  $(X, A) \rightarrow (Z, U)$ ,  $(Y, B) \rightarrow (W, V)$  seien Approximationen durch CW-Paare. Mit Satz 4.32 konstruieren wir zunächst eine Abbildung  $A \rightarrow B$ , dann eine Abbildung  $g: X \rightarrow Y$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y & \longrightarrow & W \\
 & g \nearrow & \uparrow & f \nearrow & \uparrow \\
 X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & V \\
 \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & B & \longrightarrow & V \\
 \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V
 \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutiert. Wieder sind alle Abbildungen bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. Da  $(X, A)$  eine Kofaserung ist, können wir  $g$  als Abbildung von Paaren  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  wählen.

7.34. DEFINITION. Es sei  $\mathbb{E}$  ein Spektrum. Es sei  $f: (Z, U) \rightarrow (W, V)$  eine Abbildung von Paaren, und es sei  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Approximation durch CW-Paare. Dann definieren wir die *singuläre E-Homologie*  $E_\bullet(Z, U) = \tilde{E}_\bullet(X/A)$  und

$$f_* = g_*: E_\bullet(Z, U) = \tilde{E}_\bullet(X/A) \longrightarrow \tilde{E}_\bullet(Y/B) = E_\bullet(W, V),$$

und analog die *singuläre E-Kohomologie*.

Insbesondere ist auch  $E_\bullet(Z) = E_\bullet(X) = \tilde{E}_\bullet(X_+)$  im Falle  $U = \emptyset$ . Im Spezialfall  $\mathbb{E} = \mathbb{H}G$  sprechen wir einfach von *singulärer Homologie* und *Kohomologie*.

7.35. BEMERKUNG. Man überprüft die folgenden Behauptungen.

- (1) Nach Übung 7.53 sind singuläre  $E$ -Homologie und -Kohomologie Funktoren  $\mathcal{H}Pair \rightarrow \mathcal{A}b$ .
- (2) Für Tripel  $U \subset V \subset W$  existieren natürliche exakte Sequenzen

$$\begin{aligned} \cdots \longleftarrow E_{n-1}(V, W) \xleftarrow{\partial} E_n(U, V) \longleftarrow E_n(U, W) \longleftarrow E_n(V, W) \longleftarrow \cdots, \\ \cdots \longrightarrow E^{n-1}(V, W) \xrightarrow{\delta} E^n(U, V) \longrightarrow E^n(U, W) \longrightarrow E^n(V, W) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

wie in Übung 6.58. Im Fall  $W = \emptyset$  erhalten wir die langen exakten Sequenzen eines Paares; diese sind Bestandteil der Eilenberg-Steenrod-Axiome.

- (3) Singuläre  $E$ -Homologie und -Kohomologie sind invariant unter schwachen Äquivalenzen. Insbesondere sind die Homologie-Funktoren aus den Definitionen 5.37 und 7.34 natürlich isomorph. Für Kohomologie gilt das wegen Übung 6.57 jedoch nicht.

Punkt (1) entspricht den Eilenberg-Steenrod-Axiomen 1, 2 und 6 [ES, Section I.3]. Punkt (2) für  $W = \emptyset$  entspricht den Axiomen 3 und 4. Das Ausschneidungsaxiom 5 behandeln wir im folgenden Satz, und das Dimensionsaxiom 7 verlangen wir nur für gewöhnliche singuläre (Ko-) Homologie.

7.36. SATZ (Ausschneidung, Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es sei  $\mathbb{E}$  ein Spektrum, und es sei  $X = U \cup V$  mit  $U, V \subset X$  offen. Dann induziert die Inklusionsabbildung  $(U, U \cap V) \hookrightarrow (X, V)$  Isomorphismen*

$$E_\bullet(U, U \cap V) \xrightarrow{\cong} E_\bullet(X, V) \quad \text{und} \quad E^\bullet(X, V) \xrightarrow{\cong} E^\bullet(U, U \cap V). \quad (1)$$

Unter den gleichen Voraussetzungen sind die folgenden Mayer-Vietoris-Sequenzen exakt:

$$\cdots \longleftarrow \tilde{E}_{n-1}(A \cap B) \xleftarrow{\partial} \tilde{E}_n(X) \longleftarrow \tilde{E}_n(A) \oplus \tilde{E}_n(B) \xleftarrow{-} \tilde{E}_n(A \cap B) \longleftarrow \cdots, \quad (2)$$

$$\cdots \longrightarrow \tilde{E}^{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\delta} \tilde{E}^n(X) \longrightarrow \tilde{E}^n(A) \oplus \tilde{E}^n(B) \xrightarrow{-} \tilde{E}^n(A \cap B) \longrightarrow \cdots. \quad (3)$$

Allgemeiner dürfen wir beliebige Teilmengen  $U, V \subset X$  mit  $\overset{\circ}{U} \cup \overset{\circ}{V} = X$  zulassen. Ohne eine Bedingung geht es sicher nicht, dazu betrachte man etwa das Beispiel  $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ .

BEWEIS. Wir bestimmen zunächst eine CW-Approximation  $C \rightarrow U \cap V$ . Wie oben finden wir dann Approximationen  $(A, C) \rightarrow (U, U \cap V)$  und  $(B, C) \rightarrow (V, U \cap V)$ . Zu zeigen ist, dass die natürliche Abbildung  $A \cup_C B \rightarrow X$  eine schwache Äquivalenz ist. Dazu zerlegt man den Abbildungskegel der natürlichen Abbildung

$$D = A \cup_{C \times \{0\}} C \times [0, 1] \cup_{C \times \{1\}} B \longrightarrow X$$

geschickt in zwei offene Mengen, die jeweils den Abbildungskegel von  $A \rightarrow U$  beziehungsweise  $B \rightarrow V$  als Deformationsretrakt enthalten, und deren Durchschnitt den Abbildungskegel von  $C \rightarrow U \cap V$  als Deformationsretrakt enthält. Diese drei kleinen Abbildungskegel sind nach Voraussetzung schwach zusammenziehbar. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 von Blakers-Massey gilt das dann auch für den obigen Abbildungskegel von  $D \rightarrow X$ . Die natürliche Abbildung  $D \rightarrow A \cup_C B$  ist eine Homotopieäquivalenz, also ist  $(A \cup_C B, B)$  eine CW-Approximation von  $(X, V)$ .

Jetzt erhalten wir die gesuchten natürlichen Isomorphismen

$$\begin{aligned} E_\bullet(U, U \cap V) &\cong \tilde{E}_\bullet(A/C) = \tilde{E}_\bullet((A \cup_C B)/B) \cong E_\bullet(X, V), \\ E^\bullet(X, V) &\cong \tilde{E}^\bullet((A \cup_C B)/B) = \tilde{E}^\bullet(A/C) \cong E^\bullet(U, U \cap V). \end{aligned}$$

Die angegebenen Mayer-Vietoris-Sequenzen folgen daraus. Wir können sie auch direkt aus den Sätzen 5.13 und 6.3 ableiten.  $\square$

7.37. PROPOSITION. Es sei  $\mathbb{E}$  ein Spektrum, und es seien  $(U_i)_i, (V_i)_i$  aufsteigende Folgen von Teilmengen von  $X$  mit  $V_i \subset U_i$ . Für das Paar  $(U, V) = (\bigcup_i U_i, \bigcup_i V_i)$  gilt

$$E_\bullet(U, V) = \varinjlim E_\bullet(U_i, V_i),$$

falls es zu jedem Paar  $(K, L) \subset (U, V)$  kompakter Teilmengen ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $(K, L) \subset (U_i, V_i)$  gibt.

BEWEIS. Aufgrund der Definition des Kolimes gibt es eine natürliche Abbildung

$$\varphi: \varinjlim (U_i, V_i) \longrightarrow E_\bullet(U, V).$$

Wegen Bemerkung 7.35 (3) wird eine Homologieklass  $[a] \in E_k(U, V)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  dargestellt durch eine Abbildung  $a: S^{n+k} \rightarrow E_n \wedge (U//V)$ . Es sei  $\iota: V \rightarrow U$  die Inklusion, dann schreibe  $U//V \cong Z \iota \cup_V CV$ . Da  $S^{n+k}$  kompakt ist, liegt das Bild von  $a$  in  $K \cup_{K \cap V} ((K \cap V) \times I) \cup_L CL$  für geeignete Kompakta  $K \subset U$  und  $L \subset V \cap K$ , und der obige Raum ist homotopieäquivalent zu  $K//L$ . Wenn es ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $(K, L) \subset (U_i, V_i)$  gibt, folgt  $[a] \in \text{im } \varphi$ . Somit ist  $\varphi$  surjektiv. Die Injektivität wird analog bewiesen.  $\square$

7.38. BEMERKUNG. Sei  $\mathbb{E}$  ein Ringspektrum und  $\mathbb{F}$  ein Rechts- $\mathbb{E}$ -Modulspektrum. Man definiert externe Produkte auf der singulären (Ko-)Homologie, indem man alle betroffenen Raumpaare durch Paare von CW-Komplexen approximiert. Dazu überlegt man sich zunächst, dass das Produkt solcher Approximationen wieder das Produkt der ursprünglichen Räume approximiert, siehe Übung 7.54. Wir erhalten also externe Produkte

$$\begin{aligned} \wedge: F^k(Z, U) \times E^\ell(W, V) &\longrightarrow F^{k+\ell}(Z \times W, U \times W \cup Z \times V) \\ \text{und} \quad /: F_{k+\ell}(Z \times W, U \times W \cup Z \times V) \times E^k(Z, U) &\longrightarrow F_\ell(W, V) \end{aligned}$$

wie in Definition 7.25.

Anschließend überlegt man sich, dass Approximation durch Paare von CW-Komplexen auch mit der Diagonalabbildung verträglich ist, und erhält in Analogie zu Definition 7.30 die internen Produkte

$$\begin{aligned} \smile: F^k(Z, U) \times E^\ell(Z, V) &\longrightarrow F^{k+\ell}(Z, U \cup V) \\ \text{und} \quad \frown: F_{k+\ell}(Z, U \cup V) \times E^k(Z, U) &\longrightarrow F_\ell(Z, V). \end{aligned}$$

7.39. BEMERKUNG. In den meisten Lehrbüchern wird nur gewöhnliche singuläre (Ko-) Homologie definiert, und zwar über Kettenkomplexe, die von singulären Simplizes oder Würfeln erzeugt werden. Man kann jetzt beweisen, dass diese Definition Funktoren liefert, die die gleichen Axiome erfüllen wie die singuläre (Ko-) Homologie aus Definition 7.34 zu den Eilenberg-Mac Lane-Spektren. Insbesondere ist auch die „klassische“ singuläre (Ko-) Homologie invariant unter schwachen Äquivalenzen. Zusammen mit den Sätzen 5.23 und 6.8 sehen wir, dass beide Herangehensweisen natürlich isomorphe Funktoren liefern.

## 7.f. Übungen zu Kapitel 7

Übungen zu Abschnitt 7.a.

7.40. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgende Aussagen über kofinale Unterspektren.

- (1) Es sei  $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$  kofinal und  $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}$  kofinal, dann ist auch  $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$  kofinal.
- (2) Es sei  $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$  kofinal und  $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}$  ein Unterspektrum, dann ist  $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \subset \mathbb{V}$  kofinal.
- (3) Es sei  $\mathbb{V} \subset \mathbb{F}$  kofinal und  $\mathbf{f}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  eine strikte Abbildung, dann ist auch  $\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{V}) \subset \mathbb{E}$  kofinal.

7.41. ÜBUNG. (1) Es seien  $f, g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  Abbildungen. Erklären Sie Definition 7.5 in Termen strikter Abbildungen auf kofinalen Unterspektren.



- (2) Zeigen Sie in dieser Sprache, dass Homotopie auf Abbildungen eine Äquivalenzrelation definiert.
- (3) Zeigen Sie in dieser Sprache, dass Verkettung von Abbildungen mit Homotopie verträglich ist.

*Übungen zu Abschnitt 7.b.*

7.42. ÜBUNG. Es seien  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  CW-Spektren.

- (1) Definieren Sie ein geeignetes CW-Spektrum  $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$  mit Abbildungen  $i: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E} \vee \mathbb{F}$  und  $j: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E} \vee \mathbb{F}$  vom Grad 0.
- (2) Zeigen Sie, dass es in der Kategorie  $\mathcal{SCW}_0$  die universelle Eigenschaft eines Koproduktes erfüllt.
- (3) Konstruieren Sie Abbildungen  $p: \mathbb{E} \vee \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$  und  $q: \mathbb{E} \vee \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  vom Grad 0, so dass  $p \circ i = \text{id}_{\mathbb{E}}$ ,  $q \circ j = \text{id}_{\mathbb{F}}$  und  $p \circ j = q \circ i = 0$ .

7.43. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Es seien  $X$  und  $Y$  punktierte CW-Komplexe, dann ist  $S^k X \vee S^k Y \hookrightarrow S^k X \times S^k Y$  eine  $(2k - 2)$ -zusammenhängende Abbildung.
- (2) Es seien  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  und  $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$  die Spektren aus Aufgabe 7.42. Zeigen Sie mit Teil (1) und Aufgabe 7.42, dass  $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$  die universelle Eigenschaft eines Produkts in  $\mathcal{SHCW}_0$  erfüllt.

7.44. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Die Verknüpfung von Abbildungen in der Kategorie  $\mathcal{SHCW}_0$  ist bilinear bezüglich der Addition.
- (2) Das Koproduct aus Aufgabe 7.42 ist auch ein Koproduct in  $\mathcal{SHCW}_0$ . Insbesondere existieren alle Koproducte in  $\mathcal{SHCW}_0$ .
- (3) Schließen Sie hieraus mit Hilfe abstrakter Argumente (alternativ zu Aufgabe 7.43), dass jedes Koproduct gleichzeitig ein Produkt ist.

*Zusatz:* Formulieren Sie passende universelle Eigenschaften für das obige Biproduct (simultane Produkt und Koproduct), wenn wir Abbildungen von beliebigem Grad zulassen.

*Übungen zu Abschnitt 7.c.*

7.45. ÜBUNG. Es seien  $\mathbb{E} = (E_k, s_k)_k$ ,  $\mathbb{F} = (F_\ell, t_\ell)_\ell$ ,  $\mathbb{G} = (G_m, u_m)_m$  CW-Spektren. Zeigen Sie:

- (1) Eine Folge von Abbildungen  $\mu_{k,\ell}: E_k \wedge F_\ell \rightarrow G_{k+\ell}$  induziert genau dann für alle  $A = B \cup C \subset \mathbb{N}$  mit  $\#A = \infty$  eine strikte Abbildung  $\mu_{B,C}: \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$ , wenn für alle  $k, \ell$  gilt, dass

$$\mu_{k+1,\ell} \circ (s_k \wedge \text{id}_{F_\ell}) = u_{k+\ell} \circ S\mu_{k,\ell} = \mu_{k,\ell+1} \circ (\text{id}_{E_k} \wedge (-1)^k t_\ell).$$

- (2) Wenn die Bedingung aus (1) erfüllt ist, existiert eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung  $\mu: \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$ , so dass  $\mu_{B,C} \sim \mu \circ \eta_{B,C}$ .

7.46. ÜBUNG. Konstruieren Sie Homotopieäquivalenzen  $\mu_{k,\ell}: S^k \wedge S^\ell \rightarrow S^{k+\ell}$ , die den Bedingungen aus Aufgabe 7.45 (1) genügen, mit  $\mu_{0,0} = \text{id}_{S^0}: S^0 \wedge S^0 \rightarrow S^0$ . Es bezeichne  $\tau_{k,\ell}: S^k \wedge S^\ell \rightarrow S^\ell \wedge S^k$  den Vertauschungshomöomorphismus mit  $\tau(x \wedge y) = y \wedge x$ . Zeigen Sie, dass  $\mu_{\ell,k} \circ \tau_{k,\ell}$  zu  $(-1)^{k\ell} \mu_{k,\ell}$  homotop ist, wobei  $-1: S^{k+\ell} \rightarrow S^{k+\ell}$  eine beliebige Abbildung vom Abbildungsgrad  $-1$  bezeichne.

*Übungen zu Abschnitt 7.d.*

7.47. ÜBUNG. Es sei  $\mathbb{HZ} = (HZ_k, s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zu  $\mathbb{Z}$ , und es bezeichne  $1_k \in \pi_k(HZ_k) \cong \mathbb{Z}$  den kanonischen Erzeuger mit  $s_k \circ S1_k = s_{k+1}$ .

- (1) Konstruieren Sie Abbildungen  $\mu_{k,\ell}: H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \rightarrow H\mathbb{Z}_{k+\ell}$ , die den Bedingungen aus Aufgabe 7.45 (1) genügen, mit  $\mu_{k,\ell}(1_k \wedge 1_\ell) = 1_{k+\ell}$ , und beweisen Sie Eindeutigkeit bis auf Homotopie.
- (2) Zeigen Sie, dass für alle  $k, \ell, m \geq 0$  die folgenden Paare von Abbildungen jeweils homotop sind:

$$\begin{aligned} \mu_{k+\ell,m} \circ (\text{id}_{H\mathbb{Z}_k} \wedge \mu_{\ell,m}) &\sim \mu_{k,\ell+m} \circ (\mu_{k,\ell} \wedge \text{id}_{H\mathbb{Z}_m}), \\ \mu_{0,k} \circ (1_0 \wedge \text{id}_{H\mathbb{Z}_k}) &\sim \text{id}_{H\mathbb{Z}_k}: S^0 \wedge H\mathbb{Z}_k \longrightarrow H\mathbb{Z}_k, \\ \text{und } \mu_{k,0} \circ (\text{id}_{H\mathbb{Z}_k} \wedge 1_0) &\sim \text{id}_{H\mathbb{Z}_k}: H\mathbb{Z}_k \wedge S^0 \longrightarrow H\mathbb{Z}_k. \end{aligned}$$

7.48. ÜBUNG. Es seien  $\mu_{k,\ell}: H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \rightarrow H\mathbb{Z}_{k+\ell}$  die Abbildungen aus Aufgabe 7.47. Es bezeichne  $\tau_{k,\ell}: H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \rightarrow H\mathbb{Z}_\ell \wedge H\mathbb{Z}_k$  den Vertauschungshomöomorphismus mit  $\tau(x \wedge y) = y \wedge x$ . Zeigen Sie:

- (1) Es gibt für alle  $k \geq 1$  eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung  $-1: H\mathbb{Z}_k \rightarrow H\mathbb{Z}_k$ , so dass  $(-1)_* = -\text{id}_{\pi_k(H\mathbb{Z}_k)}$ .
- (2) Für alle  $k, \ell \geq 0$  sind die Abbildungen  $\mu_{\ell,k} \circ \tau_{k,\ell}$  und  $(-1)^{k+\ell} \circ \mu_{k,\ell}: H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \rightarrow H\mathbb{Z}_{k+\ell}$  homotop.

7.49. ÜBUNG. Es sei  $(\mathbb{E}, \mu, \varepsilon)$  ein Ringspektrum und  $\mathbb{F}$  ein beliebiges Spektrum. Beweisen Sie mit Hilfe von Satz 7.20 und Definition 7.21, dass  $(\mathbb{F} \wedge \mathbb{E}, \text{id} \wedge \mu)$  ein  $\mathbb{E}$ -Modulspektrum ist.

7.50. ÜBUNG. Es sei  $A$  eine abelsche Gruppe und  $\mathbb{M}A$  ihr Moore-Spektrum. Zeigen Sie, dass

$$\pi_k(\mathbb{H}\mathbb{Z} \wedge \mathbb{M}A) \cong \begin{cases} A & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Konstruieren Sie eine stabile Abbildung  $\mathbb{H}A \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{Z} \wedge \mathbb{M}A$ , die auf allen  $\pi_k$  Isomorphismen induziert.

7.51. ÜBUNG. Beweisen Sie mindestens einen der Punkte (1)–(4) aus Proposition 7.26 mit Hilfe von Satz 7.20 und Definition 7.21.

7.52. ÜBUNG. Es sei  $\mathbb{E}$  ein Ring- und  $\mathbb{F}$  ein Rechts- $\mathbb{E}$ -Modulspektrum. Überprüfen Sie Bemerkung 7.27, wonach  $\tilde{F}_\bullet(X)$  und  $\tilde{F}^\bullet(X)$  für jeden Raum  $X$  graduierte Rechts- $E^\bullet$ -Moduln sind, und stetige Abbildungen graduiert  $E^\bullet$ -lineare Abbildungen induzieren. Dabei bedeutet „graduiert“ wieder, dass sich bei der Multiplikation homogener Elemente die Grade addieren.

*Übungen zu Abschnitt 7.e.*

7.53. ÜBUNG. Es sei  $f: (Z, U) \rightarrow (W, V)$  eine stetige Abbildung beliebiger Paare. Beweisen Sie die Definition 7.34 zugrunde liegende Behauptung, wonach  $f^*: E^\bullet(W, V) \rightarrow E^\bullet(Z, U)$  nicht von der Wahl der Abbildung  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Approximationen durch Paare von CW-Komplexen abhängt. Zeigen Sie dann, dass  $E^\bullet$  ein homotopieinvarianter Funktor ist.

7.54. ÜBUNG. Es seien  $(X, A) \rightarrow (Z, U)$  und  $(Y, B) \rightarrow (W, V)$  Approximationen durch Paare von CW-Komplexen. Zeigen Sie, dass  $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$  eine Approximation von  $(Z \times W, U \times W \cup Z \times V)$  durch Paare von CW-Komplexen ist.

*Hinweis:* Arbeiten Sie mit Abbildungskegeln, und beginnen Sie mit dem Spezialfall  $U = V = \emptyset$ .

## Dualität

In allgemeinen monoidalen Kategorien gibt es einen Begriff von starker Dualität. In der stabilen Homotopiekategorie  $\mathcal{SHCW}$  der CW-Spektren ist das die sogenannte Spanier-Whitehead- oder  $S$ -Dualität. Beim Übergang von einem Raum zu seinem Dualraum vertauschen Homologie und Kohomologie ihre Rollen. Motiviert von unseren Überlegungen zur Poincaré-Dualität in der Bordismustheorie führen wir Orientierungen und Fundamentalklassen ein. Anschließend beweisen wir den Thom-Isomorphismussatz und Poincaré-Dualität, indem wir den Thom-Isomorphismus mit Spanier-Whitehead-Dualität kombinieren.

### 8.a. Spanier-Whitehead-Dualität

In diesem Kapitel führen wir eine stabile Dualität zwischen topologischen Räumen  $X$  und  $X^*$  ein, so dass die Homologie von  $X$  genau die Kohomologie von  $X^*$  ist und umgekehrt. Streng genommen handelt es sich um eine Dualität zwischen (Einhängungs-) Spektren. Sie funktioniert besonders gut für endliche Spektren, oder äquivalent für endliche CW-Komplexe. Kompakte glatte Mannigfaltigkeiten sind typische Beispiele hierfür, und wir können das Dual einer kompakten Mannigfaltigkeit explizit angeben als Thom-Spektrum ihres stabilen Normalenbündels; dazu folgen wir Dold und Puppe [DP]. Im nächsten Abschnitt beweisen wir den Thom-Isomorphismus-Satz und erhalten als Korollar verschiedene Dualitätssätze für glatte Mannigfaltigkeiten.

Es sei  $(\mathcal{C}, \otimes, E)$  eine monoidale Kategorie, siehe Abschnitt 4.b. Wir erinnern uns auch an die natürlichen Isomorphismen  $\lambda$  und  $\rho$  aus Definition 4.9. In einer monoidalen Kategorie heißt ein Objekt  $B$  *schwach dual* zu  $A$ , wenn es für alle Objekte  $C$  eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C \otimes A, E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B) \tag{8.1}$$

gibt. Für  $C = B$  entspricht dann  $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B)$  der *schwachen Auswertungsabbildung*

$$\varepsilon = \varepsilon_A: B \otimes A \rightarrow E.$$

Wenn zu jedem Objekt  $A$  ein duales Objekt  $DA = B$  existiert, erhält man durch Auswahl von  $DA$  einen kontravarianten Funktor  $D: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Falls nicht, kann man zur vollen Unterkategorie  $\mathcal{C}^*$  der dualisierbaren Objekte übergehen. Dabei ist  $E$  dual zu sich selbst, wir setzen also  $DE = E$ . Der zu  $f: A \rightarrow B$  *duale Morphismus*  $Df: DB \rightarrow DA$  wird so definiert, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} DB \otimes A & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} & DB \otimes B \\ Df \otimes \mathrm{id} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_B \\ DA \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon_A} & E \end{array}$$

kommutiert.

Wenn auch  $DA$  ein schwaches Dual besitzt, können wir eine natürliche Abbildung  $\delta_A: A \rightarrow DDA$  angeben, die gemäß (8.1) der Identität  $\mathrm{id}_{DA}$  entspricht. Dann nennen wir  $A$  *reflexiv*, wenn  $\delta_A$  ein Isomorphismus ist.

8.1. BEISPIEL. Es sei  $\mathcal{C}$  eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Dann hat jedes Objekt  $C$  ein schwach duales Objekt  $D = \text{hom}(C, E)$ , und  $\varepsilon_C = \text{ev}_{C,E}$  ist die schwache Auswertungsabbildung aufgrund der universellen Eigenschaft aus Definition 4.9 (3). Der duale Morphismus zu  $f: A \rightarrow B$  ist  $\text{hom}(f, E): \text{hom}(B, E) \rightarrow \text{hom}(A, E)$ .

Noch konkreter sei  $\mathcal{C} = \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$ , dann ist  $DV = V^*$  der Dualraum,  $\varepsilon_V: V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{k}$  die Auswertungsabbildung mit  $\alpha \otimes v \mapsto \alpha(v)$ , und  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  ist der duale Morphismus zu  $f: V \rightarrow W$ . Ein Vektorraum  $V$  ist reflexiv, wenn  $V \cong (V^*)^*$  gilt, also genau dann, wenn er endlich-dimensional ist. Daher heißen reflexive Objekte manchmal auch *endlich*.

8.2. PROPOSITION UND DEFINITION. *Es sei  $(\mathcal{C}, \otimes, E)$  eine monoidale Kategorie. Für Objekte  $A, B$  von  $\mathcal{C}$  und einen Morphismus  $\varepsilon: A \otimes B \rightarrow E$  sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Es gibt eine Ko-Auswertungsabbildung  $\eta: E \rightarrow A \otimes B$ , so dass*

$$\text{id}_A: A \xrightarrow{\lambda^{-1}} E \otimes A \xrightarrow{\eta \otimes \text{id}} A \otimes B \otimes A \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} A \otimes E \xrightarrow{\rho} A, \quad (1a)$$

$$\text{id}_B: B \xrightarrow{\rho^{-1}} B \otimes E \xrightarrow{\text{id} \otimes \eta} B \otimes A \otimes B \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} E \otimes B \xrightarrow{\lambda} B. \quad (1b)$$

(2) *Für alle Objekte  $C, D$  von  $\mathcal{C}$  ist die natürliche Abbildung  $\varphi_{C,D}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D \otimes B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C \otimes A, D)$  bijektiv, wobei*

$$\varphi_{C,D}(f): C \otimes A \xrightarrow{f \otimes \text{id}} D \otimes B \otimes A \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} D \otimes E \xrightarrow{\rho} D.$$

Falls eine dieser Aussagen gilt, heißt  $A$  stark dualisierbar mit starkem Dual  $B$ .

Später benutzen wir Eigenschaft (1) zum Nachweis der starken Dualität. In den Anwendungen arbeiten wir oft mit (2), siehe Bemerkung 8.5. Diese Aussage bedeutet, dass Tensorieren mit stark dualen Objekten adjungierte Funktoren liefert. Eigenschaft (2) impliziert, dass starke Duale insbesondere schwache Duale im Sinne von (8.1) sind.

In einer symmetrischen monoidalen Kategorie spielen  $A$  und  $B$  die gleiche Rolle. Also ist  $A$  genau dann starkes Dual von  $B$ , wenn  $B$  starkes Dual von  $A$  ist, und stark dualisierbare Objekte sind automatisch reflexiv.

BEWEIS. Die Behauptung ist die Äquivalenz zweier Definitionen adjungierter Funktoren, die folgenden Argumente sind daher Standard. Sei (1) erfüllt, dann definieren wir eine Umkehrabbildung  $\psi_{C,D}$  zu  $\varphi_{C,D}$  durch

$$\psi_{C,D}(g): C \xrightarrow{\rho^{-1}} C \otimes E \xrightarrow{\text{id} \otimes \eta} C \otimes A \otimes B \xrightarrow{g \otimes \text{id}} D \otimes B.$$

Um zu sehen, dass  $\varphi_{C,D} \circ \psi_{C,D} = \text{id}$ , benutzen wir (1a) im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} C \otimes A & \longrightarrow & C \otimes E \otimes A & \xrightarrow{\eta} & C \otimes A \otimes B \otimes A & \xrightarrow{g} & D \otimes B \otimes A \\ & & & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ & & & & C \otimes A \otimes E & \xrightarrow{g} & D \otimes E \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & C \otimes A & \xrightarrow{g} & D. \end{array}$$

Entsprechend folgt  $\psi_{C,D} \circ \varphi_{C,D} = \text{id}$  aus (1b).

Wenn umgekehrt (2) gilt, sei  $\eta = \varphi_{E,A}^{-1}(\lambda)$ . Dann folgt (1a) aus der Definition von  $\varphi_{E,A}$ , denn

$$\begin{array}{ccc} E \otimes A & \xrightarrow{\eta} & A \otimes B \otimes A \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ A & \xleftarrow{\rho} & A \otimes E. \end{array}$$

Nach Definition von  $\varphi_{C,D}$  gilt  $\varepsilon = \varphi_{B,E}(\lambda^{-1})$ . Wir können jetzt  $\psi_{C,D}$  wie oben definieren und  $\varphi_{C,D} \circ \psi_{C,D} = \text{id}$  überprüfen. Da  $\varphi_{C,D}$  bijektiv ist, ist  $\psi_{C,D}$  die Umkehrabbildung. Also gilt  $\psi_{B,E}(\varepsilon) = \lambda^{-1}$ , und daraus folgern wir (1b) ähnlich wie oben.  $\square$

8.3. BEISPIEL. Selbst in abgeschlossenen monoidalen Kategorien ist nicht immer jedes Objekt stark dualisierbar.

- (1) Ein  $\mathbb{k}$ -Vektorraum ist genau dann stark dualisierbar, wenn er endlich-dimensional ist.
- (2) Sei  $R$  kommutativer Ring mit Eins. Dann ist ein  $R$ -Modul genau dann stark dualisierbar, wenn er endlich erzeugt und projektiv ist.

Da  $\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$  und  $\mathcal{M}od_R$  symmetrisch monoidal sind, ist Dualität hier eine symmetrische Relation.

8.4. DEFINITION. Das starke Dual in der stabilen Homotopiekategorie  $(\mathcal{S}HCW, \wedge, \mathbb{S})$  heißt *Spanier-Whitehead-Dual* oder *S-Dual*. Wenn  $\mathbb{S}X$  zu  $\Sigma^{-n}\mathbb{S}X^*$  stark dual ist, heißt  $X^*$  ein Spanier-Whitehead-Dual vom Grad  $n$  mit *Auswertungsabbildung*  $\varepsilon_n: X^* \wedge X \rightarrow S^n$ .

8.5. BEMERKUNG. Da die monoidale Kategorie  $\mathcal{S}HCW$  nach Satz 7.20 graduiert symmetrisch ist, ist dann  $X$  auch ein Spanier-Whitehead-Dual zu  $X^*$ . Dualisierbare Räume sind also reflexiv, was auch in der Kategorie  $\mathcal{S}HCW$  eine starke Einschränkung ist. Immerhin kann man zeigen, dass endliche CW-Spektren immer ein ebenfalls endliches duales Spektrum besitzen.

Wir müssen etwas mit den Vorzeichen aufpassen. Es sei  $X^*$  ein Spanier-Whitehead-Dual von  $X$  vom Grad  $n$ . Zur Auswertungsabbildung  $\varepsilon_n: X^* \wedge X \rightarrow S^n$  gehört nach Definition 8.2 (1) eine Koauswertungsabbildung  $\eta_n: S^n \rightarrow X \wedge X^*$ , so dass

$$\begin{aligned} \text{id}_{S^n X}: S^n \wedge X &\xrightarrow{\eta_n \wedge \text{id}} X \wedge X^* \wedge X \xrightarrow{\text{id} \wedge \varepsilon_n} X \wedge S^n \xrightarrow{\tau} S^n \wedge X, \\ \text{id}_{S^n X^*}: S^n \wedge X^* &\xrightarrow{(-1)^n \tau_0} X^* \wedge S^n \xrightarrow{\text{id} \wedge \eta_n} X^* \wedge X \wedge X^* \xrightarrow{\varepsilon_n \wedge \text{id}} S^n \wedge X^*. \end{aligned}$$

Hierbei sei  $\tau_0$  die „naive“ Transposition aus Bemerkung 3.74 (2). Da sowohl  $S^n$  als auch  $C(\mathbb{R}^n|K)$  der  $n$ -te Raum des jeweiligen Spektrums sind, entspricht  $\tau_{n,n} = (-1)^{n \cdot n} \tau_0$  genau der Transposition gemäß Satz 7.20.

Wir geben eine (ko-) homologische Interpretation der Bedingung (2) in Definition 8.2. Es sei  $\mathbb{E}$  ein Spektrum, das wir gemäß Beispiel 7.23 (1) als Linksmodulspektrum über dem Sphärenspektrum  $\mathbb{S}$  auffassen. Außerdem repräsentiert  $\eta_n$  eine Homologieklass  $[\eta_n] \in \pi_n^{\mathbb{S}}(X \wedge X^*)$ . Unter der Annahme, dass  $X$  ein endlicher CW-Komplex ist, sei  $[a] \in E^k(X)$  gegeben durch  $a: S^\ell X \rightarrow E_{k+\ell}$ . Aus Definition 7.25 und der Konstruktion von  $\psi$  im Beweis von Proposition 8.2 ergibt sich, dass

$$\psi_{\mathbb{S}, \mathbb{E}}(a) = \eta_n / a: S^{n+\ell} \xrightarrow{S^\ell \eta_n} S^\ell X \wedge X^* \xrightarrow{a \wedge \text{id}} E_{k+\ell} \wedge X^*.$$

Das gleiche Argument funktioniert auch für stabile Abbildungen  $a \in [\mathbb{S}X, \mathbb{E}]_{-k}$ . Also erhalten wir eine (ko-) homologische Dualität

$$\psi_{\mathbb{S}, \mathbb{E}} = \eta_n / \cdot: E^k(X) \xrightarrow{\cong} E_{n-k}(X^*).$$

Um Spanier-Whitehead-Duale zu konstruieren, benötigen wir noch einen neuen Begriff.

8.6. DEFINITION. Eine Teilmenge  $Y \subset X$  heißt *Umgebungsretrakt*, wenn es eine Umgebung  $U \subset X$  von  $Y$  und eine Retraktion  $p: U \rightarrow Y$  gibt. Letztere heißt dann auch *Umgebungsretraktion*.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie wir Räume und Paare von Räumen durch Paare von CW-Komplexen approximieren können. Den Ausschneidungssatz 7.36 können wir als Satz über solche Approximationen verstehen. Wir arbeiten im Folgenden daher nicht mit CW-Komplexen, sondern mit Raumpaaren. Eine Approximation durch Paare von CW-Komplexen ist im Folgenden stets möglich, vereinfacht die Situation jedoch nicht. Wir erinnern uns an die Schreibweise  $X|x = (X, X \setminus \{x\})$  aus Abschnitt 3.e. Allgemeiner sei  $X|A = (X, X \setminus A)$  für jede Teilmenge  $A \subset X$ . Mit  $C(X|x) = X // (X \setminus \{x\})$  und  $C(X|A) = X // (X \setminus A)$  bezeichnen wir die zugehörigen Homotopiequotienten.

8.7. SATZ (Spanier-Whitehead-Dualität). *Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter Umgebungsretrakt. Dann ist  $C(\mathbb{R}^n|K)$  ein Spanier-Whitehead-Dual von  $K_+$ .*

BEWEIS. Wir fassen  $K$  als 0-ten Raum des Spektrums  $\mathbb{S}K$  auf, und  $C(\mathbb{R}^n|K)$  als  $n$ -ten Raum des dualen Spektrums. Eine Auswertungsabbildung  $\varepsilon_n: C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \rightarrow S^n$  wird gegeben durch

$$\varepsilon_n((x, t) \wedge k) = (x - k, t) \in C(\mathbb{R}^n|0) \xrightarrow{\sim} S^n .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn sie bildet Basispunkt auf Basispunkt ab, und wenn  $(x, t)$  nicht in der Basis des Kegels liegt, also  $t < 1$ , gilt  $x \notin K$ , somit  $x - k \neq 0$ .

Es sei  $R > 0$  so groß, dass  $K \subset B_R(0)$ . Mit dem Lemma 1.30 von Urysohn finden wir eine stetige Abschneidefunktion  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow I$  mit  $\psi|_K \equiv 1$  und  $\text{supp } \psi \subset U$ . Außerdem sei  $p: U \rightarrow K$  die Umgebungsretraktion. Wir konstruieren eine Koauswertungsabbildung  $\eta_n: S^n \rightarrow K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|K)$  für  $(x, t) \in C(\mathbb{R}^n|_{B_R(0)}) \sim S^n$  durch

$$\eta_n(x, t) = p(x) \wedge (x, \psi(x)t) .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn da  $\text{supp } \psi \subset U$ , brauchen wir  $p(x)$  nur auf Punkte  $x \in U$  anzuwenden. Und schließlich ist  $|x| \geq R$  falls  $t < 1$ , also insbesondere  $x \notin K$ . Sobald wir gezeigt haben, dass  $\varepsilon_n$  und  $\eta_n$  die Bedingungen aus Bemerkung 8.5 erfüllen, folgt auch die Eindeutigkeit von  $\eta_n$  bis auf stabile Homotopie.

Wir überprüfen die Bedingungen aus Proposition 8.2 (1). Zu (1a) betrachten wir die Verkettung

$$\begin{aligned} S^n \wedge K_+ \sim C(\mathbb{R}^n|_{B_R(0)}) \wedge K_+ &\xrightarrow{\eta_n \wedge \text{id}} K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \xrightarrow{\text{id} \wedge \varepsilon_n} K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0) \sim K_+ \wedge S^n \\ (x, t) \wedge k &\longmapsto p(x) \wedge (x, \psi(x)t) \wedge k \longmapsto p(x) \wedge (x - k, \psi(x)t) . \end{aligned}$$

Um eine Homotopie zur Transpositionsabbildung  $\tau: S^n \wedge K_+ \rightarrow K_+ \wedge S^n$  zu finden, ersetzen wir im Bild  $K$  zunächst durch  $U$ . Das Element  $(x - k, \psi(x)t) \in C(\mathbb{R}^n|0)$  „sieht“ nur Punkte von kleinem Abstand  $|x - k|$ . Genauer gesagt, wählen wir  $r > 0$  so klein, dass  $x \in U$  falls  $k \in K$  und  $|x - k| < r$ . Mit einer weiteren Abschneidefunktion erreichen wir, dass  $(x, t) \wedge k$  auf den Basispunkt abgebildet wird, wenn  $|x - k| \geq r$ . Daher ist die obige Abbildung als Abbildung nach  $U_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0)$  homotop zu

$$C(\mathbb{R}^n|_{B_R(0)}) \wedge K_+ \ni (x, t) \wedge k \longmapsto k \wedge (x - k, \psi(x)t) \in K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0) .$$

Mit Hilfe der Retraktionsabbildung  $r$  können wir diese Homotopie auf  $K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0)$  „herunterdrücken“. Die obige Abbildung ist wiederum homotop zu

$$C(\mathbb{R}^n|_{B_R(0)}) \wedge K_+ \ni (x, t) \wedge k \longmapsto k \wedge (x, \psi(x)t) \in K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0) ,$$

indem wir  $x - k$  durch  $x - sk$  ersetzen. Denn falls  $(x, t)$  nicht in der Basis des Kegels liegt (also falls  $t < 1$ ), ist  $|x| \geq R$ , somit  $x - sk \neq 0$  für alle  $s \in I$ .

Zu (1b) betrachten wir die Verkettung

$$C(\mathbb{R}^n|K) \wedge C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \xrightarrow{\text{id} \wedge \eta_n} C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|K) \xrightarrow{\varepsilon_n \wedge \text{id}} C(\mathbb{R}^n|0) \wedge C(\mathbb{R}^n|K)$$

$$(y, u) \wedge (x, t) \longmapsto (y, u) \wedge p(x) \wedge (x, \psi(x)t) \longmapsto (y - p(x), u) \wedge (x, \psi(x)t) .$$

Wie im obigen Beweis dürfen wir annehmen, dass alle Punkte  $(y, u) \wedge (x, t)$  auf den Basispunkt abgebildet werden, es sei denn  $|y - p(x)| < r$  und  $|x - p(x)| < r$ ; letzteres gilt bei geeigneter Wahl von  $r$ , da  $p(x) = x$  für alle  $x \in K$ . Das nutzen wir aus, um zunächst im zweiten Faktor  $x$  in  $y$  zu deformieren. Anschließend homotopieren wir  $y - p(x)$  im ersten Faktor zunächst zu  $-p(x)$ , dann zu  $-x$ . Die Abbildung  $-\text{id}: C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \rightarrow C(\mathbb{R}^n|0)$  hat Abbildungsgrad  $(-1)^n$  nach Folgerung 3.91, die obige Abbildung ist also homotop zu  $(-1)^n \tau_0$ . Mit Bemerkung 8.5 ist der Satz bewiesen.  $\square$

Wir erinnern uns an den Whitney-Einbettungssatz 6.44, den Satz 6.43 von der Röhrenumgebung, die Definition 6.42 des Thom-Raumes eines Vektorbündels und die Definition 6.45 des stabilen Normalenbündels.

8.8. DEFINITION. Es sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Einbettung einer  $m$ -dimensionalen glatten geschlossenen Mannigfaltigkeit. Das *normale Thom-Spektrum*  $M\nu$  von  $f$  ist als Einhängungsspektrum definiert durch

$$M\nu_k = \begin{cases} \text{pt} & \text{falls } k < n, \text{ und} \\ S^{k-n}M\nu & \text{falls } k \geq n. \end{cases} \quad (1)$$

Wenn  $M$  einen Rand hat, definieren wir das *relative normale Thom-Spektrum*  $M\bar{\nu}$  durch

$$M\bar{\nu}_k = M\nu_k / M(\nu|_{\partial M})_k . \quad (2)$$

Der Raum  $M\bar{\nu}_k$  heißt auch *relativer Thom-Raum*. Aus den Vorüberlegungen zu Definition 6.45 folgt, dass  $M\nu$  und  $M\bar{\nu}$  bis auf stabile Isomorphismen nicht von der Wahl der Einbettung  $f$  abhängen. An der folgenden Konstruktion erkennt man gut, dass Spanier-Whitehead-Dualität eine stabile Konstruktion ist.

8.9. FOLGERUNG. *Das relative normale Thom-Spektrum einer glatten kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  mit Rand ist Spanier-Whitehead-dual zu  $M$ . Dabei faktorisiert die Koauswertungsabbildung  $\eta_n: S^n \rightarrow M_+ \wedge M\bar{\nu}_n$  zu einer Einbettung  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  über die Kollaps-Abbildung  $S^n \rightarrow M\bar{\nu}$ .*

BEWEIS. Es sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Einbettung gemäß Satz 6.44, und es sei  $D\nu_{\mathbb{R}^n}M \subset \mathbb{R}^n$  eine Röhrenumgebung gemäß Satz 6.43. Dann ist  $M$  Deformationsretrakt von  $D\nu_{\mathbb{R}^n}M$ , also ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  insbesondere ein Umgebungsretrakt. Wie im Beweis von Satz 8.7 ist  $C(D\nu_{\mathbb{R}^n}M|M)$  ein Spanier-Whitehead-Dual von  $M$  vom Grad  $n$ , und  $C(D\nu_{\mathbb{R}^n}M|M)$  ist homotopieäquivalent zum Thom-Raum  $M\nu_{\mathbb{R}^n}M = M\nu_n$ .

Wenn  $M$  einen Rand hat, können wir jede Einbettung  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu einer Einbettung

$$\bar{f}: \bar{M} = M \cup_{\partial M} (\partial M \times [0, \varepsilon]) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

fortsetzen, da  $\partial M$  kompakt ist. Dann ist  $M$  Retrakt einer Röhrenumgebung  $D\bar{\nu}$  des Normalenbündels  $\bar{\nu} \rightarrow \bar{M}$ , und  $C(D\bar{\nu}|M)$  ist homotopieäquivalent zu  $M\bar{\nu}_n$ . Die Abbildung  $\eta_n$  aus dem Beweis von Satz 8.7 lässt sich zerlegen als

$$\eta_n: C(\mathbb{R}^n|B_R(0)) \xrightarrow{c} M\bar{\nu}_n \xrightarrow{(p \wedge \text{id}) \circ \Delta} M_+ \wedge M\bar{\nu}_n \quad \square$$

$$(x, t) \longmapsto (x, \psi(x)t) \longmapsto p(x) \wedge (x, \psi(x)t) ,$$

dabei ist  $c: S^n \rightarrow M\bar{\nu}_n$  die Kollaps-Abbildung.

## 8.b. Orientierungen und Thom-Isomorphismen

Wir definieren einen geeigneten Orientierungsbegriff für topologische Mannigfaltigkeiten, und für eine bestimmte Art „Bündel“, und zwar als ganzzahlige Kohomologieklassen. Anschließend verallgemeinern wir diesen Begriff auf allgemeine multiplikative Kohomologiefunktoren. Danach beweisen wir den Thom-Isomorphismus-Satz.

Zur Motivation sei zunächst  $V$  ein reeller Vektorraum. Unter einer Orientierung von  $V$  versteht man eine Äquivalenzklasse gleich orientierter Basen, dabei heißen zwei Basen gleich orientiert, wenn die zugehörige Basiswechselmatrix positive Determinante hat. Ein Vektorraum mit Orientierung heißt *orientierter Vektorraum*. Der Raum  $\mathbb{R}^n$  trage fortan diejenige Orientierung, für die die Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  positiv orientiert ist. Ein linearer Isomorphismus  $\varphi: V \rightarrow W$  orientierter Vektorräume heißt *orientiert*, wenn er orientierte Basen auf orientierte Basen abbildet.

Sei jetzt  $p: V \rightarrow X$  ein reelles Vektorbündel vom Rang  $r$  wie in Abschnitt 6.e. Unter einer Orientierung von  $V$  verstehen wir eine Orientierung jeder einzelnen Faser, so dass es einen Atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$  wie in Definition 6.25 gibt, für die alle  $(\varphi_i|_{V_x})^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow V_x$  orientierte Isomorphismen sind, siehe Bemerkung 6.27 (2).

Für eine topologische Definition betrachten wir  $g \in GL(r, \mathbb{R})$  als Abbildung  $g: \mathbb{R}^r|0 \rightarrow \mathbb{R}^r|0$ . Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \cong \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r) & \longrightarrow & \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r \setminus \{0\}) & \xrightarrow[\cong]{\delta} & H^r(\mathbb{R}^r|0) & \longrightarrow & \tilde{H}^r(\mathbb{R}^r) \cong 0 \\ & & \downarrow g^* & & \downarrow g^* & & \\ 0 \cong \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r) & \longrightarrow & \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r \setminus \{0\}) & \xrightarrow[\cong]{\delta} & H^r(\mathbb{R}^r|0) & \longrightarrow & \tilde{H}^r(\mathbb{R}^r) \cong 0 \end{array}$$

für ganzzahlige Kohomologie. Die beiden mittleren Kohomologiegruppen sind jeweils isomorph zu  $\mathbb{Z}$ , da  $(D^r, S^{r-1})$  ein Deformationsretrakt des Paares  $\mathbb{R}^r|0$  ist. Nach Beispiel 3.47 hat die Abbildung  $g$  den Abbildungsgrad  $\deg g = \text{sign det } g$ , somit ist  $g^* = \pm \text{id}$ , je nachdem, ob  $g$  orientierungserhaltend ist oder nicht. Also verhalten sich die zwei Erzeuger von  $H^r(\mathbb{R}^r|0) \cong \mathbb{Z}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul unter linearen Isomorphismen genau wie Orientierungen. Daher nennen wir einen Erzeuger von  $H^r(\mathbb{R}^r|0)$  eine *Orientierung* des  $\mathbb{R}^r$ .

Um Orientierungen auf  $V$  zu erhalten, die stetig von Faser zu Faser variieren, identifizieren wir  $X$  mit dem Nullschnitt von  $V$  und erinnern uns an den Thom-Raum  $MV$ , der zu  $C(V|X)$  homotopieäquivalent ist. Wir definieren eine  $\mathbb{Z}$ -Orientierung von  $V$  als eine Klasse  $\omega \in H^\bullet(V|X)$ , so dass  $\iota_x^* \omega \in H^\bullet(V_x|0)$  den  $\mathbb{Z}$ -Modul  $H^\bullet(V_x|0) \cong H^\bullet(\mathbb{R}^n|0) \cong \mathbb{Z}$  für alle  $x \in X$  erzeugt; dabei sei  $\iota_x: V_x \rightarrow V$  die Inklusionsabbildung.

Diesen Orientierungsbegriff verallgemeinern wir für beliebige multiplikative Kohomologiefunktoren. Sei  $\mathbb{E}$  ein Ringspektrum. Wir nennen ein Element  $\alpha \in E^\bullet(\mathbb{R}^r|0)$  einen *Erzeuger*, wenn die Abbildung

$$E_\bullet(\mathbb{R}^r|0) \longrightarrow E^\bullet \quad \text{mit} \quad a \longmapsto \langle a, \alpha \rangle$$

ein Isomorphismus ist. Zwei Erzeuger unterscheiden sich um eine Einheit des Koeffizientenrings  $E^\bullet$ . Im Falle gewöhnlicher Kohomologie ist  $\alpha$  vom Grad  $r$ , aber das muss für allgemeine  $\mathbb{E}$  nicht so sein.

8.10. DEFINITION. Es sei  $\mathbb{E}$  ein Ringspektrum und  $V \rightarrow X$  ein Vektorbündel vom Rang  $r$ . Eine *E-Orientierung* oder auch *Thom-Klasse* von  $V$  im Grad  $n$  ist ein Element  $\omega \in E^n(V|X)$ , so dass  $\iota_x^* \omega$  für alle  $x \in X$  den  $E^\bullet$ -Modul  $E^\bullet(V_x|x)$  erzeugt.

Für einen Ring  $R$  sprechen wir von  $R$ -Orientierbarkeit, wenn Orientierungen bezüglich des Eilenberg-Mac Lane-Spektrums  $\mathbb{H}R$  gemeint sind.



8.11. BEMERKUNG. Nicht jedes Vektorbündel ist orientierbar. Beispielsweise ist das Möbiusband nicht  $\mathbb{Z}$ -orientierbar, denn bei einem Umlauf um die Basis  $S^1$  geht jeder Erzeuger in sein Negatives über.

Die obige Vorüberlegung legt nah, eine Überlagerung  $X_{V,\mathbb{E}} \rightarrow X$  der punktwisen  $E$ -Orientierungen von  $V$  einzuführen. Als Faser  $X_{V,\mathbb{E},x}$  wählen wir die Menge aller Erzeuger von  $E^\bullet(V_x|x) \cong E^{\bullet+m}$ , und lokale Trivialisierungen von  $X_{V,\mathbb{E}}$  konstruieren wir mit Hilfe der lokalen Trivialisierungen von  $V$  aus Definition 6.25. Dann liefert jede  $E^\bullet$ -Orientierung  $\omega$  von  $V$  einen Schnitt  $o: X \rightarrow X_{V,\mathbb{E}}$  mit  $o(x) = \iota_x^* \omega$ ; diese Abbildung ist für allgemeine  $\mathbb{E}$  aber weder injektiv noch surjektiv. Für gewöhnliche Kohomologie erhalten wir Bijektivität mit Hilfe des Dimensionsaxioms, vergleiche [H1, Theorem 3.26].

Im folgenden Satz nutzen wir aus, dass  $p: V \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz ist. In der relativen Situation  $V \rightarrow (X, Y)$  betrachten wir wie in Definition 8.8 den relativen Thom-Raum

$$M\bar{V} = MV/M(V|_Y).$$

8.12. SATZ (Thom-Isomorphismus). *Es sei  $\mathbb{E}$  ein Ringspektrum und  $\mathbb{F}$  ein Rechts- $\mathbb{E}$ -Modulspektrum. Es sei  $V \rightarrow X$  ein Vektorbündel vom Rang  $r$  über einem endlichen CW-Komplex  $X$ , und es sei  $\omega \in E^n(V|X)$  eine  $E$ -Orientierung. Für jeden Unterkomplex  $Y \subset X$  gibt es Isomorphismen*

$$\vartheta_{k+n} = \cdot \frown \omega: \tilde{F}_{k+n}(M\bar{V}) \longrightarrow F_k(V, V|_Y) \cong \tilde{F}_k(X/Y) \quad (1)$$

$$\text{und} \quad \vartheta^k = \cdot \frown \omega: \tilde{F}^k(X/Y) \cong F^k(V, V_Y) \longrightarrow F^{n+k}(M\bar{V}). \quad (2)$$

Die Voraussetzungen an  $X$  können weiter abgeschwächt werden; das erfordert allerdings zusätzliche Argumente. Für das Folgende reicht uns die obige Variante.

BEWEIS. Wir beginnen mit dem Fall  $Y = \emptyset$ . Wenn das Bündel  $V \cong \mathbb{R}^r \times X$  trivial ist, dann ist der Thom-Raum homotopieäquivalent zu

$$V|X = C(\mathbb{R}^r|0) \wedge X_+ \simeq S^r X_+.$$

Es  $\omega = s^r \omega_0$  mit  $\omega_0 \in E^{n-r}(X)$ . Fixiere  $x_0 \in X$  und  $\iota: \{x_0\} \rightarrow X$ . Da  $\iota_+^* \omega_0 \in E^{n-r}(\{x\}) \cong E^{n-r}$  nach Voraussetzung ein Erzeuger vom Grad  $n-r$  ist, können wir auf beiden Seiten der Abbildungen (1), (2) mit seinem Inversem multiplizieren, und erhalten genau dann Isomorphismen, wenn die ursprünglichen Abbildungen Isomorphismen waren.

Wir dürfen in diesem Schritt daher  $n=r$  und  $\iota_+^* \omega_0 = 1$  annehmen. Es folgt  $\omega_0 = 1 + \alpha \in E^0(X)$  mit  $\alpha \in \ker \iota_+^* = \tilde{E}^0(X)$  und  $\omega = s^r(1 + \alpha)$ . Wir nehmen zunächst an, dass  $X$  zusammenhängend und  $m$ -dimensional ist. Nach Bemerkung 7.33 gilt  $\alpha^{m+1} = 0$ , daher ist  $(1 + \alpha)$  invertierbar mit

$$(1 + \alpha)^{-1} = 1 - \alpha \pm \dots + (-1)^m \alpha^m,$$

und die Abbildungen (1), (2) sind Isomorphismen. Wenn  $X$  nicht zusammenhängend ist, betrachten wir jede Zusammenhangskomponente einzeln und erhalten das gleiche Ergebnis.

Falls  $V \rightarrow X$  nicht trivial ist, können wir die CW-Struktur auf  $X$  durch Unterteilen verfeinern und  $X$  als Vereinigung endlich vieler CW-Komplexe  $X_1, \dots, X_N$  schreiben, auf denen  $V$  trivial ist. Wir schließen durch Induktion über  $N$ ; den Fall  $N=1$  haben wir bereits behandelt. Seien also (1) und (2) Isomorphismen für alle CW-Komplexe, für die eine  $(N-1)$ -fache Vereinigung  $Y = X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}$  ausreicht. Dann trifft das auch auf  $Z = (X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}) \cap X_n$  zu. Wir schreiben  $V_Y$

und  $V_Z$  für die Einschränkungen von  $V$  und betrachten ein kommutatives Diagramm aus Mayer-Vietoris-Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & F_{k+n}(V_Z|Z) & \longrightarrow & F_{k+n}(V_Y|Y) \oplus F_{k+n}(V_{X_n}|X_n) & \longrightarrow & F_{k+n}(V|X) & \xrightarrow{\partial} & F_{k+n-1}(V_Z|Z) & \longrightarrow \\
& \sim\omega \downarrow \cong & & \sim\omega \downarrow \cong & & \sim\omega \downarrow & & \sim\omega \downarrow \cong & \\
\longrightarrow & F_k(Z) & \longrightarrow & F_k(Y) \oplus F_k(X_n) & \longrightarrow & F_k(X) & \xrightarrow{\partial} & F_{k-1}(Z) & \longrightarrow .
\end{array}$$

Aus dem Fünfer-Lemma folgt die Behauptung.

Für  $Y \neq \emptyset$  folgt die Behauptung mit dem Fünferlemma aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & \tilde{F}_{k+n}(M(V|Y)) & \longrightarrow & \tilde{F}_{k+n}(MV) & \longrightarrow & \tilde{F}_{k+n}(M\bar{V}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{F}_{k+n-1}(M(V|Y)) & \longrightarrow \\
& \sim\omega \downarrow \cong & & \sim\omega \downarrow \cong & & \sim\omega \downarrow & & \sim\omega \downarrow \cong & \\
\longrightarrow & F_k(Y) & \longrightarrow & F_k(X) & \longrightarrow & F_k(X, Y) & \xrightarrow{\partial} & F_{k-1}(Y) & \longrightarrow .
\end{array}$$

Genauso beweist man (2). □

Üblicherweise nennt man eine glatte Mannigfaltigkeit  $E$ -orientiert, wenn ihr Tangentialbündel eine  $E$ -Orientierung trägt. Wir haben bisher aber nur mit dem Normalenbündel gearbeitet. Sei  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Einbettung mit Normalenbündel  $\nu M \rightarrow M$ . Dann zerfällt  $\mathbb{R}^n$  für alle  $x \in M$  als direkte Summe in  $\nu_x M$  und  $T_x M$ . Für die Whitney-Summe gilt daher

$$\nu M \oplus TM \cong \underline{\mathbb{R}}^n \rightarrow M .$$

Das reicht, um mit Hilfe des Thom-Isomorphismus normale und tangentielle Orientierungen zu vergleichen. Denn das triviale Bündel lässt sich immer orientieren, indem man einen Erzeuger von  $E^\bullet$  mit der Abbildung  $q: C(\mathbb{R}^n|X) \rightarrow C(\mathbb{R}^n|0)$  zurückzieht. Wenn nichts anderes gesagt wird, wählen wir dazu die *Standardorientierung*  $\omega_{\mathbb{R}^n} = q^*(s^n \varepsilon)$ .

8.13. FOLGERUNG. *Es sei  $X$  ein endlicher CW-Komplex, und es seien  $V, W \rightarrow X$  reelle Vektorbündel. Wenn zwei der drei Bündel  $V, W$  und  $U = V \oplus W$  Orientierungen  $\omega_V, \omega_W$  beziehungsweise  $\omega_U$  tragen, dann lässt sich die dritte Orientierung eindeutig so festlegen, dass*

$$\omega_U = q^* \omega_V \smile p^* \omega_W \in C(U|X) .$$

BEWEIS. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
U & \longrightarrow & V \\
\downarrow & & \downarrow p \\
W & \xrightarrow{q} & X .
\end{array}$$

Es gilt  $DU \cong p^*DW = q^*DV$  und  $SU \cong q^*SV \cup p^*SW$ . Es folgt, dass  $DU_x/SU_x \cong DV_x/SV_x \wedge DW_x/SW_x$  für alle  $x \in X$ . Der Thom-Raum  $MV = DV/SV$  ist zu den relativen Thom-Räumen von  $p^*W \rightarrow (DV, SV)$  und von  $q^*V \rightarrow (DW, SW)$  homöomorph. Wir ziehen eine gegebene Orientierung  $\omega_W \in \tilde{E}^m(MW)$  längs  $p: DV \rightarrow X$  zurück zu  $p^*\omega_W \in \tilde{E}^m(M(p^*W))$  und betrachten den relativen Thom-Isomorphismus

$$\cdot \smile (p^*\omega_W): \tilde{E}^k(MV) \longrightarrow \tilde{E}^{k+m}(MU) .$$

Gegeben  $\omega_V$  erhalten wir ein eindeutiges  $\omega_U$  wie in der Proposition und umgekehrt. Indem wir auf die Fasern an der Stelle  $x \in X$  einschränken, sehen wir, dass mit zweien auch die dritte Klasse eine Orientierung ist. □

### 8.c. Poincaré-Lefschetz-Dualität

Aus Spanier-Whitehead-Dualität leiten wir mit Hilfe des Thom-Isomorphismus Poincaré-Dualität ab. Wir diskutieren einige Schlussfolgerungen. Insbesondere betrachten wir die Schnittform. Da wir Thom-Isomorphismen unter sehr restriktiven Bedingungen konstruiert haben, können wir Poincaré-Dualität nur für glatte geschlossene Mannigfaltigkeiten beweisen. Dazu benötigen wir ein weiteres Resultat aus der Differentialtopologie.

8.14. SATZ (Morse). *Jede glatte Mannigfaltigkeit trägt eine CW-Struktur.*

Es sei jetzt  $M$  eine  $E$ -orientierte glatte kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Einbettung. Gemäß Folgerung 8.13 gibt es also eine normale Orientierung  $\omega_\nu \in E^{n-r}(M\nu)$ . Da  $\nu$  vom Rang  $n - m$  ist, wird in vielen Fällen  $r = m$  gelten, das muss aber nicht zwangsläufig so sein. Außerdem induziert die Spanier-Whitehead Dualität aus Folgerung 8.9 eine Klasse  $\eta_n \in \pi_n^s(M_+ \wedge M\bar{\nu}_n)$  wie in Bemerkung 8.5. Die Verkettung der kohomologischen Spanier-Whitehead-Dualität mit den relativen Thom-Isomorphismen aus Satz 8.12 ergibt Isomorphismen

$$F^k(M) \xrightarrow{\eta_n/} \tilde{F}_{n-k}(M\bar{\nu}_n) \xrightarrow{\smile \omega} F_{r-k}(M, \partial M) \quad \text{mit} \quad \alpha \mapsto ([\eta_n]/\alpha) \frown \omega ,$$

und

$$F^k(M, \partial M) \xrightarrow{\smile \omega} \tilde{F}^{k+n-r}(M\bar{\nu}_n) \xrightarrow{\eta_n/} F_{r-k}(M) \quad \text{mit} \quad \beta \mapsto (\tau_*[\eta_n]) / (\beta \smile \omega) .$$

Diese Isomorphismen heißen (bis auf das Vorzeichen) Poincaré-Dualität ( $\partial M = \emptyset$ ) oder Lefschetz-Dualität. Die Hauptaufgabe in diesem Abschnitt besteht darin, eine Darstellung der Form  $\alpha \mapsto [M] \frown \alpha$  für beide Isomorphismen zu finden, wobei  $[M] \in \tilde{E}^r(M, \partial M)$  nur von der gewählten  $E$ -Orientierung abhängt. Dann erhält man in beiden Fällen Isomorphismen von Rechts- $E^\bullet(M)$ -Modulen.

8.15. DEFINITION. Es sei  $M$  eine kompakte,  $E$ -orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine *Fundamentalklasse* von  $M$  ist eine Klasse  $a \in E_r(M/\partial M)$ , so dass  $a|x \in E_r(M|x)$  für alle  $x \in \overset{\circ}{M}$  ein Erzeuger ist.

Sei  $\omega \in E^{n-r}(M\nu)$  eine normale Orientierung. Mit Bemerkung 8.5 sieht man, dass das Spanier-Whitehead-Dual

$$[M] = ([\eta_n]/1) \frown \omega \in E_r(M/\partial M)$$

von  $\omega$  eine Fundamentalklasse ist; dazu schränkt man  $\omega$  zunächst auf eine zu  $D^m$  homöomorphe Untermannigfaltigkeit ein.

8.16. SATZ (Poincaré-Lefschetz-Dualität). *Es sei  $\mathbb{E}$  ein kommutatives Ringspektrum und  $\mathbb{F}$  ein  $\mathbb{E}$ -Modulspektrum. Es sei  $M$  eine kompakte glatte  $m$ -dimensionale,  $E$ -orientierte Mannigfaltigkeit mit Fundamentalklasse  $[M] \in E_r(M, \partial M)$ . Es sei  $\partial M = A \cup B$ , wobei  $A \cap B$  eine  $(m - 2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\partial M$  sei. Dann induziert das Cap-Produkt mit  $[M]$  einen Isomorphismus von Rechts- $E^\bullet(M)$ -Moduln, der für alle  $k$  gegeben ist durch*

$$\wp = [M] \frown \cdot : F^k(M, A) \longrightarrow F_{r-k}(M, B) .$$

Wir haben aus rein technischen Gründen vorausgesetzt, dass  $M$  glatt ist. Falls  $M$  nicht glatt ist, erhält man Poincaré-Lefschetz-Dualität ohne den Umweg über Spanier-Whitehead-Dualität und Thom-Isomorphismus, muss jedoch etwas mehr arbeiten. Ohne die Voraussetzung, dass  $\mathbb{E}$  kommutativ ist, erhält man immer noch Isomorphismen von abelschen Gruppen für jedes  $k$ , siehe [Ad], wenn man  $\mathbb{F}$  als Links- $\mathbb{E}$ -Modulspektrum auffasst. Wir führen den ganzen Beweis mit den obigen Annahmen, was ihn etwas vereinfacht.

BEWEIS. Es sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Einbettung, und es sei  $\omega \in E^{n-r}(M\nu)$  die zur  $E$ -Orientierung von  $M$  passende Thom-Klasse des Normalenbündels. Nach Folgerung 8.9 faktorisiert die Koauswertungsabbildung  $\eta_n: S^n \rightarrow M_+ \wedge M\bar{\nu}_n$  über  $\bar{\eta}_n: S^n \rightarrow M\bar{\nu}_n$ . Es folgt

$$[\eta_n]/1 = [\bar{\eta}_n] \quad \text{und} \quad [M] = [\bar{\eta}_n] \frown \omega .$$

Im Fall  $A = \emptyset$ ,  $\alpha \in F^k(M)$  erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_n(M\bar{\nu}_n) & \xleftarrow{=} & \pi_n(M\bar{\nu}_n) & \xrightarrow{\sim p^* \omega} & \tilde{E}_r(D\nu/D(\nu_{\partial M})) & \xrightarrow[\cong]{p^*} & E_r(M, \partial M) \\ \uparrow /1 & & \Delta_* \swarrow & & \downarrow \frown \alpha & & \downarrow \frown \alpha \\ \pi_n(D\nu_+ \wedge M\bar{\nu}_n) & \xrightarrow{/\alpha} & \tilde{F}_{n-k}(M\bar{\nu}_n) & \xrightarrow{\sim \omega} & \tilde{E}_r(D\nu/D(\nu_{\partial M})) & \xrightarrow[\cong]{p^*} & F_{r-k}(M, \partial M) , \\ & & \downarrow \sim p^* \alpha & & (1)^{k(n-r)} & & \end{array}$$

in dem das mittlere Quadrat bis auf das angegebene Vorzeichen kommutiert. Dabei haben wir benutzt, dass  $p: D\nu_+ \rightarrow M_+$  eine Homotopieäquivalenz ist. Nach Vorüberlegung erhalten wir den gesuchten Isomorphismus

$$\varphi: F^k(M) \xrightarrow{\cong} F_{r-k}(M, \partial M) \quad \text{mit} \quad \alpha \mapsto (-1)^{k(n-r)}([\eta_n]/\alpha) \frown \omega = [M] \frown \alpha .$$

Im Fall  $B = \emptyset$ ,  $\beta \in F^k(M, \partial M)$  betrachten wir analog das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & \tilde{E}_r(D\nu/D(\nu_{\partial M})) & & & & \\ & \nearrow \sim \omega & \downarrow (1)^{k(n-r)} & \searrow \sim \beta & & & \\ \pi_n(M\bar{\nu}_n) & \xrightarrow{\sim \beta} & F_{n-k}(M\nu_n) & \xrightarrow{\sim \omega} & F_{r-k}(D\nu) & \xrightarrow[\cong]{p^*} & F_{r-k}(M) \\ \downarrow \Delta_* & & \Delta_* \swarrow & & \nearrow /(\beta \smile \omega) & & \\ \pi_n(D\nu_+ \wedge M\bar{\nu}_n) & \xrightarrow{\tau_*} & \pi_n(M\bar{\nu}_n \wedge D\nu_+) & & & & \end{array}$$

und erhalten einen Isomorphismus

$$\varphi: F^k(M, \partial M) \xrightarrow{\cong} F_{r-k}(M) \quad \text{mit} \quad \beta \mapsto (1)^{k(n-r)}(\tau_*[\eta_n])/(\beta \smile \omega) = [M] \frown \beta .$$

Fortsetzung folgt ... □

Wir betrachten jetzt gewöhnliche (Ko-) Homologie mit Koeffizienten  $\mathbb{Z}$ . Als erstes geben wir ein kohomologisches Kriterium für die Existenz einer Orientierung an. Dabei bedeutet „Orientierung“ ohne Angabe eines Ringes oder Spektrums immer  $\mathbb{Z}$ - oder genauer  $H\mathbb{Z}$ -Orientierung.

8.17. PROPOSITION. *Es sei  $M$  eine zusammenhängende glatte  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann trägt  $M$  genau dann eine  $\mathbb{Z}$ -Orientierung, wenn  $H_m(M, \partial M) \cong \mathbb{Z}$  gilt. In diesem Fall ist  $M$  bezüglich jeder gewöhnlichen Homologietheorie orientierbar. Falls  $M$  keine  $\mathbb{Z}$ -Orientierung trägt, gilt  $H_m(M, \partial M) = 0$ .*

*Des weiteren ist  $M$  bezüglich jeder gewöhnlichen  $R$ -Homologietheorie orientierbar, falls  $R$  nur 2-Torsionselemente enthält.*

BEWEIS. Falls  $M$  eine Orientierung trägt, folgt aus Poincaré-Lefschetz-Dualität 8.16, dass

$$H_m(M, \partial M) \cong H^1(M) \cong \mathbb{Z} .$$

Sei umgekehrt  $H_m(M, \partial M) \cong \mathbb{Z}$ , und sei  $[M]$  ein Erzeuger als  $\mathbb{Z}$ -Modul. Fortsetzung folgt

...

8.18. BEISPIEL. Sphären, Tori, komplex und quaternionisch projektive Räume sind stets orientierbar.

Der reell projektive Raum  $\mathbb{R}P^m$  ist nach Beispiel 5.26 genau dann orientierbar, wenn  $m$  ungerade ist.

In den folgenden Überlegungen dürfen wir  $\mathbb{Z}$  durch einen beliebigen Hauptidealring  $R$  ersetzen. Es sei  $A$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Modul. Aus den Übungen 5.103–5.106 schließen wir, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} A \hookrightarrow A \longrightarrow A/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow 0$$

gibt, in der  $A/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} A$  ein freier Modul ist. Mit dem universellen Koeffiziententheorem 6.9 erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^k(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^k(M) &\xrightarrow[\cong]{\langle \cdot, \cdot \rangle} \operatorname{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Z}) \xrightarrow[\cong]{\varphi^*} \operatorname{hom}_{\mathbb{Z}}(H^{m-k}(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M), \mathbb{Z}) \quad (8.2) \\ [\alpha] &\longmapsto \langle \cdot, \alpha \rangle \longmapsto \langle [M] \frown \cdot, \alpha \rangle = \langle [M], \cdot \smile \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Im mittleren Schritt haben wir ausgenutzt, dass jeder Homomorphismus nach  $\mathbb{Z}$  auf dem Torsionsuntermodul verschwindet. Dabei heißt „natürlich“ hier allerdings nur, dass die Isomorphismen verträglich sind mit Abbildungen  $f: M \rightarrow N$  zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension vom Abbildungsgrad 1, das heißt, mit  $f_*[M] = [N]$ .

8.19. FOLGERUNG. *Es sei  $M$  eine glatte, geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeit. Wenn eine Klasse  $\alpha \in H^k(M)$  primitiv ist in dem Sinne, dass es keine Klasse  $\gamma$  und kein  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$  mit  $\alpha = n\gamma$  gibt, dann existiert eine Klasse  $\beta \in H^{m-k}(M)$ , so dass  $\alpha \smile \beta$  ein Erzeuger von  $H^m(M) \cong \mathbb{Z}$  ist.*

BEWEIS. Wenn  $M$  nicht zusammenhängend ist, betrachten wir die Zusammenhangskomponenten einzeln. Als erstes überlegt man sich, dass Torsionsklassen nie primitiv sind, denn aus  $n\alpha = 0$  folgt  $(n+1)\alpha = \alpha$ . Wenn  $\alpha$  primitiv ist, dann kann man  $\alpha$  zu einer Basis von  $H^k(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}(M)$  ergänzen. Aufgrund der obigen Isomorphismen gibt es ein Element  $\beta$  in der dazu dualen Basis von  $H^{m-k}(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M)$ , so dass  $\langle [M], \beta \smile \alpha \rangle = 1$ . Aufgrund von Poincaré-Dualität ist  $\beta \smile \alpha = \pm \alpha \smile \beta$  dann ein Erzeuger des  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $H^m(M)$ .  $\square$

8.20. BEMERKUNG. Es sei  $\mathbb{k}$  ein Körper. Wir erinnern uns an die Definition der Betti-Zahlen und der Eulerzahl aus Definition 5.27, betrachten hier allerdings *unreduzierte* Betti-Zahlen  $b_k(M; \mathbb{k}) = \dim H_k(M; \mathbb{k})$ .

(1) Nach dem universellen Koeffiziententheorem 6.9 gilt

$$b_k(M; \mathbb{k}) = \dim H_k(M; \mathbb{k}) = \dim H^k(M; \mathbb{k}).$$

Wenn  $M$  orientiert ist, ist wegen Folgerung 8.19 die Paarung  $H^k(M; \mathbb{k}) \times H^{m-k}(M; \mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$  mit  $(\alpha, \beta) \mapsto \langle [M], \alpha \smile \beta \rangle$  nicht ausgeartet. Folglich gilt

$$b_k(M; \mathbb{k}) = b_{m-k}(M; \mathbb{k}).$$

(2) Wenn  $M$  außerdem zusammenhängend ist, gilt  $\tilde{H}_k(M; \mathbb{k}) = 0$  für alle  $k \leq 0$  nach Proposition 5.44. Wegen Bemerkung 5.12 (3) folgt  $H_k(M) \cong 0$  für  $k < 0$  und  $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$ . Somit gilt

$$\begin{aligned} b_k(M; \mathbb{k}) &= 0 \quad \text{für alle } k < 0 \text{ und alle } k > m, \text{ und} \\ b_0(M; \mathbb{k}) &= b_m(M; \mathbb{k}) = 1. \end{aligned}$$

Wir dürfen  $\langle [M], \cdot \smile \cdot \rangle$  auf  $H^k(M) \times H^{m-k}(M)$  betrachten. Wegen Proposition 7.31 (4) gilt

$$\langle [M], \beta \smile \alpha \rangle = (-1)^{k(m-k)} \langle [M], \alpha \smile \beta \rangle$$

für  $\alpha \in H^k(M; R)$  und  $\beta \in H^{m-k}(M; R)$ . Das Produkt verschwindet, wenn einer der beiden Faktoren ein Torsionselement ist. Auch dieses Produkt lässt sich für geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeiten definieren, die nicht glatt sein müssen.

8.21. DEFINITION. Es sei  $M$  eine orientierte, geschlossene, glatte Mannigfaltigkeit, und  $R$  ein Hauptidealring oder ein Körper, dann heißt

$$\langle [M], \cdot \smile \cdot \rangle: H^k(M)/\text{Tor}_R H^k(M) \times H^k(M)/\text{Tor}_R H^k(M) \rightarrow R$$

das *Schnittprodukt* auf  $H^\bullet(M; R)/\text{Tor}_R H^\bullet(M; R)$ .

Es sei  $m = \dim M = 2n$  gerade, dann ist die *Schnittform*  $Q_R$  von  $M$  gerade die Einschränkung des Schnittproduktes auf  $H^n(M; R)/\text{Tor}_R H^n(M; R)$ . Wenn  $4|m$  gilt, seien  $b_n^\pm(M) = b_n^\pm(M; \mathbb{R})$  die maximalen Dimensionen von Unterräumen von  $H^n(M; \mathbb{R})$ , auf denen  $Q_{\mathbb{R}}$  positiv beziehungsweise negativ definit ist. Dann heißt  $\sigma(M) = b_n^+(M) - b_n^-(M)$  die *Signatur* von  $M$ .

Man beachte, dass  $Q_{\mathbb{R}}$  nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz, durch  $\sigma(M)$  bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt ist.

8.22. BEMERKUNG. Es sei  $M$  eine orientierbare, geschlossene, glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $m$ .

(1) Wenn  $m$  ungerade ist, verschwindet die Eulerzahl, denn

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k b_k(M; \mathbb{k}) = \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} ((-1)^k + (-1)^{m-k}) b_k(M; \mathbb{k}) = 0.$$

(2) Wenn  $m = 2n$  und  $n$  gerade ist, haben  $\chi(M)$ ,  $\sigma(M)$  und  $b_n(M; \mathbb{R})$  die gleiche Parität, denn

$$\chi(M) - b_n(M; \mathbb{R}) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} b_k(M; \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad b_n(M; \mathbb{R}) - \sigma(M) = 2b_n^-(M).$$

(3) Wenn  $m = 2n$  und  $n$  ungerade ist, ist  $b_n(M; \mathbb{R})$  gerade, denn nur auf gerade-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen gibt es nicht-ausgeartete antisymmetrische Bilinearformen.

8.23. BEISPIEL. Die *zusammenhängende Summe*  $M = M_1 \# M_2$  zweier  $m$ -dimensionaler glatter Mannigfaltigkeiten  $M_1, M_2$  wird konstruiert, indem man aus jeder Mannigfaltigkeit eine zu  $D^m \subset \mathbb{R}^m$  diffeomorphe Teilmenge wählt, ihr Inneres  $B^m$  entfernt, und beide Mannigfaltigkeiten entlang der entstandenen Ränder  $S^{m-1}$  mit einer Isometrie verklebt. Das Resultat ist wieder eine glatte Mannigfaltigkeit. Wenn  $M_1$  und  $M_2$  zusammenhängend sind, hängt das Resultat bis auf Diffeomorphie nicht von der Wahl der Teilmenge  $D^m$  ab, jedoch unter Umständen davon, welche der beiden Homotopieklasse von Isometrien  $S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  man wählt. Deshalb fixiert man Orientierungen von  $M_1$  und  $M_2$  und verklebt so, dass  $M$  eine Orientierung trägt, die sich zu der gegebenen Orientierung auf  $M_i \setminus D^m$  einschränkt.

Es sei  $\mathbb{C}P^2$  die komplex projektive Ebene mit einer festen Orientierung, so dass  $\mathbb{C}P^2$  Signatur 1 hat. Mit  $\overline{\mathbb{C}P^2}$  bezeichnen wir die entgegengesetzt orientierte projektive Ebene. Es gibt keinen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus zwischen ihnen, da  $\overline{\mathbb{C}P^2}$  Signatur  $-1$  hat.

Wir betrachten  $M = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$  und  $M' = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ . Mit der Mayer-Vietoris-Sequenz 6.3 überprüft man, dass

$$H^k(M) \cong H^k(M') \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = 4, \\ \mathbb{Z}^2 & \text{falls } k = 2, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dennoch sind  $M$  und  $M'$  nicht diffeomorph, denn  $M$  hat eine definite und  $M'$  eine indefinite Schnittform (Übung).

Es gibt auch ein Analogon zu (8.2) für Torsions-Elemente. Dazu sei  $A$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modul und  $\alpha \in \text{Ext}(A, \mathbb{Z})$ . Wir betrachten die kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$  und stellen  $M$  mit Satz 8.14 als endlichen CW-Komplex dar. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^k(M; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C^k(M; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & C^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C^{k+1}(M; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C^{k+1}(M; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & C^{k+1}(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

von Kokettenkomplexen. Es sei jetzt  $\beta \in C^{k+1}(M; \mathbb{Z})$  geschlossen mit  $[\beta] \in \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M; \mathbb{Z})$ , und es sei  $n > 0$  minimal mit  $n[\beta] = 0$ . Dann existiert  $\gamma \in C^k(M; \mathbb{Z})$  mit  $\delta\gamma = n\beta$ , und wir betrachten das Bild  $\bar{\beta}$  von  $\frac{\gamma}{n}$  in  $C^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ . Es gilt  $\delta\bar{\beta} = 0 \in C^{k+1}(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ . Somit repräsentiert  $[\bar{\beta}] \in H^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  ein Urbild von  $[\beta]$  unter  $\delta$  in der Kohomologie-Sequenz

$$\dots \longrightarrow H^k(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{H^{k+1}(M; \mathbb{Q})}_{\cong \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_{k+1}(M), \mathbb{Q})} \longrightarrow \dots$$

Da  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  divisibel sind, gilt nach Proposition 5.68 und dem universellen Koeffiziententheorem 6.9, dass

$$H^k(M; \mathbb{Q}) \cong \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad H^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Nun ist  $\bar{\beta}$  nur bis auf ein Element von  $\text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Q})$  bestimmt, aber diese Abbildungen verschwinden auf  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M)$ . Zusammen mit Poincaré-Dualität 8.16 erhalten wir ein wohldefiniertes Produkt

$$(\cdot, \cdot): \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \times \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad (\alpha, \beta) = \langle [M] \frown \alpha, \bar{\beta} \rangle. \quad (8.3)$$

8.24. DEFINITION. Es sei  $M$  eine glatte, geschlossene, orientierte  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann heißt das obige Produkt  $(\cdot, \cdot): \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \times \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  das *Verschlingungsprodukt* auf  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{\bullet}(M)$ . Falls  $\dim M = 2n - 1$  ungerade ist, ist die *Verschlingungsform*  $q$  von  $M$  die Einschränkung des Verschlingungsproduktes auf  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^n(M)$ .

8.25. PROPOSITION. *Es sei  $M$  eine glatte, geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit. Das Verschlingungsprodukt ist nicht ausgeartet, das heißt, zu jedem  $\alpha \in \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \setminus \{0\}$  existiert ein  $\beta \in \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M)$  mit  $(\alpha, \beta) \neq 0$ . Seien  $p, q > 0$  minimal mit  $p\alpha = q\beta = 0$ , dann gilt  $(\alpha, \beta) \in \left(\frac{1}{\text{ggT}(p,q)}\mathbb{Z}\right)/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Für  $\alpha \in H^{k+1}(M)$  und  $\beta \in H^{m-k}(M)$  gilt*

$$(\beta, \alpha) = -(-1)^{km}(\alpha, \beta).$$

Insbesondere ist die Verschlingungsform symmetrisch, wenn  $m \equiv 3 \pmod{4}$ , und antisymmetrisch, wenn  $m \equiv 1 \pmod{4}$ . Anstelle des „unnatürlichen“ Isomorphismus zwischen  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \cong \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M)$  und  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M)$  liefert das Verschlingungsprodukt eine nicht ausgeartete Paarung, ähnlich wie es das Schnittprodukt für die freien Anteile tut.

BEWEIS. Als erstes überlegt man sich, dass es eine wohldefinierte Abbildung

$$H^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \text{im } H^k(M; \mathbb{Q}) \cong \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \text{im } \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(M), \mathbb{Q}) \\ \longrightarrow \text{hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

gibt, da  $\mathbb{Q}$ -wertige Abbildungen auf Torsionselementen verschwinden. Dann überprüft man, dass die Abbildung ein Isomorphismus ist. Da  $0 \neq \bar{\alpha} \in H^k(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \text{im } H^k(M; \mathbb{Q})$ , existiert also ein  $b \in \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M)$  mit  $\langle b, \bar{\alpha} \rangle \neq 0$ , und wir wählen  $\beta = \varphi^{-1}b$ .

Es seien  $\alpha \in C^{k+1}(M; \mathbb{Z})$ ,  $\beta \in C^{m-k}(M; \mathbb{Z})$  und  $p, q$  wie oben gegeben. Wir betrachten  $\bar{\alpha} \in C^k(M; \mathbb{Q})$  und  $\bar{\beta} \in C^{m-k-1}(M; \mathbb{Z})$ , so dass  $p\bar{\alpha}$  und  $q\bar{\beta}$  ganzzahlig sind mit  $\delta(p\bar{\alpha}) = p\alpha$  und  $\delta(q\bar{\beta}) = q\beta$ . Dann gilt

$$0 = \langle [M], \delta(\bar{\alpha} \smile \bar{\beta}) \rangle = \langle [M], \alpha \smile \bar{\beta} \rangle + (-1)^k \langle [M], \bar{\alpha} \smile \beta \rangle = (\alpha, \beta) + (-1)^{k(m-k-1)} (\beta, \alpha),$$

außerdem ist  $(-1)^{k(k+1)} = 1$ .

Um die letzte Behauptung zu zeigen, schreiben wir  $\text{ggT}(p, q) = ap + bq$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}$  und berechnen

$$\text{ggT}(p, q) \cdot (\alpha, \beta) = a(p\alpha, \beta) + b(\alpha, q\beta) = 0. \quad \square$$

8.26. BEMERKUNG. Wir können außerdem den Satz 5.47 von Hurewicz benutzen, um die erste nichtverschwindende reduzierte Homologiegruppe zu bestimmen. Sei etwa  $M$  eine geschlossene, orientierbare, zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit. Dann gilt  $H_1(M) \cong \pi_1(M)^{\text{ab}} \cong H^2(M)$ , und  $H^1(M) \cong \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}) \cong H_2(M)$  sind isomorph zum freien Anteil  $H_1(M) / \text{Tor}_{\mathbb{Z}} H_1(M)$ . Also werden alle (Ko-) Homologiegruppen bis auf Isomorphie von  $\pi_1(M)$  festgelegt. Ein gutes Beispiel ist  $\mathbb{R}P^3$  mit  $\pi_1(\mathbb{R}P^3) \cong \mathbb{Z}/2$ , siehe Übung 2.89 und Beispiel 5.26.

### 8.d. Übungen zu Kapitel 8

*Übungen zu Abschnitt 8.b.*

8.27. ÜBUNG. Es sei  $\mathbb{E}$  ein Ringspektrum und  $\alpha \in E^n(\mathbb{R}^m|0)$ . Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(1) Es sei  $\epsilon \in E^0$  die Eins des Ringspektrums und  $\delta S^{m-1} \epsilon$  ihr Bild unter dem Isomorphismus

$$E^0 = \tilde{E}^0(S^0) \xrightarrow{S} \dots \xrightarrow{S} \tilde{E}^{m-1}(S^{m-1}) \xrightarrow{\delta} E^m(D^m, S^{m-1}) \cong E^m(\mathbb{R}^m|0).$$

Dann gibt es eine Einheit  $\beta \in E^\bullet$ , so dass  $\alpha = \beta \wedge \delta S^{m-1} \epsilon$ .

(2) Das Kronecker-Produkt  $\langle \cdot, \alpha \rangle: E_\bullet(\mathbb{R}^m|0) \rightarrow E_\bullet$  ist ein Isomorphismus.

(3) Für jedes Rechts- $\mathbb{E}$ -Modulspektrum  $\mathbb{F}$  ist  $\langle \cdot, \alpha \rangle: F_\bullet(\mathbb{R}^m|0) \rightarrow F_\bullet$  ein Isomorphismus.



## Literatur

- [Ad] J. F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, The University of Chicago Press, Chicago, 1974.
- [At] M. F. Atiyah, *K*-Theory, W. A. Benjamin, New York, 1967.
- [tD1] T. tom Dieck, Topologie, de Gruyter Lehrbuch, de Gruyter, Berlin, 1991, x+401S.
- [tD2] ———, Algebraic Topology, EMS textbooks in Mathematics, EMS, Zürich, 2008, xii+567S.
- [D] A. Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer, Berlin, 1972, xi+377S.
- [DP] A. Dold, D. Puppe, Duality, Trace and Transfer, Proc. Stekhlov Inst. Math. 154, 1984, 85–103.
- [ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952.
- [F] P. Freyd, Abelian Categories, Harper & Row, New York, 1964, xi+164S.
- [H1] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, xii+544S.,  
<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- [H2] A. Hatcher, Vector bundles and *K*-theory, preprint,  
<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>
- [J] K. Jänich, Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1980, ix+215S.
- [M] P. May, A Concise Course in Algebraic Topology, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago IL, 1999, x+243S.,  
<http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf>
- [Mi] J. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965 ix+65S.
- [Q] B. v. Querenburg: Mengentheoretische Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1973, ix+195S.
- [R] Y. B. Rudyak: On Thom Spectra, Orientability, and Cobordism, Springer, Berlin-Heidelberg, 1998, xii+587S.
- [S] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Corrected reprint, Springer, Berlin, 1981, xvi+528S.
- [SS] L. A. Steen, J. A. Seebach Jr, Counterexamples in Topology, Second edition, Springer, New York - Heidelberg, 1978, xi+244S.
- [Sw] R. W. Switzer, Algebraic Topology—Homotopy and Homology, Springer, Berlin, 1975.



## Stichwortverzeichnis

- Abbildung  
  abgeschlossene, 41  
  adjungierte, 21  
  Alexander-Whitney, 204  
  Auswertungs-, 21  
    schwache, 271  
  charakteristische, 29, 33, 34, 142  
  CW-Spektren, 248  
  Diagonal-, 225  
  eigentliche, 156  
  Einheits-, 261  
  Exponential-, 43, 51, 52, 54  
  Höldersche, 7, 37  
  homotope, 43  
  induzierte  
    Homologie, 174  
    Kohomologie, 218  
    Unterraum, 15  
  injektive, 15, 24  
  Ketten-, 174  
  klassifizierende, 234  
  Koketten-, 218  
  konstante, 6  
  Lipschitz-, 1, 37  
  natürliche, 81  
  Null-, 139, 162  
  Projektions-, 28, 69  
  punktierter, 44, 79  
  Rand-, *siehe* Homomorphismus, Verbindungs-  
  Sequenz-, 86, 164  
  Stabilisierungs-, 182  
  stetige, 6, 7, 19, 21, 23, 37–39  
  surjektive, 24, 41  
  Transpositions-, 224, 263  
  Vektorbündel-, 231  
  Verklebe-, 29, 31, 142  
  von Paaren, 44  
  zelluläre, 33, 144, 175  
Abbildungsgrad, 100, 118, 169  
Abelisierung, 48, 59, 66, 76, 189  
abgeschlossen, 4, 6, 8, 9, 11, 19, 20, 23, 40  
  folgen-, 11, 134  
Abschluss, 6, 32  
Äquivalenz  
  Homotopie-  
    schwache, 145  
  schwache, 145, 179  
  von Kategorien, 73, 74  
Äquivalenzrelation, 24, 41, 74  
  erzeugte, 25, 40, 61  
Algebra, 226  
  Kohomologie-, 226, 265  
Analysis, 3, 19  
Approximation  
  CW-, 147  
  durch CW-Paar, 266  
  zelluläre, 144  
Assoziativität, 7  
Atlas  
  Vektorbündel-, 231  
Auflösung  
  freie, **193**  
Augmentierung, 178  
Ausschneidung, **267**  
  Homotopie, 94  
Axiom  
  Abzählbarkeits-, 11, 17, 19, 25, 30, 38, 39, 135  
  Dimensions-, 165, 216  
  Eilenberg-Steenrod, 164  
    Kohomologie, 215  
  Funktorkomplex, 49  
  Kategorie, 7  
    abelsche, 163  
    abgeschlossene monoidale, 136  
    monoidale, 136  
  Summen-, 164, 172, 215  
  Trennungs-, 8, 17, 25, 38, 41, 135  
Bahn, 69, 74  
Ball, 5, 11, 34  
  Einheits-, 28  
   $\varepsilon$ -, 3  
Basis, 11, 17, 41, 72  
  abzählbare, 11, 17, 27, 101  
  Faserbündel, 91  
  Umgebungs-, 11  
Basispunkt, 44, 47, 50, 57, 68  
  nicht entarteter, 102

Baum  
   maximaler, 62, 63  
 beschränkt, 19, 20  
 Bifunktor  
   graduierter, 260  
 Bild  
   kategoriell, 161  
 Bings Haus, 45  
 Bordismus  
   gerahmter, 116, 117–122, 166  
 Borromäische Ringe, 76  
 Bouquet, 61, 108  
 Bündel  
   Ball-, 242  
   Faser-, 91  
   Normalen-, 115  
     relatives, 242  
     stabiles, 243  
   Sphären-, 242  
   Tangential-, 231  
   triviale, 91  
   Vektor-, 231  
     flaches, 232  
     stabil triviale, 237  
     tautologisches, 234  
     triviale, 231  
     Whitney-Produkt, 236  
     Whitney-Summe, 236  
  
 Charakteristik  
   Euler-, 177  
   Körper, 177  
  
 Decktransformation, 70, 71–74  
 Diagramm  
   kommutatives, 13, 49  
 Dimension, 27, 28, 41, 101  
 Divisionsalgebra, 2  
 Dreiecksungleichung, 3  
 dual, 16, 25  
 Dualisieren, 219  
 Dualität  
   Lefschetz-, **279**  
   Poincaré-, **279**  
    $S$ -, 273  
   schwache, 271  
   Spanier-Whitehead-, 273  
   starke, 272  
 Dualität  
   Eckmann-Hilton-, 102, 154  
 Durchschnitt  
   kategorieller, 163  
  
 Eigenschaft  
   Abzählbarkeits-, 11, 17, 19, 25, 30, 38, 39  
   charakteristische  
     kompakt-offene Topologie, 21, 34  
     Produkt, 16  
     Quotient, 25, 34, 85  
     Summe, 13  
     Tensorprodukt, 138, 190  
     Unterraum, 15, 45  
   Homotopieausdehnungs-, 102  
   Homotopieliftung-, 88, 102  
   Trennungs-, 8, 17, 25, 38, 41  
   universelle, 16  
     interner hom-Funktor, 137  
   Kern, 162  
   Kolimes, 27, 111, 136  
   Koprodukt, 14, 56, 61, 76  
   Limes, 135  
   Produkt, 16, 56, 76  
   Pushout, 26, 59, 76  
   Tensorprodukt, 138, 190  
   universelle Überlagerung, 73  
   eigentlich, 120  
   Einbettung, 15, 39  
   Einhängung  
     reduzierte, 108  
   Einheitswürfel, 80  
   Exponentialgesetz, **21**, 140  
     abstraktes, **139**  
  
 Faser, 88  
   Homotopie-, 154  
   typische, 91  
 Faserung  
   Hopf-, 92, 98, 99  
     quaternionische, 93, 99  
   Hurewicz-, 88, 155  
   Pfad-, 154  
   Serre-, 88  
 fein, 8, 13, 24, 25  
 Filtrierung  
   Schicht-, 250  
 Fixpunkt, 1, 53  
 Fläche, 66  
   nicht orientierbare, 66  
   orientierbare, 66  
 Flasche  
   Kleinsche, 66  
 Folge, 9, 18, 19, 37, 40, 42  
 Form  
   Schnitt-, 282  
 Fundamentalgruppe, 46, 57–67, 71–75, 80  
   des Komplements, 60, 61  
 Funktion  
   Morse-, 124  
   stetige, 8, 9  
 Funktor, 49, 73, 75, 76, 164, 215  
   adjungierter, 134  
    $\delta$ -, 192  
   Einhängungs-, 248  
   exakter, 191  
   links-, 191

- rechts-, 191
- Ext-, 193
- interner hom, 137
- kontravarianter, 74
- kovarianter, 49
- Tor-, 193
  
- Galois-Theorie, 73, 74
- Gerüst, 28, 29, 62, 142
- Geschlecht, 66
- Grad
  - CW-Spektren, 248
  - Spanier-Whitehead-Dualität, 273
- Grenzwert, 9, 11, 18, 20, 37
- grob, 8, 12, 15, 16, 21, 24
- Gruppe, 7, 46, 55, 69, 75, 76
  - abelsche, 75, 76
  - Decktransformationen-, 70–74
  - freie, 55, 76
  - Galois-, 73, 74
  - perfekte, 189
  - Struktur-, 231
  - topologische, 230
  - unendliche Dieder-, 55, 78
  - Unter-, 56, 57, 71, 73, 74
  
- Häufungspunkt, 18
- Höhe
  - Zelle, 250
- Homöomorphismus, 6, 39, 44, 60, 69, 73
- Homologie
  - ganzahlige, 189
  - $K$ -, 239
  - Kettenkomplex, 174
  - reduzierte, 165
    - allgemeine, 164
  - relative, 166
  - singuläre  $E$ -, 266
  - unreduzierte
    - allgemeine, 166
  - zelluläre
    - reduzierte, 175
    - unreduzierte, 178
- Homomorphismus
  - Gruppen-, 56, 69, 75
  - Hurewicz-, 188
  - $J$ -, 126
  - Verbindungs-, 87, 89, 165, 195
- homotop
  - ketten-, 193
- Homotopie, 43, 44, 45, 51
  - CW-Spektren, 249
  - Ketten-, 193
  - punktierte, 79
  - relative, 44, 45, 46, 48, 67, 74
  - Teleskop-, 144
- Homotopieäquivalenz, 44, 45, 50, 74, 145
- Homotopiegruppe, 80
  - höhere, 48
  - Spektrum, 249
  - stabile, 111, 165
- Homotopieinvarianz, 165
- Homotopiekategorie
  - stabile, 249
    - naive, 111
- Homotopieklasse, 44, 45
  - freie, 44, 83
- Huhn
  - topologisches, 150
  
- Identität, 6, 36
  - in Kategorie, 7, 44
- Inklusion, 13, 15
  - zelluläre, 247
- Inneres, 6
- Intervall, 23
- Invarianz
  - unter schwachen Äquivalenzen, 179, 216
- Inverses, 44
  - Homotopie-, 44, 50
- Inzidenzzahlen, 175
- Isomorphismus, 44, 47, 50
  - Hurewicz-, 189
  - Stabilisierungs-, 180
  - Thom-, 277
  - Vektorbündel-, 231
  
- Karte
  - Faserbündel, 91
- Kategorie, 7, 16, 26, 44, 49, 55, 59, 61, 73, 75, 76
  - abelsche, 163
  - abgeschlossene, 138
  - additive
    - graduierte, 249
  - graduierte, 248
  - Homotopie-, 44, 165
    - stabile, 249
  - kartesisch abgeschlossene, 137, 140
  - lokal kleine, 139
  - monoidale, 136
    - abgeschlossene, 136
    - graduiert symmetrische, 260
    - streng, 137
  - punktierte, 114, 139, 162
  - symmetrisch monoidale, 138
- Kegel, 107
  - Abbildungs-
    - reduzierter, 152
    - Spektra, 248
  - reduzierter, 106
- Kern, 86
  - kategorieller, 162
- Kette, 174
- Klasse, 7
  - Chern-, 245
  - Fundamental-, 279

primitive, 281  
 Stiefel-Whitney-, 245  
 Thom-, 276  
 Knoten, 61  
 Kobild  
   kategorielles, 161  
 Kobordismus  
   gerahmter, 122  
 Koeffizienten, 165, 215  
   universelle  
     Homologie, **201**, 208  
     Kohomologie, **219**, 281  
 Körper, 7  
   Schief-, 41  
 Kofaserung, 102  
   Hurewicz-, 102  
   Serre-, 144  
 Kohomologie  
   darstellbare, 229  
   Kokettenkomplex, 218  
   reduzierte, 215  
     allgemeine, 215  
     gewöhnliche, 216  
   relative, 216  
   singuläre  $E$ -, 266  
   unreduzierte, 216  
   zelluläre, 218  
 Kokern  
   kategorieller, 162  
 Kokette, 218  
 Kolimes, 26, 111, 136  
 kommutativ  
   graduiert, 225, 265  
 Kommutator, 48, 66  
 kompakt, 19, 20, 25, 32, 39, 48, 51, 57, 77  
   abzählbar, 19, 20  
   folgen-, 19, 20  
   lokal, 20, 21, 33, 42, 45  
   quasi-, 19, 25  
 kompakt erzeugt, 157–158  
 Komplex  
   CW-, 29, 30–35, 41, 62–66, 78, 135  
     endlicher, 32  
     punktierter, 142  
   Ketten-, 173  
     augmentierter, 178  
     zellulärer, 175  
   Koketten-, 218  
     zellulärer, 219  
   Unter-, 32, 36  
   Zell-, 29  
 Konvergenz, 23, 37  
   gleichmäßige, 22, 40  
     lokal, 23  
   kompakte, 22, 40  
 Koproduct, 13, 26, 39, 55, 61, 76, 137  
 Korand  
   Kettenkomplex, 218  
 Kozykel, 218  
   gerahmter, 122  
 Kragen, 116  
 Kreis, 58–61, 63, 77  
   polnischer, 150  
 kürzen, 54  
 Lemma  
   Fünfer-, **88**  
   Schlangen-, **195**  
   Urysohn, **9**  
   Vierer-, **88**  
   Zorn, 194  
 Lift, 51, 52, 54, 67–73, 88  
 Limes, 135  
 Mannigfaltigkeit, 27, 34, 41, 66, 135  
   differenzierbare, 231  
   geschlossene, 242  
   komplexe, 232  
   mit Rand, 101  
 Maximum, 19  
 Menge, 7, 26  
   Potenz-, 3, 5  
   punktierter, 81  
 Metrik  
   französische Eisenbahn-, 36  
    $p$ -adische, 37  
   Riemannsche, 232  
 metrisierbar, 5, 10, 18, 28, 30  
 Morphismus, 7, 44, 49, 76  
    $\delta$ -Funktoren, 192  
     universeller, 192  
   dualer, 271  
   Epi-, 161  
     konormal, 162  
   invertierbarer, *siehe* Isomorphismus  
   Mono-, 161  
     normal, 162  
   Null-, 139, 162  
 Multiplikation  
   Spektren, 261  
 Norm, 42  
   äquivalente, 4  
   normal, 9, 18, 19, 22, 28, 31, 39, 41  
 Normalteiler, 56, 71–72  
   erzeugter, 56, 62, 65  
 Nullbordismus  
   gerahmter, 116  
 Objekt, 7, 49  
   duales  
     schwach, 271  
     stark, 272  
   Einheits-, 136  
   initiales, 81, 114, 137

Null-, 114, 139, 162  
 Quotienten-, 162  
 reflexives, 271  
 terminales, 81, 114, 137  
 Unter-, 162  
 offen, 4, 5, 23  
 Operation  
   Gruppen-, 69, 70–74  
     eigentlich diskontinuierliche, 69, 70–71  
     freie, 69, 70–71  
     stetige, 230  
 Orientierung, 276  
 Standard-, 278  
  
 Paar, 44, 171  
   CW-, 142  
   punktirtes, 84  
 Paarung  
   Kronecker-, 122, 220  
 Periodizität  
   Bott-, 126  
 Pfadraum, 48  
 Polynom, 37, 75  
 Präsentation, 62, 66  
 Produkt, 20, 39, 40, 54–56, 76, 91, 135, 137  
   äußeres, 223  
   amalgamiertes, 59  
   Cap-, 225, 265  
   Cup-, 122, 225, 265  
   direktes, 39, 75  
   Erweiterungs-, 193  
   freies, 55, 56  
   inneres, 225, 265  
   Kreuz-  
     Kohomologie, 224  
   Kronecker-, 220  
   reduziertes, 108  
     naives, 253  
   Schnitt-, 282  
   Schräg, 263  
   Schräg-, 223  
   Slant-, 223  
   Smash-, 108  
     Kohomologie, 223, 262  
   Tensor-, 136  
     R-Moduln, 190  
   topologisches, 15, 75  
   Torsions-, 193  
   Verschlingungs-, 283  
   Wedge-, 61, 108  
   Whitney-, 236  
 Projektion  
   stereographische, 27, 60  
 Pullback, 163  
 Punkt  
   innerer, 101  
   Rand-, 102  
  
 Pushout, 26, 59, 60, 76, 105, 163  
  
 Quaternionen, 123  
 Quotient, 136  
   Homotopie-, 106  
   nach Äquivalenzrelation, 24, 25  
   nach Gruppenwirkung, 43, 69, 70–74  
  
 Rand, 6  
   geometrischer, 80, 94, 101  
   Kettenkomplex, 174  
 Randoperator  
   zellulärer, 174–178  
 Rang  
   lokaler, 236  
   Vektorbündel, 231  
 Raum  
   Eilenberg-Mac Lane-, 184  
   einpunktiger, 44  
   Hausdorff-, 8, 9, 19, 20, 27, 32, 33, 38, 39, 70, 78, 101  
     schwach, 133, 156–158  
   klassifizierender, 234  
   kompakt erzeugter, 133  
   kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-, 21, 133, 157–158  
   metrischer, 3, 8, 11, 20, 22, 36, 38, 40, 135  
   Moore-, 199  
   projektiver, 41  
     komplex, 92, 176  
     quaternionisch, 93, 176  
     reell, 77, 176  
   punktierter, 44, 61, 79  
     gut, 61, 102  
   Schleifen-, 84  
   simplizialer, 234  
   Thom-, 242  
     relativer, 275  
   topologischer, 5, 7  
   Vektor-, 7, 39, 42  
     dualer, 39  
     normierter, 1, 3, 36, 42  
     orientierter, 276  
   reduzieren, *siehe* kürzen  
   regulär, 9, 28  
     vollständig, 9  
 Retrakt, 45, 53, 103, 162  
   Deformations-, 45, 58, 60, 61, 145  
     starker, 45, 46  
     Umgebungs-, 104  
   Morphismus, 144  
   Umgebungs-, 273  
 Ring  
   Koeffizienten-, 264  
   Kohomologie-, 226  
 Ringe  
   Borromäische, 60

Satz

- Approximation
  - CW-, **147**
  - zelluläre, **144**
- Ausschneidungs-
  - Homotopie, **94**, 106
  - stabile Homotopiegruppen, 113
- Barratt-Puppe-Sequenz, **152**
- Blakers-Massey, **94**, 106
- Borsuk-Ulam, **53**, 75
- Bott-Periodizität, **239**
- Brouwer, **101**
- Brouwer-Hopf, **97**
- Brownscher Darstellungs-, 184, 229
- Dualität
  - Lefschetz-, **279**
  - Poincaré-, **279**
  - Spanier-Whitehead-, **274**
- Eilenberg-Zilber, 204
- Einbettungs-
  - Mitchell, 161
- Eulerscher Polyeder-, 178
- Exponentialgesetz, **21**, 140
- Fixpunkt-
  - Banach, 1
  - Brouwer, 1, **53**, **99**
- Freudenthal, **109**, 112, 168
- Fundamental- der Algebra, 75
- Hadamard-Cartan, 185
- Heine-Borel, 18, 20, 31
- Hilbert Basis-, 38
- Homomorphie-, 163
- Homotopiesequenz
  - Paar, **87**
  - Serre-Faserung, **89**
  - stabile, **112**
- Hurewicz, **189**
- Invarianz der Dimension, **101**
- Isomorphie-
  - Noetherscher, 163
- Künneth-Formel
  - algebraische, **205**
  - kohomologische, **222**
  - topologische, **203**
- Kervaire-Milnor, 2
- Klassifikation
  - Vektorbündel, **234**
- Lebesgue, 20, 57
- Liftungs-, **67**, 71, 90
  - Homotopie-, **51**, 67
- Mayer-Vietoris, **167**, 216, 267
- Metrisations-
  - Urysohn, 12, 28
- Milnor, 151
- Pontryagin
  - $\pi_1^s(S_0)$ , 124
- Pontryagin-Thom
  - gerahmter Bordismus, **117**
  - Röhrenumgebung, 242
  - Seifert-van Kampen, **57**, 58–61
  - Serre, 125
  - Thom-Isomorphismus, **277**
  - Tychonoff, 20
  - universelle Koeffizienten
    - Homologie, **201**, 208
    - Kohomologie, **219**, 281
  - vom Igel, 2, **100**
  - Whitehead, **145**, 189
  - Whitney-Einbettungs-, 243
  - Zwischenwert-, 53
- Schleife, 46, 67
- Schleifenraum, 48, 84
  - freier, 48
- Schneeflockenkurve, 7
- Schnitt, 91
- Seite
  - offene, 85
- Sequenz, 86, 163
  - Barratt-Puppe-, 152
  - Bockstein-, 212
  - exakte, 86, 127, 164
    - Homotopie-, 156
    - kurze, 86, 164
    - lange, 164, 172, 215
  - Faser-, 156
  - Homologie-, 164
    - Bockstein-, 212
    - Mayer-Vietoris-, **167**
  - Homotopie-
    - Faserungen, **89**
    - Kofaserung, 107
    - Paar, **87**
    - stabile, **112**, 165
  - koexakte
    - Homotopie-, 153
  - Kofaser-, 152
  - Kohomologie-, 215
    - Mayer-Vietoris-, 216
  - Mayer-Vietoris-, **167**, 216, 267
  - Sechs-Term-, 239
- Signatur, 282
- Skelett, 28, 29, 142
- Spektrum, 111, 182
  - CW-, 248
    - abzählbares, 248
    - endliches, 248
  - Eilenberg-Mac Lane-, 184
  - Einhängungs-, 182
  - Modul-, 261
  - Moore-, 199
  - $\omega$ -, 182
  - Ring-, 261
  - Sphären-, 184
  - Suspensions-, 182



- Thom-
  - normales, 275
- Sphäre, 2, 27, 60, 66, 168, 217
- stetig, 3, 4, 6, 13
  - am Punkt, 3, 37
- Subbasis, 11, 16, 21
- Summe
  - direkte, 39, 54
  - topologische, 13
  - Whitney-, 236
  - zusammenhängende, 282
- Suspension
  - reduzierte, 108
- Teilfolge, 18
- Teilmenge
  - offene, 27
- Teleskop, 171
- Tensorprodukt
  - $R$ -Moduln, 190
- Topologie, 5
  - Box-, 17, 20
  - CW-, 29, 30, 32, 34, 42
  - diskrete, 5, 11, 23, 24, 28, 29, 38, 50–52, 54
  - Final-, 24, 135
  - Identifizierungs-, *siehe* Quotienten-
  - induzierte, 15, 24, 41
  - Initial-, 24, 135
  - Klumpen-, 5, 11, 17, 24, 38, 69
  - koendliche, 37, 38
  - koinduzierte, 24, 26, 41
  - Kolimes-, 27, 29, 31, 33, 136
  - kompakt erzeugte, 133
  - kompakt-offene, 21, 22, 34, 40, 45, 48, 84
  - Limes-, 135
  - metrische, 4, 39, 40
  - Ordnungs-, 38
  - $p$ -adische, 40
  - Produkt-, 15, 20, 21, 24, 33, 34, 39, 40, 42, 43, 135
  - Quotienten-, 25, 26–28, 31, 33, 40–42, 59, 61, 69, 70, 79, 136
  - Relativ-, *siehe* Unterraum-
  - schwache, 26, 29, 31, 33
  - Spur-, *siehe* Unterraum-
  - Summen-, 13, 24, 136
  - Unterraum-, 15, 17, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 39, 40, 45, 48, 76, 135
  - Verklebungs-, 26, 29, 30, 40
  - Zariski-, 37, 38
  - zur Basis, 12, 17, 72
  - zur Subbasis, 12, 16, 21
- Torsion, 198, 283
- Torus, 66
  - Clifford-, 61
- Totalraum, 91
- Transformation
  - natürliche, 81, 165
- Transposition, 224, 263
- Trivialisierung, 115
  - lokale, 91
- Überdeckung
  - offene, 18, 20, 57
  - Teil-, 19
- überlagert
  - gleichmäßig, 51, 68, 70, 72
- Überlagerung, 50, 52, 54, 66–74, 77, 90, 91
  - normale, 70, 71–74, 78
  - universelle, 51, 66, 71–74, 78
- Umgebung, 4, 5, 27, 37, 69
  - abgeschlossene, 22
  - kompakte, 20
  - zusammenhängende, 24
  - weg-, 24
- Umgebungsbasis, 17, 30
- Umlaufzahl, 43
- Unterkategorie
  - volle, 133
- Untermannigfaltigkeit, 27
  - eigentliche, 242
  - gerahmte, 116
- Unterraum, 17, 19, 135
- Unterspektrum, 248
  - kofinales, 248
- unzusammenhängend
  - total, 24, 40
- Vereinigung
  - disjunkte, 13, 17, 39, 136
- Vererbung, 17, 25, 41, 70
- Verkettung, 7, 44, 46
- Weg, 23, 34, 36, 45, 46, 68
- Wirkung, *siehe* Operation
- Wort, 54
  - gekürztes, 54
  - reduziertes, 54, 55
- Zahl
  - Betti-, 177, 281
  - dyadische, 9
  - Euler-, 177, 281
- Zelle, 28, 29, 32, 142
  - abgeschlossene, 29, 142
  - CW-Spektrum, 248
- zusammenhängend, 23, 25, 35, 40, 66–74, 78
  - einfach, 50, 60, 66, 75
  - semilokal, 71, 74
  - lokal, 24
  - $n$ -, 93, 145
  - weg-, 23, 25, 34–36, 40, 47, 48, 50, 57–68, 75
  - lokal, 24, 67–74
- Zusammenhangskomponente, 24, 74
  - Weg-, 24, 35, 40, 45, 48, 67, 73, 80

zusammenziehbar, *34*, 44–46, 50, 51, 59–62, 83, 165,  
172  
  lokal, *34*, 78  
  schwach, 179  
Zykel, *174*  
  gerahmter, *119*  
Zylinder  
  Abbildungs-, *103*  
  reduzierter, 152  
  relativer, 146  
  reduzierter, 154