Vortragsprogramm Proseminar Dynamische Systeme

Als Leitfaden für eine Einführung in die Theorie dynamischer Systeme eignet sich gut das Buch [KH], das einen umfassenden Überblick gibt. Allerdings erfordert dieses Buch stellenweise einiges an Vorwissen und behandelt einige Aspekte nur recht oberflächlich. Als Hauptquelle für dieses Proseminar nutzen wir daher [Dev] und konzentrieren uns auf den 1-dimensionalen Fall.

In den Vorträgen sollte jeweils ein Überblick über das jeweilige Thema gegeben werden, in dem die zentralen Konzepte anhand von Beispielen und Bildern erklärt werden. Die zentralen Sätze sollen natürlich auch im Vortrag bewiesen werden. In [Dev] finden sich auch viele Bilder und Beispiele, anhand derer Konzepte und Vorgänge deutlich gemacht werden. Als Quelle für weitere Beispiele bieten sich die enthaltenen Übungsaufgaben an.

1 Abbildungen als dynamische Systeme (17.10.)

Es soll erklärt werden, wie man eine Abbildung als dynamisches System auffasst und anhand von Beispielen sollen die Begriffe Fixpunkt, Orbit eines Punktes und der Begriff der Periodizität erklärt werden. Neben den Beispielen ist das Hauptresultat die Untersuchung von Translationen auf einem Kreis.

Quellen: [Dev, 1.3] und [KH, 1.3]

2 Hyperbolische Fixpunkte (24.10.)

In diesem Vortrag soll es um lokale Eigenschaften von Fixpunkten gehen, insbesondere um die Stabilität, also die Frage, ob ein Fixpunkt andere Punkte eher anzieht oder eher abstößt. Vorgestellt werden sollen die Definitionen und die Sätze, wie man einer Abbildung ansieht, welcher Fixpunkt welche Eigenschaften hat.

Quellen: [Dev, 1.4, bis Beispiel 4.9] und [KH, 1.1 und 1.7]

3 Die quadratische Familie (7.11.)

Anhand des Beispiels der quadratischen Familie soll dargestellt werden, wie man ein System außerhalb von Fixpunkten untersuchen kann. Insbesondere wird das Langzeitverhalten untersucht und erklärt, warum das auf natürliche Weise zu Kantormengen führt.

Dieses Beispiel wird auch in späteren Vorträgen immer wieder benutzt werden.

Quellen: [Dev, Beispiel 4.10 und Kapitel 1.5]

4 Symbolische Dynamik (14.11.)

Es soll der Folgenraum eingeführt werden und die Metrik darauf erklärt werden. Mit dieser Metrik kann man dann die Shiftabbildung als Beispiel untersuchen. Diese hat einige Eigenschaften, die man als chaotisch ansehen könnte.

Auch dieses Beispiel wird später immer wieder benutzt, indem andere Systeme in die Symbolik der Shiftabbildung übersetzt werden.

Quellen: [Dev, 1.6] und [KH, 1.9]

5 Topologische Konjugation (21.11.)

Dieser Vortrag soll die Dynamik der quadratischen Familie mit Hilfe eines Homöomorphismus in die Shiftabbildung übersetzten. Mit dieser Übersetzung kann man dann die Dynamik der quadratischen Abbildungen globaler beschreiben, da die Dynamik der Shiftabbildung einfacher zu verstehen ist.

Quellen: [Dev, 1.7] und [KH, 2.3]

6 Chaos (28.11.)

Hier geht es um eine mathematische Definition von Chaos. Landläufig versteht man darunter oft, dass kleine Änderungen im Langzeitverhalten große Effekte haben können. Wir wollen jedoch zusätzlich noch andere Eigenschaften fordern, um von Chaos zu sprechen. Zuerst soll definiert werden, wann ein System topologisch transitiv ist und dann eine Definition von Chaos gegeben werden. Anschließend werden die bekannten Systeme der Shiftabbildung und der quadratischen Familie untersucht und gezeigt, dass wir bereits in vorherigen Vorträgen chaotische Systeme gesehen haben.

Quellen: [Dev, 1.8]

7 Strukturstabilität (5.12.)

In diesem Vortrag geht es darum, wie sich Dynamik verändert, wenn man das System verändert. Dazu betrachtet man erstmal eine Metrik auf dem Abbildungsraum und definiert den Begriff der Strukturstabilität. Anschließend werden Abbildungen der quadratischen Familie auf Strukturstabilität untersucht.

Quellen: [Dev, 1.9] und [KH, 2.3]

8 Satz von Sarkovskii (12.12.)

Dieser Satz besagt, dass eine 3-periodische Bahn bereits impliziert, dass es periodische Bahnen jeder Periode geben muss. Allgemeiner geht es in diesem Vortrag darum, welche Perioden die Existenz von Bahnen mit welchen anderen Perioden implizieren. Anhand von Beispielen soll außerdem gezeigt werden, dass die gegebenen Aussagen scharf sind, es also Beispiele gibt, in denen genau die Perioden vorkommen, die aus dem Satz von Sarkovskii folgen.

Quellen: [Dev, 1.10]

9 Schwarzsche Ableitung (19.12.)

Die Schwarzsche Ableitung einer Funktion setzt sich aus der ersten, zweiten und dritten Ableitung zusammen. Diese Größe ist ein sinnvolles Merkmal dynamischer Systeme, denn das Vorzeichen dieser Größe macht Aussagen über die Zahl periodischer Bahnen und deren Stabilität. Als Beispiel werden Polynome betrachtet, insbesondere wieder Systeme der quadratischen Familie.

Quellen: [Dev, 1.11]

10 Bifurkationen (9.1.)

Bifurkationen beschreiben, was passiert, wenn sich durch Veränderung des Systems auch Fixpunkte oder periodische Bahnen ändern. Insbesondere kann sich dabei ein Fixpunkt in mehrere Fixpunkte aufspalten oder ein Fixpunkt kann seine Stabilität ändern und dabei periodische Bahnen höherer Periode entstehen lassen. Insbesondere geht es hier wieder um Familien von Systemen, insbesondere wieder der quadratischen Familie. Eine exponentielle Familie bietet sich als Beispiel für die Periodenverdopplung an, wo aus einem Fixpunkt eine 2-periodische Bahn entsteht.

In diesem Vortrag würde es sich auch anbieten, die Familien in einem Computeralgebraprogramm zu implementieren, um anhand von Bildern zu sehen, wie sich die Dynamik verändert.

Quellen: [Dev, 1.12]

11 3-Periodische Bahnen (16.1.)

Nach dem Satz von Sarkovskii folgt aus der Existenz einer 3-periodischen Bahn bereits die Existenz von Bahnen mit beliebiger Periode. Mit der Schwarzschen Ableitung kann man zeigen, dass die 3-periodische Bahn die einzige stabile Bahn ist. In diesem Vortrag soll untersucht werden, von welchem Typ die anderen periodischen Bahnen sind. Insbesondere kann man wieder einen Bezug zur symbolischen Dynamik herstellen. Dazu betrachtet man den Folgenraum und untersucht Shiftabbildungen auf Teilmengen. Indem man die Dynamik eines Systems mit einer 3-periodischen Bahn in diese Sprache übersetzt, erhält man eine topologische Konjugation zu so einem Teilshift vom endlichen Typ und damit Chaos.

Quellen: [Dev, 1.13]

12 Kreisabbildungen (23.1.)

In diesem Vortrag betrachten wir dynamische Systeme auf dem Kreis. Als ersten Schritt definiert man eine Überlagerung, um das Problem auf die bisher betrachteten reellen Zahlen zurückzuführen. Damit kann man dann auch weitere Kenngrößen der Dynamik wie die Rotationszahl einführen. Diese Zahl gibt bereits Auskunft über die Existenz periodischer Bahnen. Als zweiter Teil dieses Vortrags soll als Beispiel eine 2-Parameterfamilie von Systemen und ihr Bifurkationsverhalten untersucht werden.

Quellen: [Dev, 1.14] und [KH, 1.3, 2.4]

13 Morse-Smale Diffeomorphismen (30.1.)

Bestimmte Systeme auf dem Kreis lassen sich besonders gut beschreiben. Diese Systeme sind die sogenannten Morse-Smale Diffeomorphismen, die strukturstabil sind und jeden orientierungserhaltenden Diffeomorphismus annhähern können. Im Vortrag soll das Schließungslemma und der Satz von Kupka-Smale bewiesen werden. Damit kann man jeden orientierungserhaltenden Diffeomorphismus mit isolierten Fixpunkten durch einen Diffeomorphismus mit ausschließlich hyperbolischen Fixpunkten annähern. Quellen: [Dev, 1.15]

14 Homokline Punkte und Bifurkation (6.2.)

Es kann vorkommen, dass ein Punkt zunächst von einem Fixpunkt abgestoßen wird, aber trotzdem in endlicher Zeit zu diesem Punkt zurückkehrt. Solche Punkte heißen homokline Punkte und die Existenz eines solchen Punktes hat starken Einfluss auf die Dynamik. Neben der Definition soll in diesem Vortrag gezeigt werden, dass man aus einem solchen Punkt wieder die Shiftabbildung konstruieren kann, also Chaos erhält. Gut untersuchen kann man das wieder am Beispiel der quadratischen Familie un ihrer Bifurkationen.

Quellen: [Dev, 1.16]

Literatur

[Dev] Robert L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, 2nd edition, Redwood City, Calif. [u.a.]: Addison-Wesley, 1993

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, Cambridge Univ. Press, 2006