1. Übungsblatt

Lineare Algebra

im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 27.10.16
vor der Vorlesung
in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Seien M und N zwei Mengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $M \subset N$,

(b) $M \cap N = M$,

(c) $M \cup N = N$.

Aufgabe 2

Seien L, M, N Mengen und $F\colon M \to N$ und $G, G'\colon L \to M$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Ist $F \circ G$ surjektiv, dann auch F.

(b) Ist $F \circ G$ injektiv, dann auch G.

(c) Ist F injektiv, so folgt aus $F \circ G = F \circ G'$ bereits $G = G'$.

Aufgabe 3

Sei $F\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subset Y$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $F^{-1}(A \cap B) = F^{-1}(A) \cap F^{-1}(B)$

(b) $F^{-1}(A \cup B) = F^{-1}(A) \cup F^{-1}(B)$

(c) $F^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus F^{-1}(A)$.

Aufgabe 4

Es seien L, M, N Mengen. Zeigen Sie:

(a) M ist gleichmächtig zu M.

(b) M ist genau dann gleichmächtig zu N, wenn N gleichmächtig zu M ist.

(c) Ist L gleichmächtig zu M und M gleichmächtig zu N, dann ist L gleichmächtig zu N.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate am 24./25. 10.

Präsenzaufgaben
Lineare Algebra
im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

keine Abgabe, Besprechung 24./25. 10.

Aufgabe 1

Seien X, Y, Z Mengen. Zeigen Sie

(a) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$.

(b) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$.

(c) $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Menge $\underline{n}$ genau dann gleichmächtig zu $\underline{m}$ ist, wenn $m = n$ gilt.

Aufgabe 3

Seien M and N Mengen und $T \subset N$ eine Teilmenge. Sei $F\colon M \to N$ eine Abbildung. Für eine Teilmenge $S \subset M$ bezeichne $F(S)$ das Bild der Einschränkung $F|_S$. Zeigen Sie:

$$F(F^{-1}(T)) \subset T.$$

Geben Sie ein Beispiel an, in dem keine Gleichheit gilt.
Unter welcher Bedingung gilt Gleichheit?

Aufgabe 4

(a) Überlegen Sie sich, dass jede nicht leere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ ein kleinstes Element besitzt. (Dies ist die Wohlordnungseigenschaft)

(b) Betrachten Sie die Teilmenge

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{In der deutschen Sprache benötigt man mehr als 1000} \\ \text{Buchstaben, um } n \text{ eindeutig zu beschreiben.} \end{array} \right\}.$$

Überlegen Sie sich, dass Sie das kleinste Element von M mit weniger als 1000 Buchstaben eindeutig beschreiben können.

Überlegen Sie sich, wie man dieses Paradoxon 'beheben' könnte.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.