10. Übungsblatt
Lineare Algebra
im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 12.1.17 vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Auf diesem Blatt finden Sie einige Bonusaufgaben, d.h. um die 50% der Punkte zu erreichen, benötigen Sie nur 8 Punkte. Sie können aber bis zu 32 Punkte bekommen, wenn Sie alle Aufgaben lösen.

Aufgabe 1

Bilden Sie alle möglichen Matrixprodukte aus den folgenden drei reellen Matrizen und berechnen Sie diese.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 100 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 98 & 1 \\ -5 & 7 \\ 12 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ der Unterraum, der von $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Seien außerdem die Vektoren $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass sowohl $B = (v_1, v_2)$ als auch $C = (w_1, w_2)$ Basen von E sind.

(b) Sei nun die linearen Abbildung $F\colon E \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } F(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von F bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der Basis B von E.

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von F bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der Basis C von E mit Hilfe der Basiswechselmatrix.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die folgenden komplexen Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $I \cdot I = J \cdot J = K \cdot K = I \cdot J \cdot K = -E$.

Bitte wenden

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Matrizen der folgenden Endomorphismen von $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis:

(a) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist die Drehung um den Ursprung um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn.

(b) $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist die Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung, die mit der positiven x-Achse den Winkel ψ bildet.

Aufgabe 5

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Wir bezeichnen die iterierte Komposition von F mit sich selbst als $F^n = \underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{n \text{ mal}}$.

Zeigen Sie: Ist $n \geq 1$ und $v \in V$ mit $F^n(v) \neq 0$ und $F^{n+1}(v) = 0$, dann ist die Menge $\{v, F(v), F^2(v), \ldots, F^n(v)\}$ linear unabhängig.

Aufgabe 6

Sei R ein kommutativer Ring, V ein R-Modul und U, W zwei Untermoduln mit $U \subset W \subset V$.

(a) Zeigen Sie, dass man W/U als Untermodul von V/U auffassen kann, d.h. finden Sie eine injektive R-lineare Abbildung $F\colon W/U \to V/U$.

(b) Konstruieren Sie einen Isomorphismus von R-Moduln $G\colon (V/U)/(W/U) \to V/W$.

Aufgabe 7

Wir betrachten die universellen Eigenschaften aus Proposistion 2.64 für Mengen und beliebige Abbildungen zwischen ihnen. Wir definieren die disjunkte Vereinigung

$$U \sqcup V = U \times \{0\} \cup V \times \{1\} \subset (U \cup V) \times \{0,1\}.$$

Präzisieren und beweisen Sie:

(a) Die disjunkte Vereinigung erfüllt die universelle Eigenschaft des Koproduktes.

(b) Das kartesische Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft des Produktes.

Aufgabe 8

Sei R ein kommutativer Ring und $\{0\} \neq S \subset R$ abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Wir definieren R/S durch die additive Quotientenbildung, also $r_1 \sim r_2$ genau dann, wenn $r_1 - r_2 \in S$.
Wann ist die Multiplikation $\cdot\colon R/S \times R/S \to R/S$ wohldefiniert?

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!

$$\mathbf{y} = \frac{\log(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{m}} - \mathbf{sa})}{\mathbf{r^2}} \Leftrightarrow \mathbf{yr^2} = \log(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{m}} - \mathbf{sa}) \Leftrightarrow \mathbf{e^{yr^2}} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{m}} - \mathbf{sa} \Leftrightarrow \mathbf{me^{rry}} = \mathbf{x} - \mathbf{mas}$$