11. Übungsblatt
Lineare Algebra
im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 19.1.17 vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Die Teilmenge E des $\Bbbk$-Vektorraums V erzeugt einen Unterraum U. Bestimmen Sie jeweils eine Teilmenge von E, die Basis von U ist:

(a) $\Bbbk = \mathbb{R}$ und $V = K^3$ mit $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) $\Bbbk = \mathbb{R}$ und $V = K^4$ mit $E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) $\Bbbk = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $V = K^3$ mit $E = \left\{ \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [2] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] \\ [1] \\ [2] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [2] \\ [0] \\ [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] \\ [0] \\ [2] \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe 2

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Das Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis;

(b) Das Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ ist maximal linear unabhängig, d.h $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig und $(v_1, \dots, v_n, w)$ ist linear abhängig für alle $w \in V$;

(c) Das Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein Erzeugendensystem und $(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n)$ ist kein Erzeugendensystem.

Aufgabe 3

Es seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$ und $\langle v, w \rangle = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = (v, w, v \times w)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

(b) Stellen Sie die Drehung um die Achse durch 0 in Richtung v um den Winkel 2φ aus Satz 1.74 als Matrix dar bezüglich der Basis aus (a).

Bitte wenden

Aufgabe 4

Sei R ein Ring und seien $A \in M_{l,m}(R)$ und $B \in M_{m,n}(R)$ Matrizen. Zeigen Sie:

(a) Wenn R kommutativ ist, gilt $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

(b) Wenn $R = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, gilt $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.