12. Übungsblatt
Lineare Algebra
im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 26.1.17 vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Quaternionen $\mathbb{H}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B = (1, i, j, k)$. Bestimmen Sie die Matrizen der folgenden $\mathbb{R}$-linearen Abbildunge $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ bezüglich der Basis B.

(a) $q \mapsto jq$

(b) $q \mapsto qk$

(c) $q \mapsto iq - qj$

(d) $q \mapsto \frac{1+i}{2}\, q - \bar{q}\, \frac{1-i}{2}$

Aufgabe 2

Sei M eine Menge. Zeigen Sie:

(a) Seien $M_1, N_2 \subset M$ zwei endliche Teilmengen. Dann gilt

$$\#(M_1 \cup M_2) = \#M_1 + \#M_2 - \#(M_1 \cap M_2).$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, \ldots, M_n \subset M$ endliche Teilmengen. Zeigen Sie mit Induktion, dass gilt

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_j \le n} \#\left(\bigcap_{i=1}^{j} M_{k_i}\right).$$

Aufgabe 3

(a) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U, W \subset V$ seien Unterräume. Dann gilt

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Basis von V.

(b) Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U_1, U_2, U_3 \subset V$ seien Unterräume. Gilt dann in Analogie zu 2(b) für $n = 3$ auch

$$\begin{aligned}\dim(U_1 + U_2 + U_3) = {}& \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_2) \\ & - \dim(U_2 \cap U_3) - \dim(U_1 \cap U_3) + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3)?\end{aligned}$$

Bitte wenden

Aufgabe 4

Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Schiefkörper $\mathbb{k}$ mit $\dim V = \dim W$. Zeigen Sie, dass für eine $\mathbb{k}$-lineare Abbildung $F\colon V \to W$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) F ist Isomorphismus.

(b) F ist injektiv.

(c) Es existiert eine lineare Abildung $G\colon W \to V$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_V$.

(d) Es gilt $\mathrm{rg}(F) = \dim V$.

(e) F ist surjektiv.

(f) Es existiert eine lineare Abbildung $H\colon W \to V$ mit $F \circ H = \mathrm{id}_W$.