13. Übungsblatt
Lineare Algebra
im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 2.2.17
vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren über dem Körper $\Bbbk$:

(a) Für $\Bbbk = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = -3 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & = 2 \end{array}$$

(b) Für $\Bbbk = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rcrcrl} [4]\,x & & & + & [3]\,z & = [1] \\ x & + & [3]\,y & + & z & = [0] \end{array}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Abbildung $F\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \\ -4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie Basen von $\ker F$ und $\operatorname{im} F$.

Aufgabe 3

Sind die folgenden Tupel von Vektoren linear unabhängig in $\mathbb{C}^3$? Falls ja, dann bilden sie eine Basis von $\mathbb{C}^3$. Bestimmen Sie in diesem Fall die Koordinaten von $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

(a) $B = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1+3i \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3-i \end{pmatrix}$

(b) $C = (w_1, w_2, w_3)$ mit $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Invertieren Sie die folgenden Matrizen, falls möglich.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} [1] & [2] \\ [2] & [1] \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \text{ und } \quad C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ j & 2k \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H})$$