Wiederholungsblatt
Lineare Algebra
im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

KEINE ABGABE - Dieses Blatt wird nicht mehr abgegeben oder besprochen. Es soll Ihnen die Möglichkeit geben, vor der Klausur noch einmal Aufgaben zu verschiedenen Themen der Vorlesung zu bearbeiten.
Beachten Sie: Die Aufgaben der Klausur können ganz anders sein als die auf diesem Blatt.

Aufgabe 1

(a) Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = v$ über $\mathbb{Q}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -10 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{für } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und für } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Invertieren Sie die folgende Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Abbildung $F\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ durch $F(w) = qw\bar{q}$, wobei $q = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}v)$ ist mit $v = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{-3}{5} \end{pmatrix} = \frac{4}{5}i - \frac{3}{5}k$.

(a) Zeigen Sie: Wenn w imaginär ist, also von der Form $(0, \tilde{w}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{H}$, dann ist auch das Bild $F(w)$ imaginär.

(b) Identifizieren Sie $\mathbb{R}^3$ mit $\{0\} \times \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ und betrachten Sie die Abbildung $\tilde{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{F}(\tilde{w}) = \operatorname{Im}(F(0, \tilde{w}))$ als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Bestimmen Sie die Matrix von $\tilde{F}$ bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $B = (i, j, k)$ von $\mathbb{R}^3$.

(c) Beschreiben Sie die Abbildung $\tilde{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geometrisch.

Bitte wenden

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}).$$

(a) Bestimmen Sie $\det A$.

(b) Ist A invertierbar?

(c) Betrachten Sie $A \in M_3(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})$, d.h., interpretieren Sie alle Zahlen c als $[c] \in \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. Zeigen Sie: A ist jetzt invertierbar und bestimmen Sie die Inverse.

Hinweis: Benutzen Sie den Euklidischen Algorithmus, um das Inverse einer Zahl in $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ zu bestimmen.

Aufgabe 4

Für eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ definieren wir die Spur als $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Zeigen Sie:

(a) Die Spur ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\operatorname{tr}\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

(b) Für jede Matrix $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ gilt $\operatorname{tr}(MM^*) \geq 0$

(c) Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Wenn $\operatorname{tr}(AC) = 0$ für alle $C \in M_{n,m}(R)$ gilt, dann ist $A = 0$.

Aufgabe 5

Sei $\Bbbk$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum. Sei $F\colon V \to V$ eine $\Bbbk$-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) Es gilt $F \circ F = 0$ und $\operatorname{rg}(F) = \frac{n}{2}$.

(b) Es gilt $\ker F = \operatorname{im} F$.