

3. ÜBUNGSBLATT

LINEARE ALGEBRA

IM WS 2016/2017 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Donnerstag, den 10.11.16
vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die
Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

- (a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

- (b) Sei $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

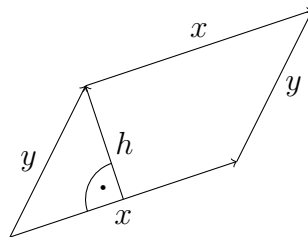
- (i) $F(ax + by) = aF(x) + bF(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$
(ii) $\|F(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt auch

$$\langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Parallelogramm in \mathbb{R}^n mit den Seitenvektoren x und y (s. Skizze).



Zeigen Sie:

- (a) Die Höhe des Parallelogramms wird beschrieben durch den Vektor $h = y - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x$.
(b) Für den Flächeninhalt $A = \|x\| \|h\|$ gilt: $A^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$.
(c) Im \mathbb{R}^2 mit $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ gilt $A = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Aufgabe 3

Seien $v, z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$. Sei $R_{v,z}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $R_{v,z}(w) = v + zw$.

- (a) Zeigen Sie: Es gibt genau einen Punkt $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $R_{v,z}(w_0) = w_0$.
(b) Folgern Sie: $R_{v,z}(w) - w_0 = z(w - w_0)$.

Aufgabe 4

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: die Gleichung $(a + bi)^2 = c + di$ ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= c, \\ 2ab &= d. \end{cases} \quad (1)$$

(b) Gegeben seien c und d . Finden Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, die das Gleichungssystem (1) lösen. Wieviele Lösungen gibt es?

Achtung: Bei der Lösung des Gleichungssystem (1) sind mehrmals Quadratwurzeln zu ziehen. Achten Sie dabei genau auf die Vorzeichen.