4. Übungsblatt

Lineare Algebra

im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 17.11.16
vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gilt:

$$1 + z + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

(b) Folgern Sie aus a), dass für $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ mit $\theta \in (0, 2\pi)$ gilt:

$$1 + z + \ldots + z^n = \frac{(z^{n+1} - 1)(\bar{z} - 1)}{2 - 2\cos(\theta)}.$$

(c) Leiten Sie aus (b) Formeln her für

$$\begin{aligned} &\sin(\theta) + \ldots + \sin(n\theta) \\ \text{und} \qquad &1 + \cos(\theta) + \ldots + \cos(n\theta)\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Es seien $v, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, und sei $F_{v,z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $F_{v,z}(w) = v + z\bar{w}$. Es sei $u \in \mathbb{C}$ mit $u^2 = z$. Wir schreiben $\bar{u}v = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Es seien $S_{v,z}$ und $T_{v,z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$S_{v,z}(w) = bui + z\bar{w} \qquad \text{und} \qquad T_{v,z}(w) = au + w.$$

(a) Zeigen Sie: Es gilt

$$F_{v,z} = S_{v,z} \circ T_{v,z} = T_{v,z} \circ S_{v,z}.$$

(b) Finden Sie ein $w_0 \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\{w \in \mathbb{C} \mid S_{v,z}(w) = w\} = \{w_0 + tu \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Zeigen Sie: die Abbildung $T_{v,z}$ bildet die Menge aus (b) auf sich selbst ab.

(d) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Abbildungen $F_{v,z}, S_{v,z}$ und $T_{v,z}$ anhand von (b) und (c).

Aufgabe 3

Beweisen Sie das Assoziativgesetz für die Multiplikation in $\mathbb{H}$.

Bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben sei die Drehung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um die Achse $\{u + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $u, v \in \mathbb{R}^3$ um den Winkel $2\varphi \in [0, 2\pi)$.
Bestimmen Sie $z, q \in \mathbb{H}$ in Abhängigkeit von u, v und φ, so dass die Abbildung F die Form

$$F(w) = z + qw\bar{q}$$

mit $z, q \in \mathbb{H}$ hat.
Hinweis: Benutzen Sie Satz 1.74 und orientieren Sie sich an Aufgabe 3b von Blatt 3.