6. Übungsblatt

Lineare Algebra

im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 1.12.16 vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie: In jeder Gruppe $(G, *)$ mit 4 Elementen und neutralem Element $e \in G$ gibt es ein Element $a \neq e$ mit $a * a = e$.

(b) Auf wie viele Arten kann man die Menge $G = \{e, a, b, c\}$ zu einer Gruppe machen, in der a das Element aus a) ist, also $a * a = e$ gilt? Sind diese Gruppen abelsch?

Hinweis zu b): Welche Möglichkeiten gibt es für $b * b$?

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass man die Menge $\{0, 1, a, b\}$ auf genau eine Art zu einem Körper machen kann, d.h., es gibt genau eine Möglichkeit, Addition und Multiplikation so zu definieren, dass alle Körperaxiome erfüllt sind, wobei 0 und 1 das Null- bzw. Einselement ist.
Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, dass der Körper wegen 1(a) Charakteristik 2 haben muss.

Aufgabe 3

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper der Charakteristik 2 und $f \colon K \to K$ gegeben durch $f(x) = x^2$. Zeigen Sie, dass f die folgenden Eigenschaften hat:

(a) $f(1) = 1$

(b) $f(a + b) = f(a) + f(b)$

(c) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$

Aufgabe 4

(a) Geben Sie die Additions- und Multiplikationstabellen von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ an.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$(i) \quad [3]x + [4] = [0], \qquad (ii) \quad x^2 + [2]x + [4] = [0] \qquad (iii) \quad [3]x^2 + x + [1] = [0]$$