7. Übungsblatt
Lineare Algebra
im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 8.12.16 vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie: Im Euklidischen Algorithmus gilt mit der Notation aus der Vorlesung, dass $2a_{i+1} < a_{i-1}$ für alle $i = 1, \ldots, i_0$.

(b) Bestimmen Sie jeweils $d = \mathrm{ggT}(m, n)$ und stellen diesen in der Form $d = am + bn$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ dar. Geben Sie, wenn möglich, das multiplikative Inverse von $[m]$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ an.

(i) $m = 163163$, $n = 329423$

(ii) $m = 100000001$, $n = 123456789$

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie: Zwei Vektoren $\binom{a}{b}, \binom{c}{d} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn $ad = bc$.

(b) Seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ paarweise linear unabhängig, d.h. für je zwei Indizes $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ist $\{x_i, x_j\}$ linear unabhängig. Ist dann auch $\{x_1, x_2, x_3\}$ linear unabhängig? (Beweis oder Gegenbeispiel).

Aufgabe 3

Wir definieren die *Polynome* über $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}[X] := \{\sum_{i=0}^{k} a_i X^i \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$ mit der üblichen Addition. Durch Multiplikation mit reellen Zahlen als Skalarmultiplikation wird $\mathbb{R}[X]$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie: $\{X^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]$.

(b) Zeigen Sie: Für $x_0 \in \mathbb{R}$ ist auch $\{(X - x_0)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]$.

(c) Stellen Sie das Polynom $X^3 - 3X^2 + 2X - 1$ in den beiden Basen aus a) und b) mit $x_0 = 1$ dar.

Aufgabe 4

Betrachten Sie $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul. Zeigen Sie:

(a) Jede endliche Teilmenge $E \subset \mathbb{Q}$ mit $\#E \geq 2$ ist linear abhängig.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $E = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{Q}$. Dann existiert $b \in \mathbb{Q} \setminus \langle E \rangle$, somit ist $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt.