# 8. Übungsblatt
## Lineare Algebra
### im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

*Abgabe Donnerstag, den 15.12.16 vor der Vorlesung in den Briefkästen*

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt*

## Aufgabe 1

Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ gegeben als $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear mit $f(u) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $f(v) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Sind dadurch $f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ eindeutig bestimmt? Wenn ja, berechnen Sie diese.

## Aufgabe 2

Sei $R$ ein Ring und seien $M$ und $N$ Rechts-$R$-Moduln, $F : M \to N$ linear. Es seien $m_1, \dots, m_k \in M$ und $n_1 = F(m_1), \dots, n_k = F(m_k) \in N$.

(a) Zeigen Sie: Wenn $n_1, \dots, n_k$ linear unabhängig sind, dann sind auch $m_1, \dots, m_k$ linear unabhängig.

(b) Gilt in (a) auch „genau dann, wenn"? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe 3

Wir definieren für einen kommutativen Ring $R$ mit Eins den $R$-Modul der Polynome über $R$ durch

$$R[X] := \{\sum_{i=0}^{k} a_i X^i \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in R\}$$

mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation durch Multiplikation mit Elementen von $R$. Die Ableitung ist eine Abbildung $F\colon R[X] \to R[X]$ mit $F(\sum_{i=0}^{k} a_i X^i) = \sum_{i=0}^{k} i a_i X^{i-1}$. Zeigen Sie, dass $F$ eine $R$-lineare Abbildung ist.

## Aufgabe 4

Sei $M$ ein $\mathbb{Z}$-Modul. Zeigen Sie:

(a) Eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to M$ mit $f(1) = m \in M$ existiert genau dann, wenn $m \,.\, n = 0 \in M$.

(b) Wenn eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{Q} \to M$ mit $f(1) = m \in M$ existiert, gibt es für alle Primzahlen $p$ und alle $k \in \mathbb{N}$ ein Element $m_{p,k} \in M$, so dass gilt:

$$m_{p,0} = m \text{ und } m_{p,k+1} \,.\, p = m_{p,k}.$$