9. Übungsblatt
Lineare Algebra
im WS 2016/2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 22.12.16
vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Es sei V ein Vektorraum. Seien $U, W \subset V$ zwei Unterräume.

(a) Zeigen Sie: der Durchschnitt $U \cap W$ ist immer ein Unterraum.

(b) Zeigen Sie: die Vereinigung $U \cup W$ ist nicht unbedingt ein Unterraum.

(c) Unter welchen Bedingungen ist die Vereinigung $U \cup W$ ein Unterraum?

Aufgabe 2

Es sei $M = \mathbb{R}^3$. Gegeben seien die Unterräume

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 5x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ 3z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$$

Bestimmen Sie die Unterräume

$$W \cap (U + V) \quad \text{und} \quad W \cap U + W \cap V \, .$$

Aufgabe 3

Seien M und N Rechts-R-Moduln, $F : M \to N$ linear. Zeigen Sie:

(a) Wenn $U \subset M$ Untermodul ist, ist $F(U) = \{F(u) \mid u \in U\}$ Untermodul.

(b) Wenn $V \subset N$ Untermodul ist, ist $F^{-1}(V) = \{m \in M \mid F(m) \in V\}$ Untermodul.

Aufgabe 4

Seien $m, n \in \mathbb{N}$.
a) Zeigen Sie: es gibt eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $F \colon \mathbb{Z}/mn \to \mathbb{Z}/m \oplus \mathbb{Z}/n$ mit $F([x]) = ([x], [x])$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.
b) Zeigen Sie, dass F ein $\mathbb{Z}$-Modul-Isomorphismus ist, wenn m,n teilerfremd sind, und geben Sie die Umkehrabbildung an.
Hinweis: nach Satz 2.18 existieren $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $rm + sn = ggT(m, n)$.