

# SEMINAR/READING COURSE ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE — SS 2015

SEBASTIAN GOETTE

Dieser Kurs ist eine Ergänzung zur Vorlesung „Algebraische Topologie I/II“. Dabei lernen wir am Anfang einige für den homotopietheoretischen Zugang zur algebraischen Topologie wichtige Konstruktionen kennen. Im hinteren Teil des Programmes geht es vor allem um die algebraische Kategorie topologischer Räume, die in der Sommerschule des Graduiertenkollegs noch vertieft werden wird.

Das folgende Programm ist im hinteren Teil noch vorläufig.

**ACHTUNG.** Da der Termin an einem Donnerstag Nachmittag liegt, kann es bei den Seminarvorträgen kurzfristig zu Verschiebungen kommen, falls wichtige Sitzungen stattfinden. Die vorhersehbaren Termine habe ich allerdings bereits berücksichtigt. In den Wochen von Himmelfahrt (14. 5.) und Fronleichnam (4. 6.) sollte der Lesekurs sich an einem anderen Tag treffen.

Hieraus ergeben sich die vorläufigen Termine für die Seminarvorträge. Aus diesen Gründen ist die Reihenfolge der Themen und Vorträge scheinbar durcheinander.

## 1. SIMPLIZIALE MENGEN

Die Kategorie der simplizialen Mengen hat sehr ähnliche Eigenschaften wie die Kategorie  $kw\mathcal{H}$  und ihre Objekte und Morphismen lassen sich auf eine einfache, kombinatorische Weise beschreiben. Viele in der Topologie wichtige Räume und Spektren lassen sich mit simplizialen Methoden konstruieren und beschreiben. Gleichzeitig sind simpliziale Methoden die Grundlage für kategorielle Konstruktionen, die wir in späteren Abschnitten benutzen.

**23. 4. Simpliziale Komplexe und simpliziale Mengen.** Abstrakte simpliziale Komplexe als Teilmengen der Potenzmenge einer Grundmenge  $M$ , geometrische Realisierung im  $\mathbb{R}^N$ , bei Anordnung von  $M$  Beschreibung der Randsimplizes [Al, Sect 3].

Simpliziale Mengen  $X_\bullet$  als Folge von Mengen  $X_k$  von  $k$ -Simplizes mit Rand- und Entartungsoperatoren, simpliziale Menge zu einem angeordneten Simplizialkomplex, simpliziale Abbildungen [Al, Sect 3].

Die Kategorie  $\mathbf{\Delta}$ ; Erzeuger und Relationen. Simpliziale Mengen als kontravariante Funktoren  $X: \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathit{Set}$ , simpliziale Abbildungen als natürliche Transformationen. Simpliziale Objekte in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  sind kontravariante Funktoren  $\mathbf{\Delta} \rightarrow \mathcal{C}$  [Al, Sect 3], [M2, §2].

Beispiele: der (kombinatorische) Standardsimplex  $\Delta[n]$  [Al, Sect 3], [GZ, Sect. II 2], [GJ, Ex 1.7], [M2, Def 5.4], und der Raum der singulären Simplizes  $S(X)$  in einem topologischen Raum  $X$  [M2, Ex 1.5].

Der (affine) Standardsimplex  $\Delta^n$  und seine Seiten (Vorsicht mit der Notation in den verschiedenen Quellen!), die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge als CW-Komplex [Al, Section 5], [M2, §14]. Die Zellen entsprechen gerade den nicht entarteten Simplizes. Beispiel: die Realisierung des kombinatorischen Standardsimplexes ist der affine Standardsimplex. Weitere Beispiele, etwa  $S^n$ .

**30. 4. Limiten, Kolimiten und die geometrische Realisierung.** Abstrakte Kolimiten von Funktoren; Beispiele: Koproduct, Pushout, Quotient, herkömmlicher Kolimes. Abstrakte Limiten von Funktoren; Beispiele: Produkt, Pullback, Urbild, herkömmlicher Limes [Al, Sect 4].

Die geometrische Realisierung von  $X$  als Kolimes über die Simplizes von  $X$  [Al, Sect 5], [GJ, I.2].

Paare adjungierter Funktoren; Beispiel: Einhängung (linksadjungiert) und Schleifenraum (rechtsadjungiert); geometrische Realisierung (linksadjungiert) und die simpliziale Menge der singulären Simplizes in einem Raum (rechtsadjungiert) [M2, §15].

Linksadjungierte Funktoren sind mit Kolimiten verträglich, rechtsadjungierte Funktoren mit Limiten. Insbesondere ist die geometrische Realisierung mit Kolimiten verträglich.

**7. 5. Seminarvortrag: Die abgeschlossene monoidale Struktur.** Konstruktion von Produkt und Koproduct in der Kategorie der simplizialen Mengen, zugehörige monoidale Strukturen im Sinne von [G, 4.b]. Endliche Produkte sind verträglich mit der geometrischen Realisierung [M2, Thm 14.3], allgemeiner [GZ, III.3] — in der Kategorie  $kw\mathcal{H}$  aus [G, 4.a] gilt das ohne Einschränkung.

Konstruktion der simplizialen Menge der simplizialen Abbildungen. Die Kategorie der simplizialen Mengen ist kartesisch abgeschlossen. Homotopie simplizialer Abbildungen [M2, §6 (wenn möglich ohne 6.5–6.11)], [GJ, I.5].

**21. 5. Seminarvortrag: Kan-Komplexe und Kan-Faserungen.** Ausdehnungs- oder „Hornfüller“-eigenschaft [M2, Def 1.3], Kan-Komplexe [M2, §3]. Beispiel: Komplex der singulären Simplizes  $S(X)$  [M2, Lemma 1.5]. Homotopiegruppen von Kan-Komplexen [GJ, I.6–I.7], [M2, §§3–5].

Kan-Faserungen und ihre lange exakte Homotopiesequenz.

**(Woche vom 4. 6.?) Simpliziale und singuläre Homologie.** Kombinatorische Beschreibung der CW-Homologie von  $|X_\bullet|$ ; Beschreibung durch simpliziale abelsche Gruppen [M2, §2].

Der Raum der singulären Simplizes  $|S(X)|$  ist schwach äquivalent zu  $X$ , somit erfüllt die singuläre Homologie  $H_\bullet(|S(X)|)$  von  $X$  die Eilenberg-Steenrod-Axiome und Invarianz unter schwachen Äquivalenzen. Referenzen hierzu folgen.

## 2. KATEGORIEN

Wir wenden simpliziale Mengen an, um Kategorien topologische Räume zuzuordnen. Durch geschickte Konstruktion bestimmter Kategorien können wir algebraische Probleme durch topologische Räume beschreiben.

**(Woche vom 14. 5.?) Der Nerv einer Kategorie.** Zu jeder kleinen Kategorie  $\mathcal{C}$  gehört eine simpliziale Menge, der Nerv  $NC$ , und der klassifizierende Raum  $BC = |NC|$ .

Beispiel: fasse eine diskrete Gruppe  $G$  als Kategorie auf, dann ist  $BG$  ein klassifizierender Raum für  $G$ . Die (Ko-) Homologiegruppen von  $BG$  heißen auch die Gruppen-(Ko-)Homologie von  $G$ .

Elementare Eigenschaften von  $BC$ , Bedeutung von  $\pi_0(BC)$  und  $\pi_1(BC)$  [We, IV, §3], genauere Spezifikation folgt.

Kategorien ober- und unterhalb von Objekten oder Funktoren, verwandte Konstruktionen.

**11. 6. Seminarvortrag: Homotopie-Limiten und -Kolimiten.** Gewöhnliche (Ko-)Limiten verhalten sich nicht gut unter (schwachen) Homotopieäquivalenzen (Beispiele). Universelle Eigenschaft des Homotopie-Limes und -Kolimes in  $kw\mathcal{H}$  sowie in  $kw\mathcal{H}_+$ , Unterschied zum Limes/Kolimes in  $\mathcal{H}kw\mathcal{H}$  beziehungsweise  $\mathcal{H}kw\mathcal{H}_+$  [D], [V].

Konstruktion des (reduzierten) Homotopie-Kolimes als Realisierung eines simpliziales Objektes in  $kw\mathcal{H}$  oder  $kw\mathcal{H}_+$ . Beispiele: Abbildungszylinder und -kegel, Teleskop [BK, XII, §2, 3].

Konstruktion des Homotopie-Limes, Beispiele: Homotopiefaserung [BK, XI, §2–4].

**25. 6. Seminarvortrag: Quillen-K-Theorie.** Kurze Definition von  $K_0(R)$  und  $K_1(R)$  für einen Ring  $R$  [We, II, §1,2, III, Def 1.1]. Die Kategorie  $\mathcal{P}_R$  der endlich erzeugten projektiven  $R$ -Moduln als exakte Kategorie,  $K_0(\mathcal{P}_R) = K_0(R)$  [We, II, 7.1–7.1.1].

Sei jetzt  $\mathcal{A}$  exakte Kategorie. Konstruktion von  $Q\mathcal{A}$ , es gilt  $K_0(\mathcal{A}) = \pi_1 |BQ\mathcal{A}|$  [We, IV, §6]. Definition der höheren  $K$ -Gruppen [We, IV, Def 6.3]. Der Raum  $|BQ\mathcal{A}|$  ist ein unendlicher Schleifenraum [We, IV, 6.5].

### 3. WALDHAUSEN $K$ -THEORIE

Topologische  $K$ -Theorie beschreibt Vektorbündel über einem gegebenen Raum  $X$ . Waldhausen  $K$ -Theorie beschreibt analog endlich dominierte retraktive Räume über  $X$ . Ihre Konstruktion ist analog zu Quillens  $Q$ -Konstruktion, aufgrund der schwächeren Eigenschaften der zugrundeliegenden Kategorie aber etwas technischer. Bevor wir mit der Konstruktion beginnen, betrachten wir zwei  $K$ -theoretische Invarianten topologischer Räume.

**18. 6. Walls Endlichkeits-Hindernis.** Ein topologischer Raum  $X$  sei darstellbar als Retrakt eines endlichen CW-Komplexes, zum Beispiel könnte  $X$  eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit sein. Ist  $X$  dann bereits homotopieäquivalent zu einem endlichen CW-Komplex?

Diese Frage führt auf das Wallsche Endlichkeits-Hindernis  $w(X)$  in  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$  [L, Lect 2].

**2. 7. Einfache Homotopieäquivalenzen und Whitehead-Torsion.** Einfache Homotopieäquivalenzen entstehen durch sukzessives Hinzufügen oder Kollabieren von einfachen Erweiterungen. Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz endlicher CW-Komplexe, ist  $f$  dann homotop zu einer einfachen Homotopieäquivalenz?

Das Hindernis ist in diesem Fall die Whitehead-Torsion  $\tau(f) \in \text{Wh}(\pi_1(X))$ , wobei  $\text{Wh}(G) = K_1(\mathbb{Z}[G]) / (\pm G)$  [L, Lect 3, 4]. Der  $s$ -Kobordismussatz ist eine weitere Anwendung der Whitehead-Torsion.

**9. 7. Waldhausen Kategorien und die  $wS$ -Konstruktion.** Axiome für Waldhausen-Kategorien  $\mathcal{C}$ , Definition von  $K_0(\mathcal{C})$ . Beispiele: Kettenkomplexe  $Ch_R$ , topologische Räume  $kw\mathcal{H}$  und geeignete Unterkategorien (Stichwort: Eilenberg-Swindle), Erweiterungskategorien [Wa, I.1, I.2], [We, II, §9 bis 9.4].

Konstruktion der simplizialen Waldhausen-Kategorie  $S_\bullet\mathcal{C}$ . Es gilt  $\pi_1(BwS_\bullet\mathcal{C}) \cong K_0(\mathcal{C})$ . Konstruktion des Waldhausen-Spektrums zu  $\mathcal{C}$ , erste Eigenschaften [Wa, I.3], [We, IV, §8 bis 8.7].

**16. 7. Der Additivitätssatz.** Kurze exakte Sequenzen exakter Funktoren, verschiedene Formulierungen des Additivitätssatzes, Beweis [Wa, I.3, I.4].

Anwendungen des Additivitätssatzes, unter anderem der Beweis, dass das Waldhausen-Spektrum ein  $\omega$ -Spektrum ist [Wa, I.5], [We, V, §1].

**23. 7. Der Faserungssatz.** Zylinderfunktoren, insbesondere in  $Ch_R$  und  $kw\mathcal{H}_+$ , erste Anwendungen. Formulierung und Beweis des Faserungssatzes. Anwendungen, insbesondere der Approximationssatz [Wa, I.6].

### LITERATUR

- [Al] D. G. L. Allegretti, *Simplicial Sets and van Kampen's Theorem*, Preprint 2008, <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Allegretti.pdf>
- [BK] A. K. Bousfield, D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Math. 304, Springer, Berlin, 1972.
- [D] D. Dugger, *A primer on homotopy colimits*, incomplete notes, 2008; <http://math.uoregon.edu/~ddugger/hocolim.pdf>
- [GZ] P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Springer, Berlin 1967.

- [GJ] P. G. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Progress in Mathematics 174, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [G] S. Goette, *Algebraische Topologie*, <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/dhein/AlgTopo-Skript.pdf>
- [H] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, xii+544S.,  
<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- [L] J. Lurie, *Algebraic K-Theory and Manifold Topology*, <http://www.math.harvard.edu/~lurie/281.html>
- [M1] P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago IL, 1999, x+243S.,  
<http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf>
- [M2] P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, D. van Nostrand, Princeton, 1967.
- [V] K. Völkel, *Homotopy limits*, blog, <http://www.konradvoelkel.com/2012/11/homotopy-limits/>
- [Wa] F. Waldhausen, *Algebraic K-Theory of Spaces*, in: *Algebraic and geometric topology* (New Brunswick, N.J., 1983), 318–419, Lecture Notes in Math., 1126, Springer, Berlin, 1985.
- [We] C. Weibel, *The K-book (an introduction to Algebraic K-theory)*, Grad. Studies in Math. 145, AMS, 2013